Kombinatorické počítání

2. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Štěpán vytvořil posloupnost cifer tak, že za sebe napsal čísla $1, 2, 3, \ldots, 99$ v tomto pořadí. Pak náhodně ukázal na jednu z osmiček. Jaká je pravděpodobnost, že oba její sousedé jsou čtyřky?

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:

Ve Štěpánově posloupnosti je dohromady dvacet osmiček. Deset se jich nachází na místě jednotek. To jsou čísla 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98. Zbylých deset je na místě desítek v číslech 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89. Z dvaceti osmiček sousedí se čtyřkou osmičky v číslech 48 a 84, se dvěma čtyřkami pouze jedna osmička, a to ta v čísle 48. Pravděpodobnost, že na ní Štěpán ukáže, je proto $\frac{1}{20}$.

Poznámky:

Většina řešitelů úlohu zdárně vyřešila. Nejčastější chyby vznikaly při určení celkového počtu osmiček v posloupnosti, například z čísla 88 byla občas započtena pouze jedna osmička.

(Zuzana Svobodová)

Úloha 2.

Napište na stěny dvou šestistěnných kostek přirozená čísla tak, aby při všech možných hodech byl součet padlých čísel mezi 2 a 13 (včetně) a aby všechny tyto součty padaly stejně často.

(Honza)

Řešení:

Mějme kostky s čísly $(1, 1, 1, 7, 7, 7)$ a $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Ověříme, že takové kostky splňují zadání. Na první kostce padne každé z čísel 1 a 7 se stejnou pravděpodobností, a to $\frac{1}{2}$. Pokud padla jednička, můžeme dostat pouze součty 2 až 7, každý s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, protože čísla na druhé kostce jsou různá. Podobně pokud padne na první kostce 7, výsledné součty budou 8 až 13, také každý s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Z toho už vidíme, že každý ze součtů 2 až 13 padne stejně často, konkrétně s pravděpodobností $\frac{1}{12}$.

Jak se na to přijde:

Přestože u této úlohy stačilo na plný počet bodů řešení podobné tomu výše uvedenému, rádi bychom zde uvedli ještě pár nápadů a postupů, které se při hledání řešení hodily. Aby byla pravděpodobnost všech součtů stejná, musí každý z nich padnout právě ve 3 z 36 možných hodů. Další důležité pozorování je, že součet 2 můžeme dostat jen jako $2 = 1 + 1$ a pokud chceme, aby padl právě třikrát, musíme na jednu z kostek dát tři *jedničky* a na druhou jednu *jedničku*.

Poslední potřebné pozorování je, že na druhé kostce musí být různá čísla, protože jinak by nám spolu s jedničkami z první kostky některý ze součtů padl ve více než třech případech. Když následně vyzkoušíme obyčejnou hrací kostku a doplníme na první kostku tři *sedmičky*, najdeme výše uvedené řešení. Další možná řešení jsou třeba dvojice kostek $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ a $(1, 3, 5, 7, 9, 11)$; $(1, 1, 1, 3, 3, 3)$ a $(1, 2, 5, 6, 9, 10)$ nebo $(1, 1, 1, 4, 4, 4)$ a $(1, 2, 3, 7, 8, 9)$.

Poznámky:
U úloh, jako je tato, **nevyžadujeme** postup řešení, ale je potřeba nějak **zdůvodnit**, že nalezené řešení funguje. Na plný počet bodů proto stačilo řešení obsahující jen čísla na kostkách a nějaké zdůvodnění správnosti. Jedno z možných zdůvodnění je napsané ve vzorovém řešení, ale v tomto případě by stačilo i zdůvodnit správnost vypsáním všech 36 možných hodů a ukázáním, že každý součet se vyskytuje stejně často.

Několik řešitelů zadání pochopilo tak, že nemusí jako součty padat **všechna** čísla od 2 od 13, ale stačí jen když bude každý součet padat stejně často. Taková interpretace zadání ale není správná, takže jsem za ni nedával ani bod. *(Michal Töpfer)*

Úloha 3.

Kuba zapomněl svůj PIN. Samozřejmě ví, že je složený ze čtyř číslic. Jinak si ale vzpomíná jen na to, že součet cifer je dělitelný třemi. Kolik kombinací musí v nejhorším případě vyzkoušet?

(David Hruška)

Řešení:
Na jednotlivé čtyřmístné PINy se můžeme dívat jako na čísla od 0 do 9999 s tím, že nuly na začátku PINu ignorujeme, protože ciferný součet nemění. Přirozené číslo má přitom ciferný součet dělitelný třemi právě tehdy, když je třemi dělitelné. Stačí tedy spočítat, kolik čísel od 0 do 9999 je dělitelných třemi. Dělitelné třemi je zřejmě každé třetí číslo. V rozmezí od 1 do 9999 je takových čísel přesně třetina, tedy 3333. Navíc je třemi dělitelná i nula, takže PIN 0000 dává ještě jednu možnou kombinaci. V nejhorším případě tedy Kuba musí vyzkoušet 3334 možností.

Poznámky:
Skoro všichni řešitelé postupovali obdobně jako ve vzorovém řešení. Složitější postupy s počítáním kombinací podle zbytku po dělení třemi u poslední cifry většinou také, i když o trochu pracněji, vedly k cíli. Dost častým problémem bylo tvrzení, že nula není dělitelná třemi, které vedlo k jedné chybějící kombinaci. Pár řešitelů si čtyřmístný PIN vyložilo jako čtyřmístné číslo a varianty 0000 až 0999 ignorovali. Za obě tyto chyby jsem jeden bod strhávala.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 4.

Kolika způsoby lze na šachovnici 9×9 obarvenou klasickým způsobem rozmístit devět věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly a všechny stály na stejné barvě?

(Marian Poljak)

Řešení:
Nejprve očíslujeme řádky a sloupce čísly od 1 do 9. Poté bez újmy na obecnosti obarvíme šachovnici tak, že rohová pole jsou černá. Jinak řečeno, pole o souřadnicích $[x, y]$ je černé právě tehdy, když je $x + y$ sudé číslo. Věže se přitom nebudou ohrožovat právě tehdy, když bude v každém řádku i v každém sloupci přesně jedna věž. Nyní rozlišíme dva případy.

(1) Věže rozmístíme na černá políčka. Věže v lichých řádcích proto musí ležet v lichých sloupcích a věže v sudých řádcích musí ležet v sudých sloupcích. Jelikož se tyto dvě skupiny věží zřejmě vzájemně neohrožují, můžeme určit počty rozmístění v každé z nich zvlášť a poté je jen vynásobit. Počet rozmístění věží v lichých řádcích je roven počtu permutací množiny $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, tedy 5!. Jinak řečeno, v prvním řádku máme pět možností, kam věž umístit (všechny liché sloupce). V druhém řádku máme již pouze čtyři možnosti, jelikož v jednom z lichých sloupců již věž stojí. A tak dále. Počet možností rozmístění věží v lichých řádcích je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, což značíme jako 5! a čteme „pět faktoriál“. Obdobně počet rozmístění věží v sudých řádcích je 4!. Celkový počet možných rozmístění je $5! \cdot 4! = 2880$.

(2) Věže rozmístíme na bílá políčka. Věže v lichých řádcích musí ležet v sudých sloupcích a navíc musí v každém řádku být právě jedna věž. Lichých řádků je pět, ale sudé sloupce jsou

pouze čtyři, tedy z Dirichletova principu plyne, že alespoň dvě věže budou ležet ve stejném sloupci a budou se ohrožovat. V tomto případě proto vyhovující rozmístění neexistuje.

Věže lze rozmístit 2880 různými způsoby.

Poznámky:
Většina řešitelů vyřešila úlohu správně. Nejčastější chybou byla nedostatečná argumentace neexistence rozmístění věží na druhé barvě či tvrzení, že počet řešení je na obou barvách stejný. Za tato řešení jsem obvykle uděloval 3 body. Několik řešitelů počítalo otočená rozestavení za shodná. Jejich postup byl však naprosto v pořádku, proto jsem nestrhával žádné body.

(Lucien Šíma)

Úloha 5.

Dva prváci Pavel a Filip se zúčastnili šachového turnaje druháků. V turnaji hrál každý s každým právě jednou. Za každou výhru dostal hráč jeden bod a za prohru žádný. V případě remízy dostali oba hráči po půlbodu. Turnaj dopadl tak, že druháci měli všichni stejně bodů a Filip s Pavlem měli dohromady osm bodů. Kolik druháků se mohlo zúčastnit turnaje?

(Marian Poljak)

Řešení:
Označme počet druháků n. Pak počet všech odehraných zápasů je $(n+1)+n+\cdots+1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$. Počet odehraných zápasů je roven počtu bodů ze zadání, tedy počet půlbodů je n^2+3n+2. Z celkového počtu bodů mají prváci 8 bodů, tedy 16 půlbodů. Druhákům zůstane na rozdělení mezi sebe $n^2+3n+2-16 = n^2+3n-14$ půlbodů. Ze zadání víme, že každý druhák získal stejný počet bodů, tento počet proto musí být dělitelný počtem druháků, tzn. n. Protože n dělí n^2+3n, musí dělit i 14, proto $n \in \{1, 2, 7, 14\}$. Pro $n = 1$ a $n = 2$ bude počet všech bodů menší než osm, což je ve sporu s tím, že Filip a Pavel získali dohromady osm bodů.

Ukážeme, že turnaj se 7 nebo 14 druháky je možný. Pro $n = 7$ mohli například všichni druháci remizovat mezi sebou, každý z nich mohl vyhrát nad Filipem a prohrát s Pavlem. Odehrálo se $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ partií, kde $36 - 8 = 28$ bodů rozdělíme mezi 7 druháků, tedy každý druhák získal čtyři body. Pro $n = 14$ mohli například všichni druháci remizovat mezi sebou, každý z nich mohl vyhrát nad Filipem a remizovat s Pavlem. Odehrálo se $\frac{16\cdot 15}{2} = 120$ partií, kde $120 - 8 = 112$ bodů rozdělíme mezi 14 druháků, tedy každý druhák získal osm bodů.

Poznámky:
S úlohou si většina řešitelů poradila. Spousta z vás však zapomněla uvést nějakou konstrukci, jak mohl turnaj probíhat, za což jsem strhávala jeden bod. Řešitelům, kteří pouze uhodli jedno z řešení a v jejich řešení se nevyskytoval ani náznak důkazu, jsem body neudělovala.

(Adéla Kostelecká)

Úloha 6.

Verča si do sešitu vypsala všechny uspořádané dvojice (A, B) podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2017\}$. Následně si pro každou takovou dvojici zapsala velikost množiny $A \cap B$ a všechny tyto velikosti sečetla. Kolik jí vyšlo?

(David Hruška)

První řešení:
Verča mohla to samé číslo získat i následujícím způsobem: pro každé z čísel $1, 2, \ldots, 2017$ si mohla zapsat počet dvojic (A, B) takových, že dané číslo leží v $A \cap B$, a všechny tyto počty sečíst.

Zvolme tedy pevné číslo $x \in \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Existuje právě 2^{2016} množin $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$ takových, že $x \in A$. Pro každé z 2016 čísel různých od x máme totiž dvě možnosti: buď v množině A bude, nebo ne. Stejně tak existuje 2^{2016} množin $B \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$, pro něž je $x \in B$. Jelikož všechny uspořádané dvojice (A, B) takové, že $x \in A \cap B$, dostaneme nezávislou volbou množiny A obsahující x a množiny B obsahující x, je počet těchto dvojic $2^{2016} \cdot 2^{2016} = 4^{2016}$. Jelikož tento počet nezávisí na x a Verča sčítá takové počty za všech 2017 možných x, vyjde jí součet $2017 \cdot 4^{2016}$.

Druhé řešení:

Označme $M = \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Pro množinu $A \subseteq M$ budeme její doplněk značit A^c, tj. $A^c = M \setminus A$. Uvažujme dvojici (A, B) podmnožin množiny M. Potom čtyři množiny $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ jsou po dvou disjunktní[1] a jejich sjednocením je M. Proto

$$|A \cap B| + |A \cap B^c| + |A^c \cap B| + |A^c \cap B^c| = 2017.$$

Všechny uspořádané dvojice podmnožin množiny M si rozdělíme do (neuspořádaných) čtveřic $\{(A, B); (A, B^c); (A^c, B); (A^c, B^c)\}$. Jelikož dvojic je $\left(2^{2017}\right)^2$ a každá čtveřice dvojic přispěje do součtu dohromady číslem 2017, dostáváme, že součet je

$$\frac{2017 \cdot \left(2^{2017}\right)^2}{4} = 2017 \cdot 4^{2016}.$$

Poznámky:

Úloha se dala řešit mnoha různými způsoby. Mezi došlými řešeními byla pestrá směs prvního a druhého způsobu řešení a pak dalších více či méně náročných počítání se sumami.

Několik řešitelů zmátl pojem *uspořádaná dvojice* (A, B) a vylučovali případ $A = B$, ačkoli ho zadání nezakazuje.

Na závěr bych se chtěl za organizátory omluvit – v papírové verzi zadání došlo k tiskové chybě a vyskytlo se tam $A \setminus B$ místo $A \cap B$. Naštěstí to nemělo na povahu ani obtížnost úlohy vliv (jak je dobře vidět z druhého řešení), a proto jsem řešení tohoto „alternativního“ zadání bodoval stejně.

(Tonda Češík)

Úloha 7.

Jinému Kubovi na zahrádce roste strom[2]*, který má ve svých 2017 vrcholech napsaná čísla 1 až 2017. Kuba přitom umí čarovat – když ukáže na nějakou hranu stromu, čísla v jejích vrcholech se prohodí. Jednoho dne se Kuba rozhodl postupně v nějakém pořadí ukázat na všechny hrany stromu (na každou právě jednou) a rozmyslel si, že v závislosti na zvoleném pořadí mu takto může nakonec vzniknout m různých očíslování. Kolik nejméně prvočíselných dělitelů počítaných včetně násobnosti*[3] *může mít m?*

(Jakub Löwit)

Řešení:

Ačkoli se v úloze mluví o prvočíslech, série je na téma kombinatorické počítání. Pojďme tedy spočítat, kolik možných očíslování Kubovi mohlo vyjít. Každý strom na aspoň dvou vrcholech lze sestavit tak, že začneme s jednou hranou a k ní postupně přilepujeme listy. Buď $\mathcal{T}$ strom s alespoň dvěma vrcholy. Napojme na nějaký jeho vrchol v s $S \geq 1$ sousedy nový list u. Jak se zvětší počet různých očíslování tohoto nového stromu $\mathcal{T}'$ oproti tomu předchozímu?

Ať už Kuba na hrany $\mathcal{T}$ ukazoval v jakémkoli pořadí, ve vrcholu v se vystřídalo $S + 1$ čísel – jedno tam bylo na začátku a zbylých S se tam dostalo vždy po tom, co Kuba ukázal na patřičnou hranu sousedící s v. Tato čísla musí být po dvou různá; pokud by se nějaké číslo dostalo do téhož vrcholu dvakrát, muselo by mezitím obkroužit cyklus, jenže ten ve stromu není.

[1] Žádné dvě z nich nemají společný prvek.

[2] Viz http://mks.mff.cuni.cz/archive/34/serial.pdf, kapitola *Stromy*.

[3] Tedy například u 12 bychom získali tři – jednu trojku a dvě dvojky.

Po přidání listu u se ptáme, jak se výsledné očíslování původních vrcholů stromu změní v závislosti na tom, kdy Kuba ukáže na hranu uv. Ve chvíli, kdy Kuba ukáže na tuto hranu, se číslo, které je zrovna ve vrcholu v, vymění s číslem, jež je již od začátku v u. Číslo z vrcholu v pak už zůstane navždy v listu u, číslo z vrcholu u ho naopak „zastoupí" v dalším prohazování. Výsledné očíslování $\mathcal{T}'$ proto bude stejné jako pro původní strom $\mathcal{T}$ až na to, že číslo, které ve chvíli, když Kuba ukázal na hranu uv, bylo ve vrcholu v, se vymění s číslem, které začínalo v u. Původní očíslování se tedy může změnit $S+1$ způsoby v závislosti na tom, které číslo bude zrovna ve v, když Kuba ukáže na hranu uv.

Ještě si všimněme, že dvě různá pořadí hran vedoucí k různým výsledným očíslováním stromu $\mathcal{T}$ nemohou po přilepení listu vést k stejnému očíslování. Platí to proto, že z očíslování nového stromu lze jednoznačně vyvodit, jak by očíslování dopadlo, kdyby Kuba nevyužil hranu uv. Z předchozího plyne, že po přidání listu se počet různých očíslování zvětší $(S+1)$-krát.

Nyní můžeme induktivně snadno nahlédnout, že celkový počet různých očíslování je součin faktoriálů z počtů sousedů všech vrcholů, a pak už příklad přímočaře dokončíme. To ale ani není potřeba; je-li strom hrana, je odpovídající počet prvočíselných dělitelů počtu různých očíslování nula. Dále přidáním listu ke stromu se počet prvočíselných dělitelů zvýší alespoň o jedna. Kubův strom má 2017 vrcholů, odpovídající počet tedy musí být alespoň 2015. Tohoto čísla naopak dosáhneme s cestou, neboť ta má různých očíslování 2^{2015}, což je číslo s 2015 prvočíselnými děliteli.

Volně podle Michala Beránka, Ondřeje Tkaczyszyna a Matěje Doležálka:
Ukážeme si ještě jiný pohled, ze kterého vyplyne, kde se vzal onen záhadný součin faktoriálů počtů sousedů všech vrcholů.

Tvrdíme, že umíme odvodit výsledek libovolné posloupnosti Kubových magických operací jen za předpokladu, že pro každý vrchol víme, v jakém pořadí Kuba prohazoval hrany sousedící s tímto vrcholem. Navíc pro každé dané podmínky na pořadí hran kolem každého vrcholu existuje nějaká posloupnost operací, která tyto podmínky splňuje. Z toho už plyne ona podivná formule, neboť pro každý vrchol v je počet možností, jak seřadit hrany s ním sousedící, právě faktoriál z počtu jeho sousedů.

Mějme tedy nějakou možnou posloupnost Kubových operací a pro každý vrchol si označme tu z jeho sousedních hran, kterou Kuba použil jako první. Protože vrcholů stromu je o jedna více než jeho hran, nějakou hranu jsme označili pro oba sousední vrcholy. To znamená, že nezávisle na tom, v jakém pořadí se Kuba díval na hrany, platí, že když Kuba ukázal na tuto hranu, na obou jejích koncích byla stále stejná čísla jako na začátku. Prohoďme tedy tato dvě čísla a umažme tuto hranu našeho stromu, který se tak rozpadne na dva menší stromy. Na těch nyní můžeme pokračovat úplně stejným způsobem, čímž nakonec dostáváme nějakou posloupnost operací. Vzhledem k jednoznačnosti našich rozhodnutí musí všechny posloupnosti operací, které splňují stejnou podmínku, dopadnout stejně.

Poznámky:
Většina řešitelů se vydala přímočarou cestou prvního vzorového řešení. *Michal Beránek* a *Ondřej Tkaczyszyn* si vysloužili imaginární bod za to, že výrazu *součin faktoriálů počtu sousedů všech vrcholů* dali kombinatorický význam. *Matěj Doležálek* nahlédl, že permutace vrcholů stromu je složena jen z jednoho cyklu, který odpovídá tzv. eulerovské procházce na stromě.

Cesta není jediný strom, pro který nastává rovnost. Zkus najít všechny!

(Vašek Rozhoň)

Úloha 8.

Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost celých čísel, která pro každé přirozené n splňuje $\sum_{d|n} a_d = 2017^n$. Ukažte, že $n \mid a_n$ pro každé přirozené n.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Buď A_n množina všech různých nakreslení náhrdelníků s n korálky obarvenými 2017 barvami, jejichž obarvení se neopakuje s žádnou periodou kratší než 2017. Dvě nakreslení, která se liší pootočením, považujeme za různá. Za chvíli induktivně ukážeme, že čísla a_n jsou jednoznačně určena jako $a_n = |A_n|$. Z toho už bude plynout $n \mid |A_n|$, poněvadž všechna nakreslení náhrdelníků z A_n umíme rozdělit do skupin po n členech – do jedné skupiny dáme všech n různých pootočení jednoho náhrdelníku.

Pro $n = 1$ musí z podmínky ze zadání platit $a_1 = 2017$. To přesně odpovídá počtu obarvení jednoho korálku pomocí 2017 barev. A protože náhrdelník o jednom korálku nejde netriviálně otáčet, je skutečně $2017 = |A_n|$.

Nyní nechť $a_m = |A_m|$ platí pro všechna $m < n$. Pak tento vztah dokážeme i pro n. Uvažujme nakreslení libovolného náhrdelníku s n korálky. Nechť B_i je množina takových nakreslení, kde nejmenší netriviální otočení, které obrázek nezmění, otáčí náhrdelník právě o i pozic. Tedy v B_i jsou ty obrázky náhrdelníků, které obsahují opakující se sekvenci i korálků, ale žádnou kratší. Pokud $i \nmid n$, je zřejmě $|B_i| = 0$. Zjevně přitom $|A_n| = |B_n|$.

Protože celkově u každého kamínku máme na výběr z 2017 barev a každý náhrdelník lze o několik (maximálně n) pozic otočit tak, aby se přenesl sám na sebe, platí

$$\sum_{d|n} |B_d| = 2017^n.$$

Nyní nahlédneme, že je ve skutečnosti $|A_d| = |B_d|$. V B_d jsou právě obrázky náhrdelníků s periodou d korálků, tedy vyříznutím části o d korálcích a jejím spojením do kruhu dostaneme jeden z obrázků z A_d. Pozice řezu v rámci periody délky d přitom určuje, který z d obrázků zmenšeného d-korálkového náhrdelníčku dostaneme. Na druhou stranu, vezmeme-li $\frac{n}{d}$ kopií stejného obrázku z A_d, rozdělíme je na stejném místě a spojíme za sebe, dostaneme zjevně obrázek náhrdelníku z B_d. Různá místa rozdělení náhrdelníčku, kterých je d, přesně odpovídají d různým nakreslením velkého náhrdelníku. Tím jsme pro libovolné $d \mid n$ našli bijekci mezi A_d a B_d, tedy pro taková d máme $|A_d| = |B_d|$.

Z předešlého tedy máme $\sum_{d|n} |A_d| = 2017^n = \sum_{d|n} a_i$, přičemž pro všechna přirozená $d < n$ už z indukčního předpokladu platí rovnost $|A_d| = a_d$. Aby ale dokázaná rovnost platila, musí být také $|A_n| = a_n$, čímž je důkaz indukčního kroku dokončen.

Poznámky:

Nikoho nenapadlo řešit osmičku ze série Kombinatorické počítání kombinatorickým počítáním. Objevilo se však několik více či méně ošklivých řešení indukcí, zkoumáním dělitelnosti a v několika málo případech i Möbiovou inverzní formulí.

(Rado van Švarc)