Geometrie trojúhelníka 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

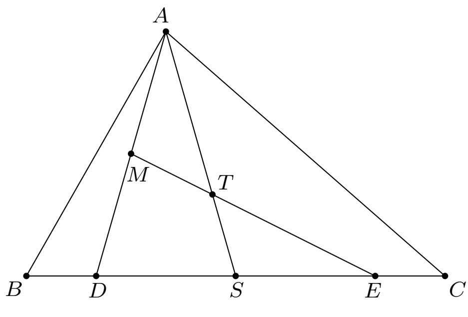
Na straně BC daného trojúhelníka ABC se pohybují body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Označíme-li M střed úsečky AD, dokažte, že přímka ME prochází pevným bodem (nezávislým na poloze bodů D, E).

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Buď S střed strany BC a T těžiště $\triangle ABC$. Z definice těžiště plyne, že T dělí AS v poměru $2:1$. Ukážeme, že T je hledaným bodem.

Nejprve se zvlášť podívejme na případ $D = E$. Pak musí platit $D = E = S$ a jednoduše dostáváme, že EM skutečně prochází bodem T. Dále nechť $D \neq E$. Protože S je středem BC a $|BD| = |EC|$ (přičemž D, E leží oba uvnitř strany BC), jde zároveň také o střed úsečky DE. Úsečka AS je tudíž těžnicí v $\triangle DAE$. Bod T dělí těžnici v poměru $2:1$ a je tedy těžištěm $\triangle DAE$. Pak ale EM musí procházet skrz T, neboť EM je také těžnice v $\triangle DAE$.



POZNÁMKY:

Úloha byla jednoduchá a to se také projevilo na počtu správných řešení. Objevilo se pár drobných nedostatků – konkrétně mnoho řešení přímo prohlásilo, že dva trojúhelníky sdílející těžnici mají i stejné těžiště (bez jakéhokoliv dalšího vysvětlení), nebo opomnělo, že pro $|BD| \geq |CE|$ situace nevypadá tak jako na obrázku. Nakonec jsem se ale rozhodl za tyto drobnosti body nestrhávat.

Rád bych také pochválil všechny, kteří poslali řešení podobné vzoráku, oproti těm, kteří zdlouhavě řešili úlohu pomocí středních příček a stejnolehlostí. *(Rado van Švarc)*

Úloha 2.

V trojúhelníku ABC s opsištěm O, těžištěm T a kolmištěm H označme O_a osový obraz O podle strany BC a analogicky sestrojme body O_b a O_c. Dále označme X střed úsečky HT. Dokažte, že přímky AH, O_aX a O_bO_c procházejí jedním bodem.

(David Hruška)

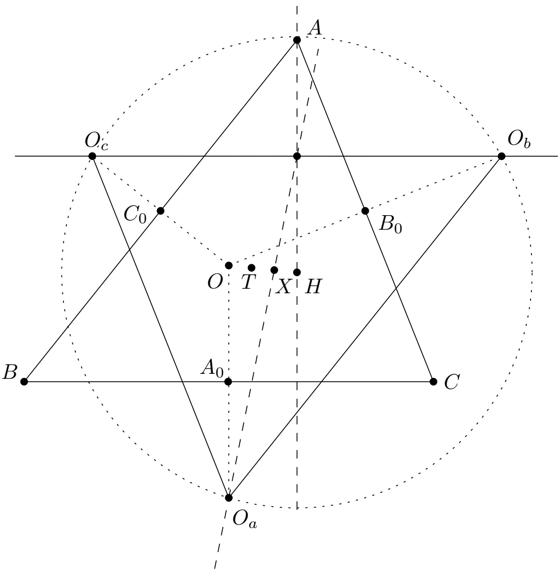
Řešení poznáváním bodů:

Podívejme se na trojúhelník $O_aO_bO_c$. Díky definici bodů O_a, O_b a O_c je obrazem trojúhelníku $A_0B_0C_0$ ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem dva.

Jelikož je bod O kolmištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$[1] a jakožto střed zmíněné stejnolehlosti se zobrazí sám na sebe, je i kolmištěm trojúhelníku $O_aO_bO_c$.

Z tvrzení o překlápění kolmiště[2] plyne, že bod H leží na kružnici opsané překlopené podle strany BC, jejíž střed je překlopený bod O, neboli O_a. Proto $|HO_a| = |HO_b| = |HO_c| = R$, kde R je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Tedy H je opsištěm v trojúhelníku $O_aO_bO_c$. Těžištěm trojúhelníku $O_aO_bO_c$ je tedy bod ve třetině úsečky OH blíž k H (to je teď opsiště), což je bod X.

Nyní již snadno dokážeme, že všechny tři zkoumané přímky procházejí středem úsečky O_bO_c: přímka O_bO_c obsahuje celou tuto úsečku, přímka AH je kolmicí na stranu O_bO_c procházející opsištěm, takže je osou této strany, a konečně O_aX je těžnice, takže prochází středem strany proti vrcholu O_a.



Řešení stejnolehlostí:

Celý obrázek proženeme stejnolehlostí se středem v bodě O a koeficientem $1/2$. Zřejmě stačí dokázat, že obrazy všech tří přímek ze zadání procházejí jedním bodem, a to konkrétně středem těžnice t_a.

Body O_a, O_b a O_c se díky své definici zobrazily postupně na body A_0, B_0 a C_0, takže obrazem přímky O_bO_c je přímka B_0C_0, která zřejmě půlí těžnici t_a.

[1] Osy stran jsou výšky v trojúhelníku ze středních příček, viz Tvrzení 16 v prvním dílu seriálu.

[2] Osové obrazy H podle stran leží na kružnici opsané, viz Tvrzení 19 v prvním dílu seriálu.

Víme, že O, T a H leží na přímce v tomto pořadí a platí $|OT| : |TH| = 1 : 2$. Protože X je střed TH, leží i X na této přímce a platí $|OT| : |TX| : |XH| = 1 : 1 : 1$. Z toho plyne, že T je středem OX, čili obrazem X je bod T a obrazem přímky O_aX je přímo t_a.

Přímka AH se dvakrát přiblíží k přímce OO_a, neboť ta je s ní rovnoběžná a obsahuje střed stejnolehlosti. Obrazem AH je tedy osa pásu ohraničeného přímkami AH a OO_a a jako taková jistě půlí příčku tohoto pásu – těžnici A_0A. Všechny tři zobrazené přímky tedy procházejí středem těžnice t_a.

Poznámky:
Velká většina správných řešení postupovala podle jednoho z výše zmíněných. V prvním případě někteří ukázali, že trojúhelník $O_aO_bO_c$ je dokonce středově souměrný s trojúhelníkem ABC podle středu OH, neboli středu Feuerbachovy kružnice v ABC. Všechna řešení obsahovala mnoho jednoduchých kroků a často některé drobnosti chyběly nebo mi nebylo jasné, co má z čeho plynout. Přišlo mi ale spravedlivější tyto drobnosti přecházet, takže jsem nakonec hodnotil spíš mírně. Chtěl bych řešitele této úlohy pochválit, neboť skoro všichni postupovali správně nebo si aspoň všimli správných věcí, a některé vyzvat, aby si příště dali práci s přesnější (ale ne nutně obsáhlejší) argumentací.

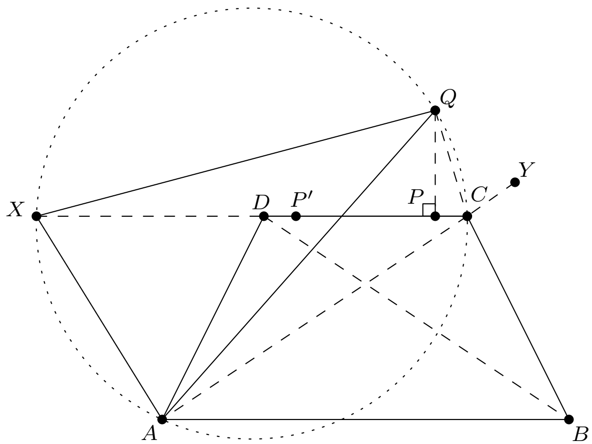
(David Hruška)

Úloha 3.

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, ve kterém $AB \parallel CD$. Kružnice vepsaná trojúhelníku BCD se dotýká strany CD v bodě P. Buď Q bod na vnitřní ose úhlu CAD takový, že $QP \perp CD$. Druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku QCA s přímkou CD nazvěme X. Ukažte, že trojúhelník QAX je rovnoramenný.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Nechť P' je bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ACD se stranou CD. Trojúhelníky ACD a BCD jsou souměrné podle osy souměrnosti rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$, tudíž $|DP'| = |CP|$. Ze seriálu víme, že body dotyku kružnice vepsané a připsané trojúhelníku ACD se stranou CD jsou souměrné podle středu strany CD, a proto je P bodem dotyku kružnice připsané trojúhelníku ACD ke straně CD. Střed této kružnice[3] tedy leží na kolmici vedené bodem P ke straně CD a také na ose úhlu CAD; proto se jedná o bod Q. Z toho plyne, že QC je osou vnějšího úhlu ACD.



[3] V seriálu bychom ho nazvali „připsiště“, což klidně smíte dělat i ve svých řešeních. Toto řešení je záměrně sepsané tak, aby s ním byli spokojeni i opravovatelé matematické olympiády.

K dokončení úlohy ukážeme, že $|\sphericalangle QXA| = |\sphericalangle QAX|$. Nechť Y je bod na opačné polopřímce k CA. S využitím tětivového čtyřúhelníka $ACQX$ můžeme psát

$$|\sphericalangle QXA| = 180^\circ - |\sphericalangle QCA| = |\sphericalangle QCY| = |\sphericalangle QCX| = |\sphericalangle QAX|.$$

Poznámky:

Téměř všechna správná řešení využila faktu, že Q je střed kružnice připsané trojúhelníku ACD. Dá se také úhlit v kružnici opsané trojúhelníku QCD se středem ve Švrčkově bodě[4], ale tento postup bývá zdlouhavější. Chci připomenout, že nové body, které se nevyskytují v zadání, nestačí mít značené v obrázku, nýbrž je nutné je explicitně definovat slovním komentářem.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

[4] O Švrčkově bodě se dočtete ve druhém díle seriálu.