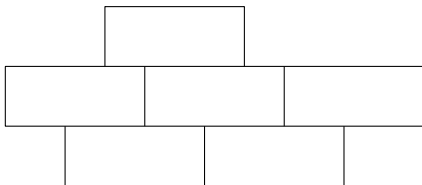


Obdélníky

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. LISTOPADU 2018

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Viki si koupil šest shodných obdélníkových dlaždiček o obvodu 38 cm a spojil je do jednoho obrazce znázorněného na obrázku. Jaký obvod má výsledný útvar?



ÚLOHA 2. (3 BODY)
Obdélník $ABCD$ má strany o délkách $|AB| = 4$ a $|AD| = 2$. Na úsečce AB leží bod P tak, že $|AP| = 1$. Ukažte, že přímka DP je kolmá na AC .

ÚLOHA 3. (3 BODY)
V tabulce 8×8 je začerněno sedm políček. Najděte největší a takové, že v obrazci budeme vždy schopni najít nezačerněný obdélník¹ složený z alespoň a políček, ať už byla začerněná kterákoliv sedmice.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Uvnitř obdélníku $ABCD$ o obsahu S se nachází bod P . Ukažte, že

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq S.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Áďa našla konvexní mnohoúhelník M a délku h . Nad každou stranou mnohoúhelníku nakreslila obdélník s druhou stranou délky h , který je naměřený dovnitř mnohoúhelníku. Všimla si, že součet obsahů všech těchto obdélníků je roven dvojnásobku obsahu M . Ukažte, že tyto obdélníky určité pokrývají M .

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Honza si vyrobil dvojici obdélníků $ABCD$ a $DEFG$ takovou, že úsečky AE a CG obě procházejí bodem D a čtyřúhelník $ACEG$ je tětiový. Druhý průsečík úsečky BC s kružnicí opsanou čtyřúhelníku $ACEG$ nazveme X a druhý průsečík úsečky EF s toutéž kružnicí označíme Y . Ukažte, že obsah čtyřúhelníku $AXYG$ je roven součtu obsahů obdélníků $ABCD$ a $DEFG$.

¹Čtverec také považujeme za obdélník.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AB a BC v bodech X a Y . Kružnice vepsaná trojúhelníku XYC se dotýká stran XY a YC v bodech P a Q . Tyto dvě kružnice vepsané se protínají v bodech R a S tak, že P, Q, R a S leží na kružnici v tomto pořadí. Ukažte, že $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když je poměr poloměrů těchto kružnic vepsaných roven $3 : 2$.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE , DG a FI se protínají v jednom bodě.