Cifry

3. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť $S(k)$ značí ciferný součet čísla k. Nalezněte číslo n takové, že[1] $(S(n) + 2017) \mid n$.

(Tonda Le)

ŘEŠENÍ:

Při řešení využijeme faktu, že vynásobením libovolného přirozeného čísla deseti se nezmění jeho ciferný součet. Pokud tedy nalezneme číslo n', pro které je $k = S(n') + 2017$ mocninou deseti, bude k dělit libovolné číslo končící dostatečným počtem nul. Pro dostatečně velké m bude tedy řešením $n = 10^m \cdot n'$. Můžeme například hledat n' s ciferným součtem $S(n') = 10000 - 2017 = 7983$.

Získat takové n' je možné, a to mnoha způsoby – může jím být například číslo složené z 7983 jedniček či 887 devítek. Po připsání čtyř nul tak dostáváme požadované řešení.

POZNÁMKY:

Úloha byla velmi snadná, poslali jste nám dohromady 13 různých správných čísel, přičemž více než polovina z vás nalezla číslo 4066. Ovšem přišlo i pár kuriózních řešení – například čísla 126 976 či 142 102 030.

Pro nalezení 4066 si je bohužel třeba „tipnout", že rovnice $2\,(S(n) + 2017) = n$ má řešení a poté ho teprve spočítat. Proto jsem se rozhodl ve vzorovém řešení nalézt sice mnohem větší číslo, zato však takové, při jehož hledání není třeba hádat.

(Tomáš Novotný)

Úloha 2.

Existuje přirozené číslo, které má právě deset přirozených dělitelů, přičemž tito dělitelé mají navzájem různé poslední cifry?

(Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že hledané číslo s přesně deseti děliteli končícími na různé cifry existuje. Pak musí mít dělitele, který končí nulou. Tento dělitel je násobkem deseti, tedy i desítka je dělitelem hledaného čísla. Jako násobek deseti musí hledané číslo končit nulou. Vzhledem k tomu, že každé číslo je svým vlastním dělitelem, máme nutně dalšího dělitele končícího nulou (krom desítky). Protože ale dělitel končící nulou má být jen jeden, znamená to, že hledané číslo samotné by muselo být rovno deseti. Číslo deset ovšem deset různých dělitelů nemá (natož s různými ciframi). Žádné číslo odpovídající zadání tedy neexistuje.

[1] O celých číslech a a b řekneme, že a *dělí* b, píšeme $a \mid b$, pokud existuje celé číslo l takové, že $b = al$.

Poznámky:

Přestože úloha byla důkazová, téměř všichni řešitelé si s ní poradili. Ke správnému závěru většinou vedl jeden ze dvou postupů – buď přímo ten vzorový využívající dva dělitele končící nulou, nebo podobný pro poslední cifru pět. Druhý postup využíval rozkladu hledaného čísla na prvočinitele a dělitelů dvojky a pětky, které číslo dělitelné deseti určitě má.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 3.

Nechť $S(k)$ stále ještě značí ciferný součet čísla k. Najděte číslo n, pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.

(David Hruška)

Řešení:

Pokud n je vyhovující číslo, pak rozdíl ciferných součtů čísel n a $n+1$ je násobek sedmi. Zřejmě n musí končit devítkou, neboť jinak by se ciferné součty lišily jen o jedna. Rozdíl ciferných součtů přitom záleží na počtu devítek na konci čísla n. Nechť m je délka největšího souvislého úseku devítek končící na místě jednotek. Po přičtení jedničky se pak ciferný součet zmenší o $9m-1$, protože ze všech těchto devítek se stanou nuly a cifra bezprostředně před zmíněným úsekem se zvýší o jedna. Chceme, aby sedm dělilo $9m-1$, jeden možný kandidát na m je např. čtyřka. Nyní už snadno dohledáme nějaké vyhovující číslo n, třeba 69999 (kde jsme první cifru zvolili tak, aby sedm dělilo $S(n)$).

Poznámky:

Úloha byla jednoduchá, a proto si s ní většina řešitelů hravě poradila. Nejoblíbenější výsledek byl právě 69999 uvedený ve vzorovém řešení. Jeden bod jsem udělil řešením, která uvedla, že hledané číslo musí končit na devítku, ale ke konečnému výsledku už to nedotáhla.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 4.

Dokažte, že pro každé číslo n nesoudělné[2] s deseti existuje číslo složené ze samých jedniček, které je dělitelné n.

(Martin Čech)

Řešení:

Pro $k \in \mathbb{N}_0$ označme a_k číslo tvořené k jedničkami. Číslo a_k lze zapsat pomocí následující sumy: $a_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 10^0 + 10^1 + \ldots 10^{k-1}$. Nyní uvažme n-prvkovou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokud se v této posloupnosti vyskytuje číslo dělitelné n, tak máme vyhráno.

Pokud ne, předpokládejme pro spor, že žádný z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ není dělitelný n. Máme n-prvkovou posloupnost, jejíž prvky nabývají pouze $n-1$ různých zbytků modulo n. Zbytek 0 se v posloupnosti nevyskytuje. Z Dirichletova principu tedy musí existovat $x, y \in \mathbb{N}_0$ taková, že $1 \le x < y \le n$ a že $a_x \equiv a_y \pmod{n}$. To znamená, že $n \mid a_y - a_x$.

$$a_y - a_x = \sum_{i=0}^{y-1} 10^i - \sum_{i=0}^{x-1} 10^i = \sum_{i=x}^{y-1} 10^i = 10^x \sum_{i=0}^{y-x-1} 10^i = 10^x a_{y-x}.$$

Tedy $n \mid 10^x a_{y-x}$. Jelikož n je nesoudělné s deseti, tak už nutně $n \mid a_{y-x}$. To je však spor s předpokladem, že se v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nevyskytuje žádný násobek n.

[2] O k, n řekneme, že jsou *nesoudělná*, pokud jejich největší společný dělitel je jedna.

Poznámky:
K úloze se dalo přistupovat vícero způsoby. Nejoblíbenější byl postup jako ve vzorovém řešení. Mnoho řešitelů využilo Eulerovu větu a ukázali, že $n \mid a_{\varphi(9n)}$. Někteří pak hledali periody ve zbytcích mocnin deseti modulo n a v jiných podobných posloupnostech. Ne každému se však povedlo dovést poslední zmíněnou metodu až do zdárného konce.

(Martin Hora)

Úloha 5.

Matěj s Bárou čekali na přednášku a oba se nudili. Matěj napsal na tabuli přirozené číslo. Potom každých pět minut Bára z čísla na tabuli vybrala nenulovou cifru, číslo smazala a místo něj napsala součet tohoto čísla se zvolenou cifrou. Dokažte, že se časem na tabuli muselo objevit sudé číslo.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Zadefinujme si cifročokoládovou posloupnost $p_1, p_2, \ldots$, kde p_i $(i > 1)$ vznikne sečtením p_{i-1} s jednou jeho nenulovou cifrou. Protože jsme p_i dostali z p_{i-1} přičtením jednoho z čísel $1, 2, \ldots, 9$, platí následující nerovnost: $p_{i-1} < p_i < p_{i-1} + 10$.

Předpokládejme nyní, že máme dáno přirozené číslo n. Zjevně $n < 10^k$ pro nějaké dostatečně velké k. Potom pro každou cifročokoládovou posloupnost s $p_1 = n$ musí existovat takové d, že $10^k \leq p_d \leq 10^k + 9$, protože každá cifročokoládová posloupnost je ostře rostoucí a z každých deseti po sobě jdoucích čísel větších než n se musí alespoň do jednoho trefit. Pokud je p_d sudé, tak jsme vyhráli. Pokud bylo číslo p_d liché, potom p_{d+1} musí být sudé, neboť číslo p_d obsahuje pouze jedničky a nuly a poslední cifra je lichá. A tedy p_{d+1} je nutně součtem dvou lichých čísel.

Sudé číslo se tedy opravdu objevit muselo.

Poznámky:
Skoro všechna došlá řešení byla správně. Nejčastěji jste postupovali podobně jako ve vzorovém řešení, jenom jste většinou odtrhli poslední cifru a dívali se na číslo, které rostlo jenom o jedničku.

(Kuba Svoboda)

Úloha 6.

Na sto hřebících jsou popořadě zavěšená „dvojciferná“ čísla $00, 01, 02, \ldots, 10, \ldots, 99$. *Áďa je mezi sebou přeskládala tak, aby se sousední čísla lišila právě v jedné cifře, a to o jedničku (tj. vedle* 19 *může být* 09, 29 *a* 18, *ale například* 10 *ne). Kolik nejvíce čísel mohlo zůstat na svém místě?*

(Matěj Konečný)

Řešení:

V posloupnosti, kterou Áďa dostane po přeskládání, se ciferné součty dvou po sobě jdoucích členů vždy liší o jedna. Proto v této posloupnosti pro všechny členy buď platí, že parita jejich ciferného součtu je vždy stejná jako parita jejich pořadí v přeskládané posloupnosti[3], nebo je naopak parita ciferného součtu každého prvku vždy rozdílná od parity jeho pořadí.

Na začátku platilo, že se parita ciferného součtu padesáti čísel, která začínala sudou číslicí (00 až 09, 20 až 29, … , 80 až 89), vždy shodovala s paritou jejich pořadí, zatímco pro zbylých padesát čísel byla rozdílná. To znamená, že ať už přeskládání Ádiny posloupnosti dopadlo jakkoli, alespoň padesát čísel muselo změnit svůj hřebík prostě proto, že po přeskládání na jejich hřebíku muselo skončit číslo s jinou paritou ciferného součtu.

Nyní zbývá najít možné přeskládání zachovávající pozici nějakých padesáti čísel. Předchozí úvaha nám napovídá, že jsou jen dvě možnosti, jak taková stabilní padesátka může vypadat. Buď se bude jednat o čísla, jež začínají na sudou cifru, nebo o ta začínající na cifru lichou. V prvním

[3] Číslujeme od nuly.

případě (ten druhý by dopadl podobně) už snadno dostáváme řešení tím, že otočíme každou desetici čísel začínajících na lichou cifru:

$$00, \dots, 09, 19, \dots, 10, 20, \dots, 29, \quad \dots \quad, 99, \dots, 90.$$

Poznámky:

Většina došlých řešení se dala rozdělit do dvou škatulek. Zatímco někteří z vás s úlohou neměli problém, mnozí pouze našli optimální řešení zachovávající padesát čísel a následně se obvykle snažili argumentovat pomocí různých heuristických úvah. Mezi takové úvahy patří kupříkladu nápad, že se vyplatí, aby čísla začínající na stejnou cifru, byla v optimálním řešení pohromadě. Jakkoli jsou myšlenky tohoto typu užitečné při hledání správného řešení, jen stěží se z nich dá zhotovit korektní důkaz. Proto byla taková řešení oceněna pouhým bodem za nalezení správného řešení.

(Vašek Rozhoň)

Úloha 7.

Přirozené číslo nazveme k-kruté, pokud každý souvislý úsek jeho ciferného zápisu v soustavě o základu k je prvočíslo (zapsané v téže soustavě). Dokažte, že pro každé $k \geq 2$ existuje jen konečně mnoho k-krutých čísel.

(Jakub Löwit)

Řešení (podle Pavla Hudce):

Vezměme si libovolné prvočíslo p nesoudělné s k a označme jako m počet cifer, které má zápis p v soustavě o základu k. Dokážeme, že všechna k-krutá čísla jsou menší než $N = k^{(p+1)(m+1)-1}$, což znamená, že jich je konečně mnoho.

Pro spor předpokládejme, že pro nějaké k máme k-kruté číslo $\mathcal{K}$ takové, že $\mathcal{K} \geq N$. Všimněme si, že zápis $\mathcal{K}$ v soustavě o základu k neobsahuje žádné nuly (protože nula není prvočíslo). Nerovnost $\mathcal{K} \geq N$ znamená, že $\mathcal{K}$ má v soustavě o základu k alespoň $(p+1)(m+1)$ číslic. Označme jako $s(\mathcal{K}, i)$ číslo dané posledními i číslicemi $\mathcal{K}$ v soustavě o základu k, tj. například pro $\mathcal{K} = (1234)_k$ je $s(\mathcal{K}, 3) = (234)_k$. Podívejme se nyní na úseky $s(\mathcal{K}, (m+1)i)$ pro $i \in \{1, \dots, p+1\}$. To je $p+1$ koncových úseků čísla $\mathcal{K}$. Z Dirichletova principu plyne, že pro nějaká dvě různá čísla $i < j \in \{1, \dots, p+1\}$ platí

$$s(\mathcal{K}, (m+1)i) \equiv s(\mathcal{K}, (m+1)j) \pmod{p}.$$

To ale znamená, že $p \mid s(\mathcal{K}, (m+1)j) - s(\mathcal{K}, (m+1)i)$. A jak vypadá $s(\mathcal{K}, (m+1)j) - s(\mathcal{K}, (m+1)i)$? To je posledních $(m+1)j$ číslic $\mathcal{K}$, přičemž místo posledních $(m+1)i$ z nich jsou nuly. Takže je to hodnota úseku mezi $(m+1)j$-tou cifrou a $((m+1)i+1)$-tou cifrou (pořadí cifer bereme od konce), vynásobená nějakou mocninou k, konkrétně $k^{(m+1)i}$, která v soustavě o základu k „přidá“ nuly na konec). Ale protože p nedělí k, tak nedělí ani $k^{(m+1)i}$, což znamená, že musí dělit hodnotu úseku mezi $(m+1)j$-tou cifrou a $((m+1)i+1)$-tou cifrou. Tento úsek je ale dlouhý alespoň $m+1$ cifer, zatímco p má m cifer; není tedy roven p, a proto jde o složené číslo. To je ve sporu s k-krutostí.

Poznámky:

Většina správných řešení měla podobnou myšlenku, ale místo prvočísla p nesoudělného s k se snažila najít úsek dělitelný $k-1$ (tím pádem soustava o základu 2 musela být ošetřena zvlášť). Řešení se pak lišilo v detailech, ale hlavní myšlenka (podívat se na koncové úseky a z Dirichleta najít dva se stejným zbytkem modulo něco) byla pokaždé stejná.

(Matěj Konečný)

Úloha 8.

Pepa se Štěpánem vymysleli čistě matematické kouzlo. Pepa požádá diváka, aby husím brkem napsal na kus pergamenu jakýkoliv řetězec N arabských číslic. Potom Pepa zakryje některou dvojici sousedních cifer dalším kusem pergamenu. Teprve nyní přichází na scénu Štěpán, podívá se na neschované číslice a oznámí, které dvě cifry Pepa zakryl (včetně jejich pořadí). Pro jaké nejmenší N je takový trik možné provést?

(Jakub Löwit)

Řešení:

Označme A množinu všech N-ciferných řetězců a B množinu všech řetězců, které vznikly z N-ciferného řetězce zakrytím dvou po sobě jdoucích číslic. Pro každé číslo z A musí mít Pepa číslo z B, které z něj vytvoří zakrytím dvou sousedních cifer, přičemž na žádné číslo z B nesmí připadat více než jedno číslo z A. Proto musí platit $|A| \leq |B|$. Protože $|A| = 10^N$ a $|B| = (N-1)10^{N-2}$ (dvojice zakrytých cifer má $N-1$ možných pozic), tak $N \geq 101$.

Nyní ukážeme, že 101 číslic stačí. Označme s součet cifer na sudých pozicích a ℓ součet cifer na lichých pozicích. Pepa spočítá s a ℓ a zakryje políčko na pozici $(s \mod 10) \cdot 10 + (\ell \mod 10)$ a políčko bezprostředně za ním (políčka budeme číslovat od nuly). Štěpán tedy z pozice zakrytých políček zjistí hodnoty $s \mod 10$ a $\ell \mod 10$ v původním řetězci. Protože s a ℓ mohou být nejvýše o 9 větší než jsou součty cifer na sudých a lichých pozicích ve zbylém $N-2$ ciferném řetězci, který Štěpán vidí, dokáže Štěpán určit hodnotu zakrytého políčka na sudé a na liché pozici.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správně a více či méně využívala myšlenku rozdělení cifer na liché a sudé. Jediná problematická část řešení bylo zdůvodnění dolního odhadu na počet cifer, kde nestačí zdůvodnit dolní mez pro jeden konkrétní algoritmus, který je pak použit v druhé části, ale je potřeba dolní mez ukázat bez závislosti na strategii Pepy a Štěpána. *(Martin Töpfer)*