Geometrie trojúhelníka 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť I_A a I_C jsou postupně A-připsiště a C-připsiště trojúhelníka ABC. Na kružnici jemu opsané zvolme libovolný bod P různý od B. Dokažte, že střed úsečky, jejíž krajní body jsou opsiště trojúhelníků I_ABP a I_CBP, je opsištěm trojúhelníka ABC.

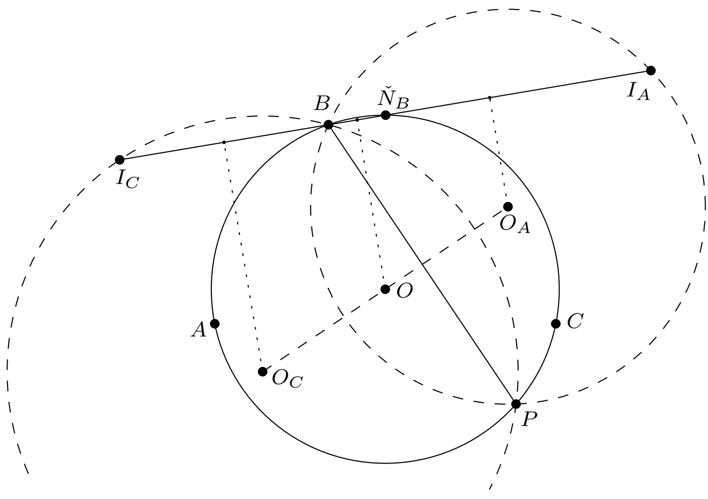
(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Označme si opsiště trojúhelníků ABC, I_ABP a I_CBP jako O, O_A a O_C. Dále buď $\check{N}_B$ antišvrk příslušný bodu B v trojúhelníku ABC. Prvně si povšimněme, že BP je tětivou kružnic opsaných trojúhelníkům ABC, I_ABP i I_CBP, a proto leží O, O_A i O_C na jedné přímce – na ose úsečky BP.

Dále si uvědomme, že O, O_A a O_C leží na osách úseček $B\check{N}_B$, BI_A a BI_C. Protože B, $\check{N}_B$, I_A i I_C leží na jedné přímce, jsou všechny tyto osy rovnoběžné. Protože už víme, že O, O_A a O_C leží na jedné přímce, stačí ukázat, že osa $B\check{N}_B$ je osou pásu určeného osami BI_A a BI_C.

Pokud na tyto tři osy aplikujeme stejnolehlost se středem v B a koeficientem 2, dostaneme k dokázání, že kolmice na I_AI_C v $\check{N}_B$ je osou pásu z kolmic na tu samou přímku v bodech I_A a I_C. Ale to je pravda, protože $\check{N}_B$ je střed I_AI_C.



POZNÁMKY:

Sešla se plejáda správných řešení založených na spoustě různých přístupů a pohledů. Všechna však zakládala na nějaké technice ze seriálu, obvykle na Švrčkově bodu nebo antišvrku. Objevila se ale třeba i řešení založená na Eulerově přímce a Feuerbachově kružnici.

Taky bych rád podotknul, že ačkoli zadání zakazovalo patologický případ $P = B$, nevylučovalo jiný patologický případ $P = \check{N}_B$. V tu chvíli totiž trojúhelníky I_ABP a I_CBP zdegenerují do úseček. Tvrzení je sice stále pravdivé, ale jen ve chvíli, kdy se smíříme s tím, že středem kružnice opsané může být i bod ležící v nekonečnu.[1] Za tuto nedokonalost zadání se omlouváme. Body jsem kvůli ní nikomu nestrhával.

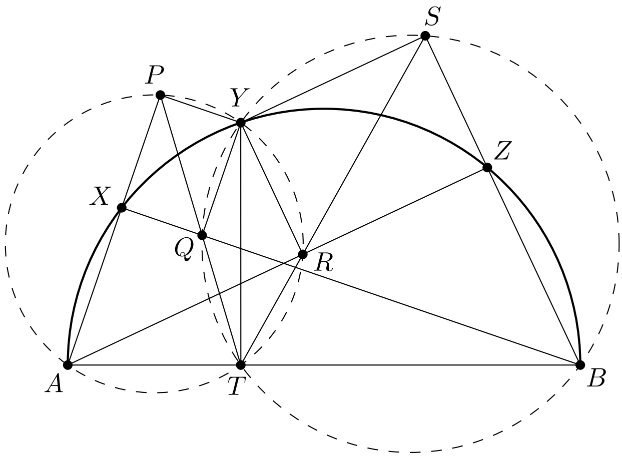
(Rado van Švarc)

Úloha 2.

Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Označme postupně P, Q, R, S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ, kde O je střed úsečky AB.

(Rado Švarc)

Řešení:
Nechť T je pata kolmice spuštěné z bodu Y na AB. Body T, P, Q leží na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímku bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABX. Analogicky leží body T, R, S na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímku bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABZ.



Díky pravým úhlům leží body A, Y, R, T na Thaletově kružnici nad průměrem AY, tudíž $|\sphericalangle YTR| = |\sphericalangle YAR| = |\sphericalangle YAZ|$. Podobným způsobem dostaneme $|\sphericalangle QTY| = |\sphericalangle QBY| = |\sphericalangle XBY|$. Nyní využijeme faktu, že $AXYZB$ je tětivový pětiúhelník. Úhel QTR jakožto součet úhlů QTY a YTR je tedy součtem obvodových úhlů příslušných obloukům XY a YZ. To dohromady dává obvodový úhel oblouku XZ, což je polovina středového úhlu XOZ.

Poznámky:
Úloha byla jednoduchá, a proto naprostá většina došlých řešení byla správná. Chtěl bych pochválit řešitele, kteří použili Simsonovu přímku, čím si své řešení dosti zjednodušili a zkrátili oproti jiným úhlícím řešením.

Jiný postup, který se mi velice líbil, využíval stejnolehlost se středem Y a koeficientem 2. Nafoukneme-li pouze přímky PQ a RS, jejich obrazy obsahují po řadě body X a Z. Zároveň obraz

[1] Koho zmínka o bodech ležících v nekonečnu zaujala, ten si může přečíst něco o *projektivní rovině*.

bodu T padne na kružnici opsanou trojúhelníku XYZ, což okamžitě dává kýžený výsledek. Tímto postupem si *Victoria María Nájares Romero* a *Martin Zimen* vysloužili $+i$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 3.

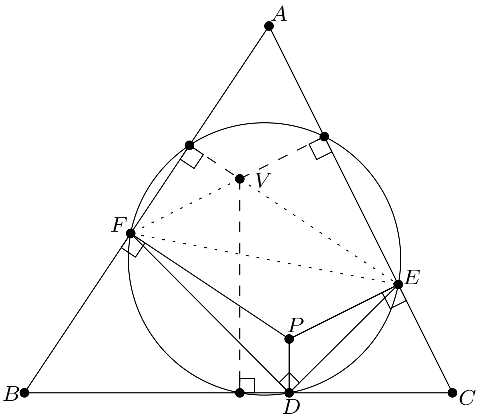
Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Paty kolmic z bodu P na strany BC, CA a AB označme postupně D, E a F. Dále nechť V je kolmiště trojúhelníku AEF. Dokažte, že pokud $DE \perp DF$, pak platí

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BVC| = 180^\circ + \alpha.$$

(Rado van Švarc)

Řešení:

Podle Six feet theorem[2] sdílí trojúhelník tvořený patami kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC kružnici opsanou s trojúhelníkem s vrcholy v analogických patách kolmic vedených kamarádem bodu P. Jelikož je úhel EDF pravý, je podle Thaletovy věty úsečka EF průměrem této kružnice. Uvažme paty kolmic z kamaráda bodu P postupně na strany AC a AB. Vzhledem k výše uvedenému to musejí být průsečíky kružnice nad průměrem EF s příslušnými stranami různé od bodů E a F. To jsou ale zároveň paty dvou výšek v trojúhelníku AEF. Z toho plyne, že kamarádem bodu P musí být bod V. Zbytek řešení je obsažen v následujícím lemmatu.



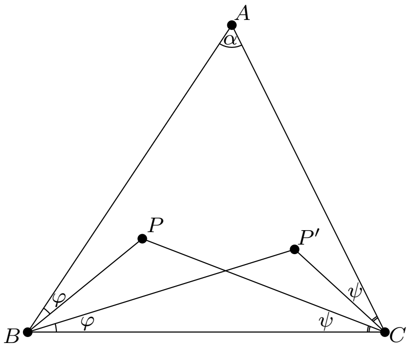
Lemma. *Nechť P a P' jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. Pak platí $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C| = 180^\circ + \alpha$ a analogicky $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle AP'C| = 180^\circ + \beta$ a $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle AP'B| = 180^\circ + \gamma$.*

Důkaz. Podívejme se na druhý obrázek. Dvojice stejně velkých úhlů (jelikož P a P' jsou kamarádi) u vrcholů B a C označíme φ a ψ. Součet $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C|$ pak můžeme vyjádřit jako

$$(180^\circ - |\sphericalangle PBC| - \psi) + (180^\circ - |\sphericalangle P'CB| - \varphi) = 360^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ + \alpha,$$

což jsme měli dokázat.

[2] Tvrzení 54 z druhého dílu seriálu.



Poznámky:
Zhruba polovina z celkových čtrnácti úspěšných řešitelů této úlohy použila podobný postup jako my zde. Ze zadání ale plyne ještě víc. Úhel BPC má totiž velikost $90^\circ + \alpha$, a tedy úhel BVC musí být nutně pravý! To je jistě zajímavé a dá se to s trochou námahy elementárně dokázat, o čemž se přesvědčila druhá zhruba polovina řešitelů. Ještě dodáme, že v námi použitém lemmatu platí dokonce ekvivalence, tedy uvedené tři vztahy pro úhly platí právě tehdy, když jsou P a P' kamarádi.

(David Hruška)