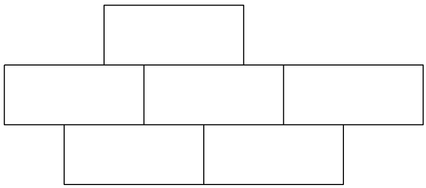
Obdélníky a čtverce

2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Viki si koupil šest shodných obdélníkových dlaždiček o obvodu 38 cm *a spojil je do jednoho obrazce znázorněného na obrázku. Jaký obvod má výsledný útvar?*



(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:
Všech šest dlaždiček má dohromady dvanáct delších a dvanáct kratších stran. Z obrázku je jasně vidět, že se vzájemně dotýkají třemi kratšími stranami. Dále se překrývají i třemi delšími stranami, neboť k prostřednímu řádku je shora přilepena jedna a zdola dvě dlaždičky. Každý dotek ale musíme uvážit dvakrát, protože zabírá stejnou délku na dvou dlaždičkách. Zbývá tedy $12 - 3 \cdot 2 = 6$ viditelných delších a stejný počet kratších stran dlaždiček. Protože obvod obdélníku o stranách a, b spočítáme jako $o = 2(a + b)$, je celkový obvod obrazce roven $3 \cdot 38 = 114$.

POZNÁMKY:
Úloha byla natolik jednoduchá, že nevyžadovala žádné podrobné vysvětlování. Výjimečně se někdo spletl v násobení či vzorečku pro obvod obdélníku, jinak jsem udělovala jen plné počty bodů.

(Bára Kociánová)

Úloha 2.

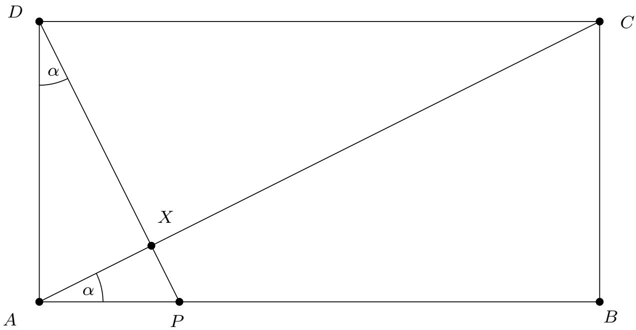
Obdélník $ABCD$ má strany o délkách $|AB| = 4$ a $|AD| = 2$. Na úsečce AB leží bod P tak, že $|AP| = 1$. Ukažte, že přímka DP je kolmá na AC.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:
Označme X průsečík AC a DP. Trojúhelníky ABC a DAP jsou podobné podle věty *sus*, protože $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{|AD|}{|AP|}$ a zároveň $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DAP|$. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ADP|$. U vrcholu A je v obdélníku pravý úhel, pomocí něhož vyjádříme velikost $|\sphericalangle CAD| = 90^\circ - \alpha$. Ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku AXD dopočítáme velikost úhlu AXD:

$$\alpha + (90^\circ - \alpha) + |\sphericalangle AXD| = 180^\circ,$$
$$|\sphericalangle AXD| = 90^\circ.$$

Přímka AC je tedy kolmá na přímku DP.



Poznámky:

Velká část řešitelů postupovala stejně nebo podobně jako vzorové řešení a ti si tím vysloužili plný počet bodů. Často opakovanou chybou, za kterou jsem ale body nestrhával, byl zápis podobnosti trojúhelníků. Vrcholy píšeme v tom pořadí, v jakém si odpovídají. Tedy v této úloze byl správně pouze zápis $\triangle ABC \sim \triangle DAP$, protože úhel u vrcholu A odpovídá úhlu u vrcholu D, úhel u B úhlu u A, úhel u C úhlu u P a podobně pro strany. Jiná pořadí zápisu vrcholů správně nejsou, například neplatí $\triangle ABC \sim \triangle APD$, protože úhly u vrcholu A se v obou trojúhelnících liší.

Také se sešlo mnoho řešení využívajících goniometrické funkce. Tento postup ale vetšinou není příliš dobrý, protože úhly nedokážeme spočítat přesně a musíme je zaokrouhlit. Přestože je součet zaokrouhlených úhlů roven $90°$, neznamená to nutně, že součet bude stejný pro velikostí nezaokrouhlených úhlů. Podobná řešení tedy většinou mnoho bodů nezískala. *(Michal Töpfer)*

Úloha 3.

V tabulce 8×8 je začerněno sedm políček. Najděte největší a takové, že v obrazci budeme vždy schopni najít nezačerněný obdélník[1] složený z alespoň a políček, ať už byla začerněná kterákoliv sedmice.

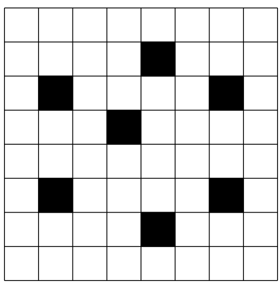
(Rado van Švarc)

Řešení:

Protože je začerněných políček sedm a tabulka má osm řádků, tak jeden ze sloupců je určitě prázdný. Tím dostáváme obdélník o obsahu 8.

Zároveň při začernění jako na obrázku nelze najít obdélník o větším obsahu, který neobsahuje začerněný čtvereček.

Proto je odpověď 8.



[1] Čtverec také považujeme za obdélník.

Poznámky:
Většina řešení byla víceméně jako řešení vzorové. Někteří k úloze přistupovali způsobem „které začernění bude zjevně nejhorší“. Žádné z takto „zjevně“ nejhorších začernění nejhorší nebylo.

(Rado van Švarc)

Úloha 4.

Uvnitř obdélníku $ABCD$ o obsahu S se nachází bod P. Ukažte, že

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq S.$$

(Rado van Švarc)

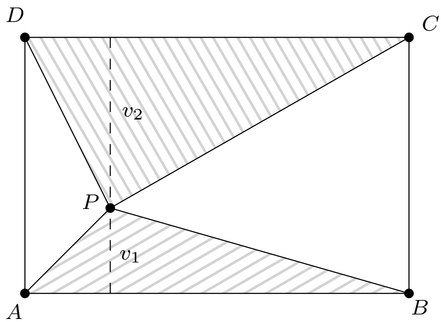
Řešení:
Nejprve si uvědomme, že součet obsahů trojúhelníků ABP a CDP je roven $S/2$: Označme v_1 výšku v trojúhelníku ABP na stranu AB a v_2 výšku v trojúhelníku CDP na stranu CD. Pak máme $v_1 + v_2 = |BC|$, a tedy

$$S_{ABP} + S_{CDP} = \frac{|AB| \cdot v_1}{2} + \frac{|CD| \cdot v_2}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{S}{2}.$$

Dále dokážeme nerovnosti $|PA| \cdot |PB| \geq 2S_{ABP}$ a $|PC| \cdot |PD| \geq 2S_{CDP}$. Platí, že výška v trojúhelníku není delší než strana, která s ní sdílí vrchol. Potom tedy, pokud v_{PA} je výška v trojúhelníku ABP na stranu PA, máme $S_{ABP} = |PA| \cdot v_{PA}/2 \leq |PA| \cdot |PB|/2$. Po vynásobení dvěma dostaneme první nerovnost. Druhá nerovnost je obdobná, stačí jen místo trojúhelníku ABP uvažovat trojúhelník CDP.

Nakonec tedy máme

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq 2S_{ABP} + 2S_{CDP} = 2 \cdot \frac{S}{2} = S.$$



Poznámky:
Sešlo se mnoho správných řešení. Velká část z nich používala stejný argument jako vzorové řešení (někdy s drobnou úpravou doplněním trojúhelníku ABP resp. CDP na rovnoběžník, aby se nemuselo dělit dvěma). Dále mnoho řešitelů argumentovalo podobně, ale o něco rychleji použitím následující vzorce. Platí $2S_{ABP} = |AP| \cdot |BP| \cdot \sin |\sphericalangle APB|$, pak stačí jen použít fakt $0 < \sin |\sphericalangle APB| \leq 1$.

Pár řešitelů se rozhodlo použít AG nerovnost, což je vcelku originální přístup k této úloze – jen někteří však tento postup dotáhli do úspěšného konce. *(Tonda Češík)*

Úloha 5.

Áďa našla konvexní mnohoúhelník M a délku h. Nad každou stranou mnohoúhelníku nakreslila obdélník s druhou stranou délky h, který je namířený dovnitř mnohoúhelníku. Všimla si, že součet obsahů všech těchto obdélníků je roven dvojnásobku obsahu M. Ukažte, že tyto obdélníky určitě pokrývají M.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Označme vrcholy mnohoúhelníku postupně X_1 až X_n, pak strany M jsou úsečky X_iX_{i+1} (indexy bereme modulo n, tedy vrcholem X_{n+1} myslíme X_1).

Pro spor předpokládejme, že existuje bod B, který není pokrytý žádným obdélníkem. Vezměme stranu X_iX_{i+1} nejblíže k B a uvažujme kolmici k z bodu B na X_iX_{i+1}, její patu označme P. Pokud by P neležela na úsečce X_iX_{i+1}, musela by k protnout další stranu, předtím než protne X_iX_{i+1}. To by ale znamenalo, že tato strana je k B blíže. Bod P proto leží na úsečce X_iX_{i+1}. Aby tedy B nebyl pokryt žádným obdélníkem, musí být vzdálen od nejbližší strany více než h.

Pro každou stranu X_iX_{i+1} a bod B vytvoříme trojúhelník $X_iX_{i+1}B$. Jelikož M je konvexní, pro žádná $i \neq j$ se $X_iX_{i+1}B$ a $X_jX_{j+1}B$ nepřekrývají. Navíc jsou uvnitř M a vyplňují plochu M.

Jestliže v_i je vzdálenost B a X_iX_{i+1} a S je obsah M, potom $\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i \cdot |X_iX_{i+1}|}{2} = S$, protože trojúhelníky $X_iX_{i+1}B$ vyplňují plochu M a obsah jednoho spočítáme jako polovina výšky krát strana. Pro každé i platí $v_i > h$, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h \cdot |X_iX_{i+1}|}{2} < \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i \cdot |X_iX_{i+1}|}{2} = S,$$

což je spor, ze zadání víme, že $\sum_{i=1}^{n} h \cdot |X_iX_{i+1}| = 2S$.

Poznámky:

Většina z vás úlohu zvládla a nejčastěji použila argument $v_i > h$ či jeho obdobu. Nepsali jste však pro tento argument tak podrobnou argumentaci, jako je v druhém odstavci vzorového řešení. Obešlo se to bez ztráty bodů, ale příště si dávejte pozor.

(Adéla Kostelecká)

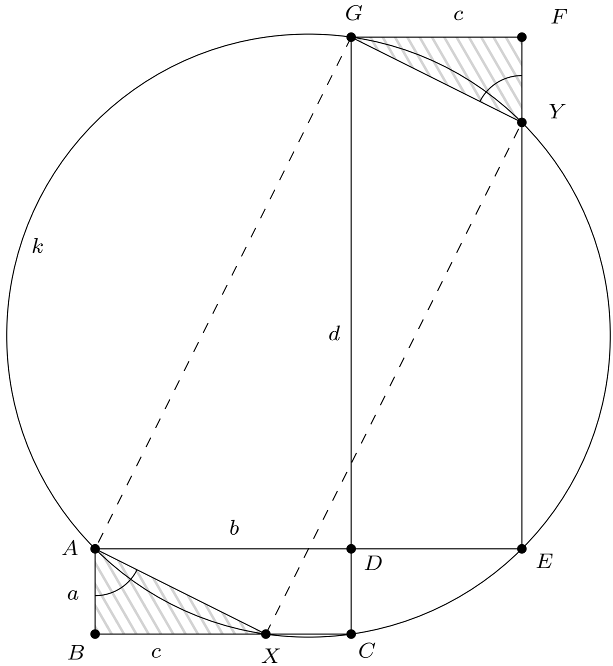
Úloha 6.

Honza si vyrobil dvojici obdélníků $ABCD$ a $DEFG$ takovou, že úsečky AE a CG obě procházejí bodem D a čtyřúhelník $ACEG$ je tětivový. Druhý průsečík úsečky BC s kružnicí opsanou čtyřúhelníku $ACEG$ nazveme X a druhý průsečík úsečky EF s toutéž kružnicí označíme Y. Ukažte, že obsah čtyřúhelníku $AXYG$ je roven součtu obsahů obdélníků $ABCD$ a $DEFG$.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Nejdříve ukážeme, že $AXYG$ je obdélník. Označíme kružnici opsanou šestiúhelníku $AXCEYG$ k. Protože $|\sphericalangle AEY| = |\sphericalangle DEF| = 90°$, je AY průměr kružnice k. Obdobně protože $|\sphericalangle XCG| = |\sphericalangle BCD| = 90°$, je XG také průměr kružnice k. Z toho vyplývá, že $|\sphericalangle GYX| = |\sphericalangle YXA| = |\sphericalangle XAG| = |\sphericalangle AGY| = 90°$, a tedy $AXYG$ je obdélník.



Nyní ukážeme, že trojúhelníky GFY a XBA jsou shodné. Platí, že $|\sphericalangle GFY| = |\sphericalangle XBA| = 90^\circ$. Dále jelikož platí $FY \parallel AB$ a $GY \parallel XA$, jsou také úhly $\sphericalangle XAB$ a $\sphericalangle GYF$ shodné. Tyto dva trojúhelníky mají dva úhly shodné, z čehož plyne, že jsou podobné. Navíc mají jednu stranu stejně dlouhou ($AXYG$ je obdélník – takže $|GY| = |AX|$) a jsou proto i shodné.

Označíme si $|AB| = |DC| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|DE| = |GF| = c$, $|DG| = |EF| = d$ a obsahy obdélníku $AXYG$, $ABCD$ a $DEFG$ označme po řadě S_{AXYG}, S_{ABCD} a S_{DEFG}. Ze shodnosti trojúhelníků GFY a XBA víme, že $|AB| = |FY| = a$ a $|BX| = |GF| = c$. Protože ADG a GFY jsou pravoúhlé trojúhelníky, můžeme vyjádřit $|AG| = \sqrt{|AD|^2 + |DG|^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ a $|AX| = \sqrt{|AB|^2 + |BX|^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$. A poté postupnými úpravami:

$$\begin{aligned} S_{AXYG} &= |AG| \cdot |AX|, \\ S_{AXYG} &= \sqrt{b^2 + d^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}, \\ (S_{AXYG})^2 &= (b^2 + d^2) \cdot (a^2 + c^2), \\ (S_{AXYG})^2 &= b^2a^2 + d^2a^2 + b^2c^2 + d^2c^2. \end{aligned}$$

Z mocnosti bodu D ke kružnici k získáme:

$$bc = ad,$$

a po dosazení do předchozí rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} (S_{AXYG})^2 &= b^2a^2 + dabc + dabc + d^2c^2, \\ (S_{AXYG})^2 &= (ba + dc)^2, \\ S_{AXYG} &= (ba + dc), \\ S_{AXYG} &= S_{ABCD} + S_{DEFG}. \end{aligned}$$

A to jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Řešení se na šestou úlohu sešlo poměrně hodně, našlo se pár správných, krátkých a hezkých řešení, ale více dlouhých, složitých a ne vždy správných. Za důkaz, že $AXYG$ je obdélník, jsem dávala dva body, za dořešení úlohy pak zbylé tři. Několik řešitelů k úloze přistoupilo o trochu jinak: obdélníkům $ABCD$ a $DEFG$ opsali obdélník $BKFL$ a zjistili, že součet obsahů trojúhelníků XKY a ALG je roven součtu obsahů obdélníků $KEDC$ a $LADG$. Tito řešitelé zpravidla získali plný počet bodů.

(„madam Verča" Hladíková)

Úloha 7.

V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AB a BC v bodech X a Y. Kružnice vepsaná trojúhelníku XBY se dotýká stran XB a BY v bodech P a Q. Tyto dvě kružnice vepsané se protínají v bodech R a S tak, že P, Q, R a S leží na kružnici v tomto pořadí. Ukažte, že $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když je poměr poloměrů těchto kružnic vepsaných roven $3:2$.

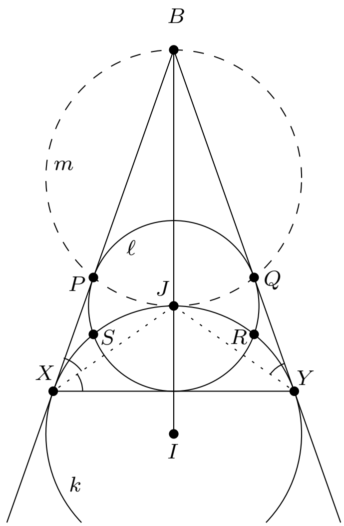
(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme kružnice vepsané ABC a XBY jako k a ℓ a jejich středy jako I a J. Protože k i ℓ jsou symetrické podle osy úhlu $\sphericalangle ABC$, je trojúhelník XBY rovnoramenný a platí $XY \parallel PQ \parallel SR$.

Protože J je střed kružnice vepsané trojúhelníku XBY, máme z rovnoramennosti trojúhelníka XBY rovnost $|\sphericalangle JXB| = |\sphericalangle JXY| = |\sphericalangle JYX|$. To ale díky úsekovým úhlům znamená, že BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku XJY. Analogicky musí být BY tečna k té samé kružnici, takže tato kružnice splývá s k. Tedy J leží na k.

Protože jsou úhly $\sphericalangle JPB$ a $\sphericalangle JQB$ pravé, leží P a Q na kružnici m nad průměrem JB. Protože středy m a k leží na ose úhlu $\sphericalangle XBY$ a na ní také leží bod J, dotýkají se kružnice k a m v J.

Ukážeme, že obě zkoumaná tvrzení (tj. že $PQRS$ je obdélník a že poměr poloměrů k a ℓ je $3:2$) jsou ekvivalentní tomu, že k a m jsou shodné kružnice. Potom už určitě budou ekvivalentní i sobě navzájem.



Protože $PQRS$ je tětivový lichoběžník (neboť jsme si již odvodili, že $PQ \parallel SR$), je to obdélník právě tehdy, když je symetrický podle J. Ale protože k a m jsou kružnice opsané trojúhelníkům PJQ a SJR, je $PQRS$ symetrický podle J, právě když jsou k a m symetrické podle J. Protože se ale v J dotýkají, je to ekvivalentní tomu, že jsou shodné, což jsme chtěli. Tedy $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když jsou k a m shodné.

Protože JB je průměr m a JI je poloměr k, jsou k a m shodné, právě když $\frac{|JI|}{|BJ|} = \frac{1}{2}$. Po přičtení jedničky dostáváme ekvivalenci s $\frac{|BI|}{|BJ|} = \frac{|BJ|+|JI|}{|BJ|} = \frac{3}{2}$. Kvůli pravým úhlům u P a X jsou trojúhelníky BPJ a BXI podobné, takže $\frac{|IX|}{|JP|} = \frac{|BI|}{|BJ|}$. Protože IX a JP jsou poloměry příslušných kružnic, získáváme skutečně, že m a k jsou shodné, právě když je poměr poloměrů k a ℓ roven $3:2$.

Poznámky:

Řešení se sešlo vcelku mnoho, ale často nebyla správně, protože opomíjela jednu z implikací. Ze správných řešení mnohá postupovala vyjádřením dvou délek (nejčastěji $|PQ|$ a $|SR|$) pomocí poloměrů daných kružnic (někdy vcelku pěkně, někdy pomocí mnoha a mnoha goniometrie) a prohlásila, že $PQRS$ je obdélník, právě když se tyto délky sobě rovnají, z čehož dostala ekvivalentními úpravami hledaný vztah pro poloměry. *(Rado van Švarc)*

Úloha 8.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE, DG a FI se protínají v jednom bodě.

(David Hruška)

Řešení pomocí kamarádů[2]:

Označme si O_A, O_B, O_C středy kružnic opsaných trojúhelníkům AEH, BDG a CFI. Bod O_A můžeme popsat jako průsečík os stran trojúhelníku AEH, tj. úseček AE, AH a HE. Podobně O_B je průsečíkem os úseček BD, BG a DG. Navíc osy úseček AE a BD jakožto osy protějších stran obdélníku splývají. Proto je úsečka O_AO_B rovnoběžná s AB. Podobně dokážeme i $O_AO_C \parallel AC$ a $O_BO_C \parallel BC$.

Nechť je P průsečík os úseček HE a DG. Dále si označme středy stran EA, HE a HA postupně R, S, T. Protože platí $|\sphericalangle ERO_A| = |\sphericalangle ESO_A| = 90°$, je čtyřúhelník $ERSO_A$ tětivový. Z toho plyne, že $|\sphericalangle RO_AS| = |\sphericalangle RES|$. Dále pak RT je střední příčkou v trojúhelníku EAH, z čehož dostáváme $|\sphericalangle SER| = |\sphericalangle ART|$. Konečně i čtyřúhelník $TARO_A$ je tětivový kvůli pravým úhlům u R a T. Proto platí $|\sphericalangle ART| = |\sphericalangle AO_AT|$. Dohromady pak dostáváme

$$|\sphericalangle O_BO_AP| = |\sphericalangle RO_AS| = |\sphericalangle RES| = |\sphericalangle AEH| = |\sphericalangle ART| = |\sphericalangle AO_AT| = |\sphericalangle AO_AO_C|.$$

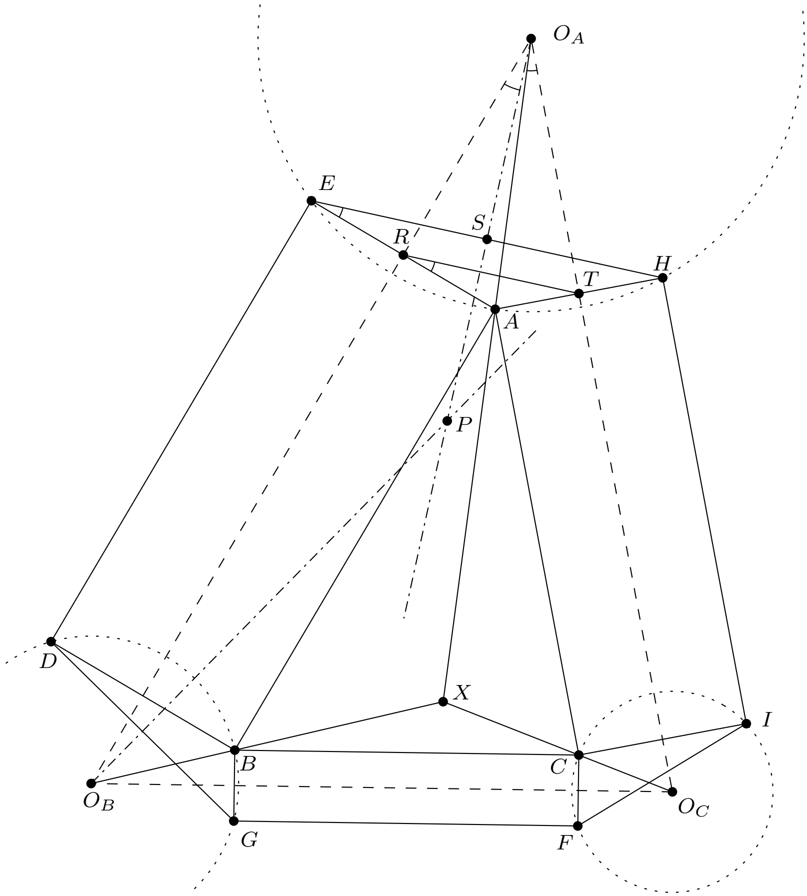
To znamená, že přímka O_AA je izogonální[3] s osou úsečky EH v úhlu $O_BO_AO_C$. Analogicky dokážeme, že i osa DG je izogonální s O_BB a osa FI je izogonální s O_CC.

Trojúhelníky $O_AO_BO_C$ a ABC nejsou shodné a mají příslušné strany rovnoběžné, proto existuje střed stejnolehlosti X zobrazující trojúhelník ABC na $O_AO_BO_C$. Ten však musí být zároveň průsečíkem přímek O_AA, O_BB a O_CC, které se tedy protínají v X. Hledaný průsečík os úseček HE, DG a FI je proto kamarád bodu X v trojúhelníku $O_AO_BO_C$.

---

[2] Jako kamaráda překládáme takzvaný isogonal conjugate, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Isogonal_conjugate.

[3] Přímky AX a AY jsou izogonální v úhlu $\sphericalangle BAC$, pokud je AX obrazem AY podle osy úhlu $\sphericalangle BAC$.



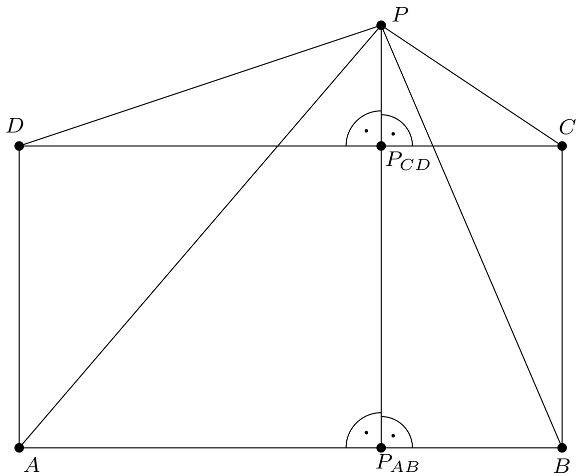
Řešení počítáním délek:
Nejprve dokážeme, že pro libovolný bod P v rovině a libovolný obdélník $ABCD$ platí

$$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2.$$

Označme paty kolmic z bodu P na AB a CD postupně P_{AB}, P_{CD}. Použijeme Pythagorovu větu na trojúhelníky $PP_{AB}A$, $PP_{AB}B$, $PP_{CD}C$, $PP_{CD}D$:

$$\begin{aligned}
|PA|^2 &= |P_{AB}P|^2 + |P_{AB}A|^2,\\
|PB|^2 &= |P_{AB}P|^2 + |P_{AB}B|^2,\\
|PC|^2 &= |P_{CD}P|^2 + |P_{CD}C|^2,\\
|PD|^2 &= |P_{CD}P|^2 + |P_{CD}D|^2.
\end{aligned}$$

V libovolném obdélníku platí $|P_{AB}B|^2 = |P_{CD}C|^2$ a $|P_{AB}A|^2 = |P_{CD}D|^2$. Z toho snadno odvodíme, že když sečteme první a třetí rovnici, dostaneme stejnou pravou stranu, jako kdybychom sečetli druhou a čtvrtou rovnici. Proto se musí rovnat i levé strany, které tvoří dokazovanou rovnost.



Nyní použijeme naše tvrzení na libovolný bod P roviny a obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$:

$$|PA|^2 + |PD|^2 = |PB|^2 + |PE|^2,$$
$$|PB|^2 + |PF|^2 = |PC|^2 + |PG|^2,$$
$$|PC|^2 + |PH|^2 = |PA|^2 + |PI|^2.$$

Sečtením těchto tří rovnic dostáváme

$$|PD|^2 + |PF|^2 + |PH|^2 = |PE|^2 + |PG|^2 + |PI|^2.$$

Definujme nyní Q jako průsečík os úseček DG a EH. Potom platí $|QD|^2 = |QG|^2$ a $|QH|^2 = |QE|^2$. Aby platila rovnice z předchozího odstavce, musí zároveň platit i $|QF|^2 = |QI|^2$. To ale znamená, že Q leží i na ose úsečky FI, jak jsme měli dokázat.

Poznámky:

K úloze se sešlo množství myšlenkově rozdílných řešení. Nejčastější chybou pak bylo, že řešitelé uvažovali trojúhelník XYZ takový, že $XYHE$, $XZDG$ a $YZFI$ jsou obdélníky. Existence takového trojúhelníku však vůbec není zřejmá a důkaz existence tvořil při tomto přístupu větší část úlohy.

(Pavel Hudec)