Stereometrie

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Stěnové úhlopříčky kvádru mají délky a, b a c. Jakou délku má jeho tělesová úhlopříčka?

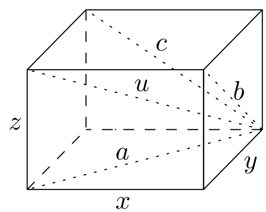
(Martin „E.T." Sýkora)

Řešení:

Označme délku tělesové úhlopříčky a hran daného kvádru po řadě u, x, y, z tak, aby platilo:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2, \\ b^2 &= y^2 + z^2, \\ c^2 &= x^2 + z^2. \end{aligned}$$

To je podle Pythagorovy věty možné – stačí hrany označit jako na obrázku.



Dále z Pythagorovy věty a první rovnosti platí, že $u^2 = a^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Sečtením prvních tří rovností získáváme $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$, tedy $u^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Odmocněním tohoto vztahu získáme hledané vyjádření délky tělesové úhlopříčky:

$$u = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Poznámky:

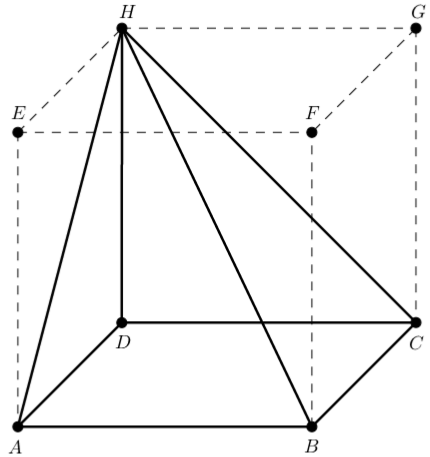
Drtivá většina řešitelů si s úlohou poradila. Ti, kteří zvolili metodu uvedenou ve vzorovém řešení, získali imaginární bod navíc, protože si ušetřili poměrně složité vyjadřování x, y a z pomocí a, b a c. I to ale samozřejmě vedlo k cíli. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Úloha 2.

Když Mirek umřel, rozhodla se mu ostatní PraSátka postavit monumentální hrobku ve tvaru „pravoúhlé pyramidy“, tedy čtyřbokého jehlanu se všemi trojúhelníkovými stěnami pravoúhlými. Poraďte jim, jak by taková pyramida měla vypadat. Tedy pokud takové pyramidy existují, určete délky hran jedné z nich, jinak vysvětlete, proč neexistují.

Řešení:

Takové pyramidy existují. Například tento čtyřboký jehlan $ABCDH$ v krychli $ABCDEFGH$:



Úhly BCH a BAH jsou pravé, jelikož sousední stěny krychle jsou na sebe kolmé. Úhly ADH, CDH jsou též pravé, jelikož stěnou krychle je čtverec. Zadání je splněno.

Zbývá dopočítat délku hran nalezeného jehlanu. Označme a velikost hrany krychle. Z Pythagorovy věty je pak velikost stěnové úhlopříčky rovna $\sqrt{2}a$ a velikost tělesové úhlopříčky rovna $\sqrt{3}a$. Tedy $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |DH| = a$, $|AH| = |CH| = \sqrt{2}a$ a $|BH| = \sqrt{3}a$.

Poznámky:

Většina řešitelů si s úlohou snadno poradila a našla jehlan podobný vzorovému. Asi nejčastější chybou bylo, že navržený jehlan ve skutečnosti nebyl jehlanem, jelikož se jeho hlavní vrchol nacházel v rovině podstavy. *(Lucien Šíma)*

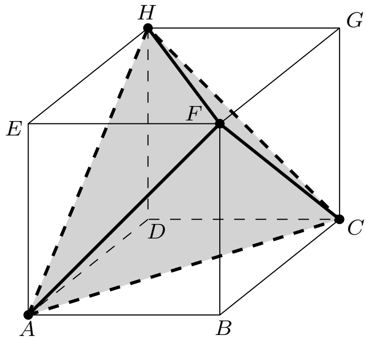
Úloha 3.

Když si Kuba hrál se svým oblíbeným pravidelným čtyřstěnem, všiml si, že na zem vrhá čtvercový stín. Je to možné, nebo měl jen halucinace? Svou odpověď podrobně dokažte. Předpokládejte, že máme jeden zdroj světla umístěný v nekonečnu, takže jsou světelné paprsky rovnoběžné.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Je to možné. Uvažme krychli $ABCDEFGH$. Uvažme čtyřstěn, jehož vrcholy umístěme do vrcholů $ACFH$. Každá hrana čtyřstěnu je stěnovou úhlopříčkou krychle, tedy jsou všechny stejně dlouhé, proto je čtyřstěn pravidelný. Nyní už stačí zvolit směr paprsků kolmý na libovolnou stěnu krychle. Vrcholy čtyřstěnu se zobrazí na vrcholy protější stěny a hrany čtyřstěnu na strany této stěny. Každá stěna krychle je čtverec, což je přesně stín uvažovaného čtyřstěnu.



Poznámky:

Úloha nebyla nikterak složitá, tedy většina řešitelů zvládla úlohu bez potíží. Ne všichni zvolili stejný postup. Někteří však měli problémy s popsáním správného řešení matematicky.

(Adéla Kostelecká)

Úloha 4.

Kolem Slunce obíhalo do roku 2006 devět planet. Slunce považujeme za kouli, planety za body v prostoru. Ukažte, že na Slunci existoval bod, z nějž byly vidět nejvýše tři planety.[1]

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

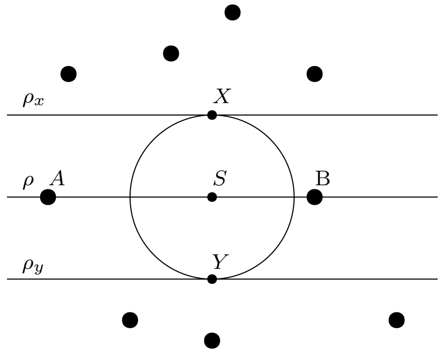
Střed Slunce si označíme S. Vybereme si libovolné dvě planety a označíme si je A a B. Nechť ρ je rovina daná body S, A a B (nebo libovolná z rovin, ve které všechny tyto body leží, jsou-li na jedné přímce). Dále nechť ρ_x a ρ_y jsou (různé) roviny tečné ke Slunci rovnoběžné s rovinou ρ a nechť X, Y jsou příslušné body doteku.

Podíváme se, kolik planet je vidět z bodů X a Y. Vzhledem k tomu, že rovina ρ vůbec nezasahuje ani do jednoho z poloprostorů viditelných z X a z Y, planety A a B nejsou ani z jednoho z těchto bodů vidět. Též si všimneme, že poloprostory ohraničené rovinami ρ_x a ρ_y neobsahující Slunce jsou disjunktní. To znamená, že žádná planeta nemůže být viditelná z bodu X i z bodu Y.

Planet je dohromady devět, z toho dvě nejsou vidět z ani jednoho z bodů X, Y a zbývajících sedm vždy nejvýše z jednoho z nich. To už ale nutně znamená, že z jednoho z bodů X, Y jsou vidět nejvýše tři planety, což jsme chtěli ukázat.

---

[1] Planeta je viditelná z bodu A na povrchu Slunce, pokud se nalézá v poloprostoru, který má hraniční rovinu tečnou ke Slunci v bodě A a neobsahuje Slunce. Do poloprostoru zahrnujeme i hraniční rovinu.



Projekce na rovinu kolmou na ρ. Ze všech použitých rovin se v této projekci stanou přímky.

Poznámky:

Zhruba polovina řešitelů kopírovala vzorák. Polovina zbytku využila tvrzení, že vzhledem k tomu, že jsou planety v konečné vzdálenosti od Slunce, z každé planety je vidět (ostře) méně než polovina libovolné hlavní kružnice na povrchu Slunce. Z toho plyne, že z každé planety musí být viditelný nějaký bod každé hlavní kružnice (jinak by náhodně zvolený bod na kružnici byl v průměru vidět z méně než čtyř planet), což už snadno vede ke sporu. Celkově se však většinou jednalo o delší řešení, než byla ta, která postupovala podle vzoráku.

Zbývající čtvrtina řešení byla špatně. Zdaleka nejčastější chybou bylo, že si řešitel přidal do zadání nějaké další předpoklady. Typicky se jednalo o předpoklad, že se všechny planety nacházejí (přibližně) v jedné rovině, v několika případech i konkrétní vzdálenosti reálných planet od Slunce.

Nic takového ovšem v zadání nebylo, ač uznáváme, že k takové interpretaci formulace se Sluncem mohla mírně svádět.

Též bych chtěl připomenout, že řešení má být sepsáno tak, aby mu kdokoli, kdo ovládá příslušné matematické pojmy, bez obtíží porozuměl. U geometrických úloh řešených synteticky je často téměř nemožné napsat srozumitelné řešení bez náčrtku. Tato úloha byla z tohoto pravidla do jisté míry výjimkou, protože se dala vyřešit i s několika málo útvary. Přesto přišlo několik řešení, která zaváděla nová značení a používala různé projekce do roviny, které se špatně představují, aniž by k nim dodala jakýkoli obrázek. *(Viki Němeček)*

Úloha 5.

Ježibaba Zuzka dala princi Pepovi za úkol rozdělit pětiboký kolmý hranol na jehlany s podstavami v podstavách daného hranolu. Podaří se mu to a zachrání princeznu, nebo jí propadne hrdlem?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Ukážeme, že úkol splnit nelze.

Označme v výšku hranolu, S obsah podstavy a V objem hranolu. Potom tedy $V = S \cdot v$. Mějme několik vzájemně se nepřekrývajících jehlanů obsažených v hranolu s podstavami v podstavách hranolu. Jejich výšky označme $v_1, \ldots, v_n$, obsahy jejich podstav $S_1, \ldots, S_n$, a konečně objemy $V_1, \ldots, V_n$.

Výška každého jehlanu je maximálně v, a jelikož se jehlany nepřekrývají, je součet obsahů jejich podstav maximálně $2S$. Máme tedy

$$V_1+\cdots+V_n = \frac{S_1 \cdot v_i}{3}+\cdots+\frac{S_n \cdot v_n}{3} \leq \frac{S_1 \cdot v}{3}+\cdots+\frac{S_n \cdot v}{3} = \frac{1}{3}v(S_1+\cdots+S_n) \leq \frac{1}{3}v\cdot 2S = \frac{2}{3}V < V.$$

Tedy jehlany mají dohromady menší objem než hranol. Jelikož byla volba jehlanů libovolná, ukázali jsme, že hranol požadovaným způsobem rozdělit nelze.

Poznámky:
Většina řešení byla shodná se vzorovým. Ti, kteří tvrdili, že hranol rozdělit lze, si nejčastěji prostě nevšimli, že při jejich rozdělení jim kromě vyhovujících jehlanů zbylo z hranolu i něco navíc.

Imaginární bod si vysloužil řešitel, který svoje řešení sepsal jako velmi čtivou pohádku o princi Pepovi a ježibabě. V jeho příběhu ale Pepa vyhrál podvodem, a tak jsem nemohl udělit body a konec jeho příběhu musel přepsat podle pravdy... *(Tonda Češík)*

Úloha 6.

V prostoru se vznáší kružnice k a bod A mimo rovinu danou kružnicí k. Označme B kolmou projekci bodu A do dané roviny. Uvažme libovolný bod C kružnice k a kolmou projekci D bodu B na přímku AC. Ukažte, že existuje kružnice l taková, že nezávisle na volbě bodu C bude bod D ležet na l.

(Martin „E.T." Sýkora)

Řešení:
Pro začátek si povšimneme, že úhel ADB je pravý, proložíme-li tedy těmito třemi body rovinu, bod D bude ležet na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Bod D tedy bude vždy ležet na sféře, jejíž průměr je AB. Tuto sféru si označíme T. Střed kružnice k si označme S.

Řešení pomocí mocnosti ke sféře:
Trojúhelníky ABC a ADB jsou si podobné (mají stejný úhel u A a pravý úhel u B, respektive D), proto

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

a tedy $|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$. Zvolme pevně bod C_0 na k a jemu příslušný bod na AC_0 označme D_0. Uvažme nyní sféru U, která obsahuje kružnici k a bod D_0 (taková určitě existuje). Označme E průnik této sféry a přímky AC (různý od C, nejedná-li se o tečnu). Potom z mocnosti k sféře[2] U vyplývá, že pro libovolný bod C z k platí

$$|AC| \cdot |AE| = |AC_0| \cdot |AD_0| = |AB|^2 = |AC| \cdot |AD|.$$

Bod D_0 leží na polopřímce AC_0, sféra U neobsahuje bod A, proto všechny body E leží na polopřímkách AC. Bod A neleží v rovině kružnice k, tedy $|AC| \neq 0$ a můžeme proto vydělit vztah $|AC|$. Dostaneme

$$|AE| = |AD|,$$

což spolu s faktem, že E a D leží ve stejné polopřímce AC dává, že $D = E$. Všechny body D tedy leží na průniku sfér U a T, který je neprázdný (obsahuje bod D_0), jedná se tedy o bod, nebo kružnici, čímž je úloha vyřešena.

Analytické řešení (podle Pavla Hudce):
Bez újmy na obecnosti kružnice k leží v rovině $[x, y, -2]$. Zvolme souřadnice bodu A jako $[0, 0, 0]$ a bodu B jako $[0, 0, -2]$. Sféra T je tedy jednotková se středem v $[0, 0, -1]$ a je zadána rovnicí $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$, kterou upravíme na tvar

$$x^2 + y^2 = -z^2 - 2z.$$

[2] Mocnost ke sféře je pojem analogický mocnosti ke kružnici – pro libovolný bod X a libovolnou sféru U platí, že pokud bodem X povedeme přímku ℓ protínající U v bodech Y a Z, bude hodnota $|XY| \cdot |XZ|$ vždy stejná nezávisle na volbě ℓ. To lze jednoduše nahlédnout: Vezměme si kterékoliv dvě přímky ℓ_1 a ℓ_2 procházející X. Průsečík U a roviny určené ℓ_1 a ℓ_2 je kružnice, takže v této rovině stačí aplikovat mocnost bodu X k této kružnici.

Průnik kuželové plochy tvořené přímkami AC a roviny $[x, y, z]$ pro fixní z bude kružnice. Její poloměr i souřadnice jejího středu se mění lineárně v závislosti na z, navíc pro $z = 0$ je tento poloměr 0 a střed je $[0, 0, 0]$. Kružnice se tak dá vyjádřit rovnicí

$$(x - lz)^2 + (y - mz)^2 = (nz)^2,$$

kde parametry l, m, n jsou konstantní (tedy nezávisí na x, y ani z). Tento vztah tak platí pro každý bod kuželové plochy, neboť každý její bod leží na nějaké takové kružnici. Protože bod D ze zadání leží na průniku T a kuželové plochy, musí pro něj platit oba odvozené vztahy. Proto je můžeme odečíst a upravit, dostaneme

$$(-2lx - 2my + (l^2 + m^2 - n^2 - 1)z)z = 2z.$$

Víme, že nikdy nedostaneme postupem ze zadání bod D, který by měl třetí souřadnici nulovou, můžeme proto obě strany vydělit číslem z. Rovnice

$$-2lx - 2my + (l^2 + m^2 - n^2 - 1)z = 2$$

určuje rovinu[3], pokud tedy z omezíme na interval $[-2, 0)$, všechny body splňující tento vztah leží v jedné rovině. Jejich množina je tedy průnik této roviny se sférou K, což může být prázdná množina, bod, nebo kružnice. Víme, že prázdná není, takže je to bod, nebo kružnice. Všechny možné body D tedy leží na jedné kružnici.

POZNÁMKY:
Na úloze si mnozí řešitelé vylámali zuby kvůli třetímu rozměru – šikmý kužel s vrcholem A a podstavou k totiž často nefunguje tak, jak bychom očekávali (například osa tohoto kužele není AS; řez kolmý na AS ani na osu obecně není kružnice, ale elipsa). Ač se o to dost lidí pokoušelo, nikomu se přes podobnost trojúhelníků nepodařilo dokázat, že jsou si kužely (A, k) a (A, l) podobné. Muselo by se totiž ukázat, že páry trojúhelníků na jednotlivých řezech kužele jsou si podobné se stejným koeficientem. V tomto případě skutečně bylo snazší ukázat, že body D leží v průniku dvou sfér než že leží v jedné rovině.

Kromě zde uvedených řešení bylo možné úlohu vyřešit pomocí stereografické projekce nebo sférické inverze. Stereografická projekce je zobrazení, které má mimo jiné tu vlastnost, že *vzorem* každé kružnice v rovině je kružnice na sféře. Tato vlastnost ale není zřejmá a nepovažuje se za obecně známou, je proto potřeba ji dokázat či se na příslušný důkaz odkázat. Sférická inverze je obdoba kruhové inverze ve třech rozměrech, která má velmi podobné vlastnosti, zde se použila inverze podle sféry se středem A a poloměrem AB.

Zcela správná řešení se nakonec sešla čtyři, jedno analytické, dvě využívající sférickou inverzi a jedno pomocí stereografické projekce. První tři si vysloužila imaginární bod, neboť byla elegantní, ačkoliv postupovala zcela odlišně od námi zamýšleného vzorového řešení. :) *(Anička Doležalová)*

Úloha 7.

Mějme dánu sféru[4] a body A, B, C a D takové, že každá z úseček AB, BC, CD, DA se dané sféry dotýká. Dokažte, že tyto čtyři body dotyku leží v jedné rovině.

(David Hruška)

[3] Skutečně se nikdy nestane, že by koeficienty u všech tří souřadnic byly nulové; pokud $l = m = 0$, pak u z je koeficient $-n^2 - 1$, který je záporný.

[4] Sféra se středem v bodě S a poloměrem r je množina bodů v prostoru, které mají od S vzdálenost r.

Řešení:
Nechť K, L, M, N jsou postupně body dotyku úseček AB, BC, CD, resp. DA se sférou. Platí, že všechny tečny ke sféře z bodu mimo ni jsou stejně dlouhé, tudíž máme následující rovnosti:

$$|AN| = |AK|,\ |BK| = |BL|,\ |CL| = |CM|,\ |DM| = |DN|.$$

Řešení pomocí Menelaovy věty:
Body A, C, K, L leží na přímkách BA, BC, tedy v jedné rovině. Analogicky leží A, C, M, N také v jedné rovině. Nejprve předpokládejme, že ani jedna z přímek KL, MN není rovnoběžná s AC. Nechť X, Y jsou průsečíky přímky AC s KL, MN. Použijeme-li Menelaovu větu na přímku KL a trojúhelník ABC v kombinaci s rovností tečen z bodu B, dostaneme:

$$\frac{|XA||KB||LC|}{|XC||KA||LB|} = 1 \Rightarrow \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|KA||LB|}{|KB||LC|} = \frac{|KA|}{|LC|}\,.$$

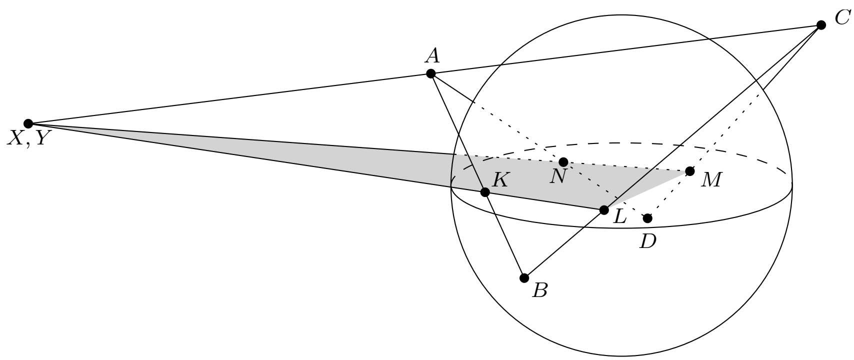
Analogicky použijeme Menelaovu větu na přímku MN a trojúhelník ADC:

$$\frac{|YA||ND||MC|}{|YC||NA||MD|} = 1 \Rightarrow \frac{|YA|}{|YC|} = \frac{|NA||MD|}{|ND||MC|} = \frac{|NA|}{|MC|}\,.$$

Nakonec tyto výsledky porovnáme:

$$\frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|KA|}{|LC|} = \frac{|NA|}{|MC|} = \frac{|YA|}{|YC|}\,.$$

Navíc oba body X, Y leží mimo úsečku AC, a proto se jedná o tentýž bod, což dává, že KL a MN mají průsečík, tudíž body K, L, M, N leží v jedné rovině.



Analytické řešení:
BÚNO předpokládejme, že rovina $z = 0$ obsahuje K, L, M. Nechť pro bod T značí z_T a P_T postupně z-ovou souřadnici bodu T a projekci bodu T na rovinu $z = 0$.

Leží-li A v rovině $z = 0$, pak tam leží i B, C, D a úloha je triviální. Předpokládejme tedy, že z_A je kladné, pak z_B je záporné, z_C je kladné a z_D je záporné. Rovina $z = 0$ tedy protne úsečku AD ve vnitřním bodě, který označíme H. Chceme ukázat, že H je N. K tomu stačí, aby H, N dělily úsečku AC ve stejném poměru. Přímky AP_A, BP_B jsou kolmé na rovinu $z = 0$, a proto jsou navzájem rovnoběžné, což nám dává:

$$\triangle AP_AK \sim \triangle BP_BK \Rightarrow \frac{|AP_A|}{|BP_B|} = \frac{|AK|}{|BK|}\,.$$

Analogicky

$$\frac{|BP_B|}{|CP_C|} = \frac{|BL|}{|CL|}, \frac{|CP_C|}{|DP_D|} = \frac{|CM|}{|DM|}, \frac{|DP_D|}{|AP_A|} = \frac{|DH|}{|AH|}.$$

Nyní stačí kombinovat předchozí výsledky:

$$\frac{|DH|}{|AH|} = \frac{|DP_D|}{|AP_A|} = \frac{|DP_D||CP_C||BP_B|}{|CP_C||BP_B||AP_A|} = \frac{|DM||CL||BK|}{|CM||BL||AK|} = \frac{|DM|}{|AK|} = \frac{|DN|}{|AN|}.$$

Poznámky:

Úloha se ukázala být těžší, než jsem čekal. Většina správných řešení postupovala podle druhého vzorového řešení, které znázorňuje častou techniku při práci se stereometrickými úlohami, a to se snažit promítat konfiguraci do vhodné roviny, kde už máme více zkušeností a lepší intuici. První řešení je sice trikovější, demonstruje však použití Menelaovy věty, kterou se hodí znát, obzvlášť v úloze s tečnami, neboť ty mají stejnou délku a ve výsledném vzorci se pokrátí.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

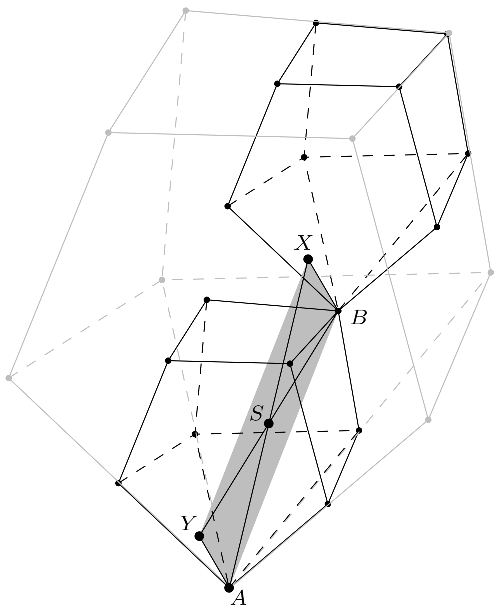
Úloha 8.

Mějme konvexní mnohostěn s devíti vrcholy. Zvolíme jeden jeho vrchol a mnohostěn osmkrát posuneme tak, že při každém posunutí se tento vrchol přesune do nějakého jiného vrcholu zadaného tělesa. Rozhodněte, zda nějaké dva ze vzniklých devíti shodných mnohostěnů musí mít průnik s nenulovým objemem.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme si náš mnohostěn jako $\mathcal{M}$ a náš „základní“ vrchol jako A. Buď $\mathcal{N}$ mnohostěn, který vznikne stejnolehlostí se středem v A a koeficientem 2. Ukážeme, že každý z našich posunutých mnohostěnů (a také ten původní) je celý v $\mathcal{N}$. Pak už jednoduše dostaneme, že nějaké dva mají průnik s nenulovým objemem: Pokud je objem $\mathcal{M}$ roven V, pak objem $\mathcal{N}$ je $2^3V = 8V$, takže uvnitř něj nemůže ležet devět mnohostěnů s objemem V, kde průnik každých dvou má nulový objem.



Nyní nechť bod X leží uvnitř mnohostěnu, který vznikl z $\mathcal{M}$ posunutím A do nějakého vrcholu B. Označme jako Y bod v $\mathcal{M}$, který se v tomto posunutí zobrazil na X. Takže BX je jen posunutá úsečka AY, tedy $AYXB$ je rovnoběžník. V rovnoběžníku se úhlopříčky půlí, takže střed S úsečky AX leží na úsečce BY (dokonce se jedná o její střed). Protože $\mathcal{M}$ je konvexní a B i Y leží v $\mathcal{M}$, leží i střed BY v $\mathcal{M}$. Tedy S leží v $\mathcal{M}$. Ale při popsané stejnolehlosti se S zobrazí na X. Takže X leží v $\mathcal{N}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Řešení se sešlo vcelku málo. Všechna správná postupovala dle vzorové myšlenky, ale dvě třetiny z nich namísto uvažování rovnoběžností a půlení úhlopříček pracovaly s vektory.

(Rado van Švarc)