Teorie grup I – Moc abstrakce

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme grupu G, ve které pro každý prvek g platí $g^2 = e$. Ukažte, že G je abelovská.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:
Chceme ukázat, že pro každé dva prvky $g, h \in G$ platí $gh = hg$. Zvolme tedy libovolné dva prvky $g, h \in G$. Z podmínky ze zadání máme $gg = g^2 = e$, $hh = h^2 = e$. Vynásobením těchto dvou rovností dostáváme $gghh = e$. Dále také platí $(gh)(gh) = (gh)^2 = e$. Takže dohromady musí být $gghh = ghgh$. Tuto rovnost nyní můžeme přenásobit g^{-1} zleva a poté h^{-1} zprava. Tím se nám rovnost vykrátí na $gh = hg$. Takže $gh = hg$ pro všechna $g, h \in G$ a G je tedy abelovská.

POZNÁMKY:
K důkazu se dalo dostat mnoha různými manipulacemi s prvky, ale všechna správná řešení víceméně odpovídala vzorovému.

(Filip Bialas)

Úloha 2.

Uvažte následující dvě grupy: G je grupa, jejíž prvky jsou všechna kladná racionální čísla s binární operací jejich klasického násobení. Naproti tomu H je grupa všech polynomů v jedné proměnné s celočíselnými koeficienty a její binární operací je běžné sčítání polynomů. Ukažte, že $G \simeq H$.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:
Každé racionální číslo k můžeme zapsat jednoznačně jako $k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$, kde p_i je i-té prvočíslo. Můžeme napsat nekonečný součin, protože od nějakého i bude už $\alpha_i = 0$, tedy budeme násobit výraz jedničkou. Také se může stát, že α_i je někdy záporné, protože k můžeme zapsat jako $\frac{q}{r}$, tedy všechna prvočísla v r mají záporné α_i.

Uvažme zobrazení φ, pro které platí

$$\varphi(k) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i.$$

Všimněme si, že toto zobrazení zobrazí jedno číslo na právě jeden polynom. Pro polynom jsme zase použili nekonečnou sumu, protože od nějaké pozice budou už všechny jeho koeficienty nulové, tedy do sumy těmito sčítanci nic nepřidáme.

Ukážeme, že je φ hledaný izomorfismus. Je to homomorfismus, jelikož

$$\varphi(k \cdot l) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\beta_i}\right) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) x^i =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i = \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\right) + \varphi\left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\beta_i}\right) = \varphi(k) + \varphi(l).$$

Musíme ještě ukázat, že je φ bijekce. Je surjektivní, neboť pro každý polynom $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ můžeme vzít kladné racionální číslo $k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ a máme $\varphi(k) = f$. A také prosté, neboť aby se nějaké kladné racionální číslo zobrazilo na f, tak musí mít stejné vyjádření pomocí prvočísel jako k. Tedy nikdy neexistují dvě různá čísla, která by se zobrazila na jeden polynom.

Ukázali jsme, že je φ homomorfismus a zároveň bijekce. Takže se jedná o izomorfismus a grupy ze zadání jsou izomorfní.

Poznámky:
Úlohu neposlalo moc řešitelů, ale ti, kteří ji poslali, ji měli správně. Řešili ji stejně jako vzorové řešení, občas speciálně ošetřili záporné α_i, ale to není třeba.

(Kuba Svoboda)

Úloha 3.

Nechť G je grupa a N nějaká její normální podgrupa, přičemž faktorgrupa G/N je nekonečná cyklická. Dokažte, že pak pro každé přirozené n existuje podgrupa $H \leq G$ s indexem n.

(Jakub Löwit)

Elegantní řešení:
Grupa N je v G normální, takže G/N skutečně existuje. Přitom o ní víme, že je nekonečná cyklická. Existuje tedy prvek $a = gN \in G/N$, který grupu G/N generuje, tj. G/N obsahuje právě prvky a^k pro $k \in \mathbb{Z}$. Zobrazení $\varphi : G/N \to \mathbb{Z}$ definované jako $\varphi : a^k \mapsto k$ je očividně izomorfismus těchto grup. Dále se tedy k G/N můžeme chovat v podstatě jako k $\mathbb{Z}$.

Ze zadání také okamžitě dostáváme přirozenou projekci $\pi : G \to G/N$, která každému prvku z G přiřazuje ten koset z G/N, ve kterém leží. Víme, že π je homomorfismus, který je na.

Nyní si vyberme libovolné přirozené číslo n. Uvažme zobrazení $\psi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, které každému celému číslu přiřadí jeho zbytek po dělení číslem n. Zobrazení ψ_n je dokonce homomorfismus, který je na.

Všechna tři právě popsaná zobrazení tedy můžeme složit, čímž získáme zobrazení $\psi_n \circ \varphi \circ \pi : G \to \mathbb{Z}_n$, které je, jakožto složení zobrazení, která jsou na, také na. Jádro tohoto zobrazení označme H. Podle první věty o izomorfismu je $G/H \simeq \mathbb{Z}_n$. Proto H vyrobí v G právě $|\mathbb{Z}_n| = n$ kosetů, což jsme přesně chtěli.

Přímočaré řešení:
Ukážeme přímočařejší řešení, které ale vyžaduje trochu víc práce. Stejně jako minule vezměme ten prvek $a = gN \in G/N$, který generuje celou G/N. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ si nyní vezměme podgrupu L grupy G/N definovanou jako $L = \{g^{nm}N \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Dále označme H grupu sestávající právě z těch prvků grupy G, které patří do nějakého kosetu ležícího v L.

Nyní z definic ověříme, že H je skutečně uzavřená na všechny grupové operace. Snadno dostáváme $e \in N = g^0 N \subset H$.

Dále ověříme uzavřenost na binární operaci. Jakmile $h_1, h_2 \in H$, máme $h_1 \in g^{nm_1}N$, $h_2 \in g^{nm_2}N$ pro nějaká přirozená m_1, m_2. Potom díky vlastnostem faktorgrupy leží prvek h_1h_2 v kosetu $g^{nm_1}Ng^{nm_2}N = g^{nm_1}g^{nm_2}N = g^{n(m_1+m_2)}N$, jehož prvky ale také leží v H.

Konečně ukážeme i uzavřenost na invertování. Pokud je $h \in H$, koset hN je roven $g^{nm}N$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Dokážeme, že $h^{-1} \in g^{-nm}N \subseteq H$. Počítáním ve faktorgrupě dostáváme $h(g^{-nm}N) = hNg^{-nm}N = g^{nm}Ng^{-nm}N = g^{nm}g^{-nm}N = N$, přičemž $e \in N$. V součinu $h(g^{-nm}N)$ tedy leží identita e, takže nutně $h^{-1} \in g^{-nm}N$.

Následně je ještě třeba zdůvodnit, proč má H v G opravdu index n. Nejprve ukážeme, že kosety grupy L v grupě G/N přesně odpovídají zbytkovým třídám po dělení n. Nosná množina celé G je rovna sjednocení všech $\{g^m N \mid m \in \mathbb{Z}\}$, tyto kosety podgrupy N ji přesně rozdělují. Přitom $L, gL, g^2L, \ldots, g^{n-1}L$ jsou kosety grupy L, které pokrývají všechny kosety H, tedy celou G. Zároveň jsou různé, neboť pokud $g^iL = g^jL$, potom už $g^{i-j}L = L$, tedy i a j dávají stejný zbytek po dělení n (protože každé celé číslo jde jednoznačně vyjádřit jako součet násobku n a čísla mezi 0 a $n-1$).

Zbývá zdůvodnit, proč je také $[G : H] = n$. Podgrupa L má v G/N stejný počet kosetů, jako má její sjednocení H v celé G. Tento počet kosetů je roven n, což jsme přesně chtěli.

Poznámky:
Podotkněme, že zkonstruované podgrupy H byly v obou řešeních ve skutečnosti stejné. A ten nejjednodušší způsob, jak vše potřebné ověřit, je popsán právě v elegantním řešení. Řešení se sešel rozumný počet a většina z nich našla grupu H stejně, jako v přímočarém řešení. Tato řešení se pak typicky snažila příklad nějak dodělat. Často ale ve zdůvodnění něco chybělo, popř. v něm řešitelé udělali drobné chyby. Za to jsem typicky strhával bod. Dva řešitelé (*Danil Koževnikov* a *Jan Vavřín*) skutečně přišli na krátké a elegantní řešení, čímž si vysloužili imaginární bod.

(Jakub Löwit)