# Mnohoúhelníky

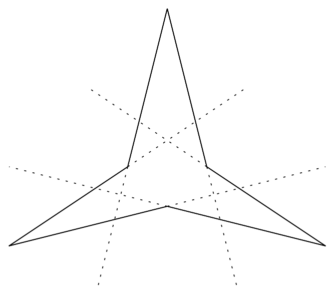
3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

*Nalezněte takový mnohoúhelník, aby každá jeho strana prodloužená na přímku protínala právě jednu další stranu v jejím vnitřním bodě.*

*(Anh Dung „Tonda“ Le)*

ŘEŠENÍ:
Řešení je nekonečně mnoho, jeden z možných mnohoúhelníků je třeba tento:



POZNÁMKY:
Ačkoli mě potěšilo, že mnoho řešitelů bere úlohy vážně a snaží se okomentovat myšlenkový postup a dokázat jeho správnost i u jedničky, zadání říkalo „nalezněte“. Z obrázku je snadno vidět, jestli mnohoúhelník podmínku protínání stran splňuje, proto není potřeba nic dokazovat a zcela dostatečné je prostě nějaký vhodný načrtnout.

Někteří řešitelé si ale na obrázku nedali příliš záležet a nebylo jasné, jestli jejich mnohoúhelník splňuje zadání, nebo třeba prodloužená strana protíná místo jiné strany ve vnitřním bodě nějaký vrchol. Nakonec jsem za to body nestrhávala, protože je těžké najít hranici mezi „jasným“ a „nejasným“ obrázkem. Ale pro příště bych všem doporučila poslat dostatečně názorné řešení, aby neriskovali bodovou ztrátu.

*(Bára Kociánová)*

## Úloha 2.

*Červenáčkovi došly omalovánky, a tak vzal svůj oblíbený pravidelný* 2016*úhelník a začal jeho vrcholy barvit načerveno. Dokažte, že když jich obarvil* 1010*, některé čtyři červené body tvořily vrcholy obdélníku*[1]*.*

*(Marian Poljak)*

[1]Obdélníkem je i čtverec.

Řešení:

O dvou vrcholech pravidelného mnohoúhelníka řekneme, že jsou *protější*, pokud je úsečka je spojující průměrem kružnice opsané danému mnohoúhelníku. Protože 2016 je sudé číslo, v Červenáčkově 2016úhelníku existuje ke každému vrcholu protější vrchol. Každý vrchol je obsažen v právě jedné dvojici a těchto dvojic protějších vrcholů je 1008.

Červenáček obarvil 1010 vrcholů, takže musel z Dirichletova principu obarvit v alespoň dvou dvojicích protějších vrcholů oba vrcholy. Vyberme tedy libovolné dvě takové dvojice a označme je $\{A_1, A_2\}$ a $\{B_1, B_2\}$.

Protože úsečka $A_1A_2$ je průměr kružnice opsané Červenáčkovu mnohoúhelníku, z Thaletovy věty jsou úhly $\sphericalangle A_1B_1A_2$ a $\sphericalangle A_1B_2A_2$ pravé. Analogicky odvodíme, že i úhly $\sphericalangle B_1A_1B_2$ a $\sphericalangle B_1A_2B_2$ jsou pravé, takže čtyřúhelník $A_1B_1A_2B_2$ je obdélník.

Poznámky:

Ač se jednalo o dvojku, úloha se pro mnohé řešitele ukázala jako poměrně složitá. Ve vzorovém řešení je část s Dirichletovým principem popsaná velmi stručně – z Dirichletova principu plyne jen, že jedna dvojice protějších vrcholů je obarvená načerveno. Jednoduchou aplikací stejné věty na zbylé vrcholy pak získáme existenci druhé červené dvojice. Takovéto rozepisování je ale zbytečně složité. Dokonce i bez Dirichletova principu je jasné, že obarvením 1010 vrcholů z 1008 dvojic jsme museli alespoň dvě obarvit celé. Je ale nutné zmínit, že vrcholy rozdělíme do dvojic. Kdo tento argument zamlčel, ztratil body.

Mnozí řešitelé se snažili nějak popsat „nejhorší případ“. Někteří tvrdili, že nejhorším případem je situace, kdy Červenáček barví vrcholy, které spolu sousedí. Tuto skutečnost ale nijak nedokazovali a proto se dopustili zjednodušení úlohy.

Podobně někteří argumentovali tak, že Červenáček nejdřív obarvil z každé dvojice protilehlých vrcholů jeden vrchol a poté přibarvil další dva, které vytvořily obdélník. To ale není popis všech možných postupů obarvování a ani není a priori vidět, že by byl ze všech „nejhorší“. Účastníci, kteří tedy řešili úlohu tímto způsobem, se také dopustili zjednodušení. Mohlo totiž dojít například k tomu, že Červenáček nejdřív obarvil oba vrcholy z nějaké dvojice a až poté začal obarvovat z každé dvojice jen jeden vrchol. V tomto případě by prvních 1008 obarvených vrcholů také netvořilo obdélník a jedna dvojice protilehlých vrcholů by byla kompletně neobarvená. Pak není zcela zřejmé, že by přidáním posledních dvou vrcholů vznikl červený obdélník. Podobných postupů obarvování by šlo nalézt ještě více a každý z nich by si přitom zasloužil alespoň stručný komentář.

*(Martin „E.T.“ Sýkora)*

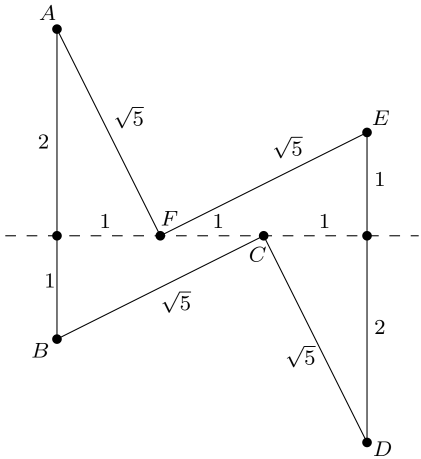
## Úloha 3.

*Najděte šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.*

*(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:

Hledaný šestiúhelník může být například tento:




Řez rozdělí šestiúhelník $ABCDEF$ na čtyři trojúhelníky o stranách 1, 2 a $\sqrt{5}$ (tedy shodné podle věty *sss*). Podmínky v zadání jsou splněny.

Poznámky:
Jak na správné řešení přijít? Položme si otázku, pod jakým úhlem $\alpha$ může řez protínat kteroukoliv stranu šestiúhelníka. Na druhé straně řezu totiž vznikne doplňkový úhel $180° - \alpha$, a pokud jsou tyto dva úhly různé, nemohou se oba vyskytovat ve shodných trojúhelnících. Řez tedy protíná strany jedině pod pravým úhlem – a s touto znalostí už není těžké vhodný šestiúhelník sestrojit.

Dále bych chtěl poznamenat, že v úlohách, kde stačí najít nějaké jedno řešení, stačí zkonstruovat řešení (v této úloze například obrázkem) a ověřit, že vyhovuje podmínkám v zadání. Obšírný postup tentokrát nebyl nutný.

Z definice přiložené k zadání nebylo zcela jasné, zda pouhý dotyk považujeme za protínání se. Někteří účastníci tedy za šestiúhelník považovali i dva trojúhelníky dotýkající se vrcholy. Za nejasnost se omlouváme. Rádi bychom ale také připomněli, že pokud vám připadá na zadání něco divné – a výše popsaný „šestiúhelník“ je skutečně dost zvláštní – pak je vždy lepší se nás zeptat na *mks@mff.cuni.cz*. *(Lucien Šíma)*

## Úloha 4.

*Rozhodněte, zda pro nějaký stoúhelník platí, že pro žádné $n < 100$ není možné vybrat $n$ jeho stran a složit z nich $n$-úhelník.*

*(Matěj Konečný)*

Řešení:
Uvědomíme si, že $n$-úhelník lze složit z $n$ úseček právě tehdy, když je délka každé úsečky menší než součet délek zbylých úseček. Ukážeme, že stoúhelník se stranami $2^0$, $2^1$, $2^2$, ... , $2^{98}$ a $2^{99} - 1{,}5$ splňuje zadání.

Nejprve ukážeme, že tento stoúhelník umíme sestrojit. Potřebujeme ukázat, že nejdelší jeho strana je kratší než součet délek všech ostatních: $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{98} = 2^{99} - 1 > 2^{99} - 1{,}5$.

Dále ukážeme, že pro $n < 100$ nejde z žádných $n$ jeho stran sestrojit $n$-úhelník. Řešení rozdělíme na dva případy. Pokud je mezi vybranými stranami nejdelší strana o délce $2^{99} - 1{,}5$, zbylých nejvýše 99 stran může mít v součtu délku nejvýše $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{98} = 2^{99} - 2$, což je ostře menší než $2^{99} - 1{,}5$. To znamená, že v tomto případě nepůjde $n$-úhelník sestrojit. Pokud mezi vybranými stranami není $2^{99} - 1{,}5$, pak bude mít nejdelší strana délku $2^k$ pro nějaké vhodné $k$. Součet délek všech kratších stran je $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, a tedy ať z kratších stran vybereme jejich jakoukoli podmnožinu, nejdelší strana bude vždy ostře delší než součet délek ostatních stran a $n$-úhelník nepůjde sestrojit.

POZNÁMKY:
Většina řešitelů přišla na konstrukci příkladu pomocí stran, jejichž délky jsou mocninami dvojky. Někteří si ale neuvědomili, že samotný stoúhelník musí jít zkonstruovat a nebo se jim nepodařilo konstrukci upravit tak, aby i zkonstruovatelný stoúhelník stále splňoval zadání.

Velmi často se pro příklad nezkonstruovatelného $n$-úhleníku z $n$ úseček používala rovnost délky nejdelší strany a součtu délek ostatních úseček, kdy by výsledný $n$-úhelník byl degenerovaný do úsečky. To je samozřejmě v pořádku, ve vzorovém řešení jsem se tomu vyhnul jen pro větší přehlednost. *(Martin Töpfer)*

## Úloha 5.

*Upovídaná ovečka se každý den pase na některém vrcholu daného 2017úhelníku. Zlý vlk chce ovečku sežrat. Aby to mohl udělat, musí být nějaký den ve stejném vrcholu 2017úhelníku jako ovečka, přičemž $i$-tou noc se musí přesunout po obvodu mnohoúhelníku o právě $i$ vrcholů, počínaje první nocí. Naštěstí pro vlka je ovečka upovídaná, a tak všechna zvířátka (včetně vlka) dopředu vědí, kde se který den bude pást. Kolik nejméně dní potřebuje vlk, aby byl ovečku vždy schopen chytit nezávisle na tom, ve kterém vrcholu se sám první den nachází?*

*(Jakub Löwit)*

ŘEŠENÍ:
Rozmyslíme si, že se nás úloha vlastně ptá na to, který den je vlk poprvé schopen být na libovolném vrcholu 2017úhelníku. Dokud totiž existuje vrchol, na který se daný den nemůže dostat, ovečka se může pást právě tam.

Úlohu nyní přeformulujeme: Zajímá nás, pro které nejmenší $n$ existuje pro každé $x$ z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 2016\}$ taková posloupnost $(a_m)_{m=1}^{n}$, že $|a_m| = m$ a součet celé posloupnosti je kongruentní s $x$ modulo 2017. Za pomoci předchozího pozorování snadno nahlédneme, že tato otázka je ekvivalentní otázce z úlohy.

V přeformulovávání úlohy můžeme ale ještě pokračovat. Všimneme si, že pokud navíc k součtu posloupnosti přičteme nějaké pevné číslo, tak se nezmění počet zbytkových tříd modulo 2017, do nichž se umíme dostat. Dokonce ho můžeme i vydělit[2] pevným číslem nesoudělným s 2017, a počet pokrytých zbytkových tříd se též nezmění. Můžeme tedy k součtu posloupnosti navíc přičíst ještě součet všech čísel od 1 do $n$; to je ale totéž, jako kdybychom místo čísel, která jsou v posloupnosti záporná, brali nulu a kladná přičetli dvakrát. Když nyní ještě vydělíme součet dvěma, podařilo se nám přeformulovat úlohu následovně:

*Zjistěte, pro jaké nejmenší $n$ umíte pro každé $x \in \mathbb{N}_0, 0 \leq x \leq 2016$ vybrat podmnožinu množiny $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ se součtem $x$.*

Je zjevné, že $n$ musí být tak vysoké, aby součet čísel od jedné do $n$ byl alespoň 2016. Dosadíme-li do známého vzorce $n(n+1)/2 \geq 2016$, dostaneme kvadratickou nerovnici, kterou upravíme jako $(n-63)(n+64) \geq 0$. Odsud víme, že $n$ je alespoň 63. Nyní ukažme, že pro $n = 63$ pokryjeme i všechna čísla menší než 2016. Budeme postupovat indukcí, tedy zkonstruujeme množinu pokrývající nulu a ukážeme, jak z množiny pokrývající $x < 2016$ vyrobíme množinu pokrývající $x+1$.

Nulu zjevně pokryjeme prázdnou množinou. Nyní mějme nějakou množinu $M$ se součtem $x$; ukážeme, jak ji předělat na množinu se součtem $x+1$. Pokud je nějaké $k < 63$ v $M$, ale $k+1$ ne, můžeme v $M$ nahradit $k$ číslem $k+1$. Pokud takové $k$ neexistuje, ale jednička v $M$ není, můžeme do $M$ přidat jedničku. Pokud jednička v $M$ je, a pro každé $k < 63$ z $M$ je v $M$ i $k+1$, tak už jsou

[2] Jak přesně funguje dělení při modulení si můžeš přečíst v nějakém článku, který se věnuje dělení nad konečným tělesem. My ale budeme dělit čísla pouze jejich děliteli, což funguje přesně tak, jak jsi zvyklý (zvyklá), takže se konečnými tělesy vůbec nemusíš trápit.

v $M$ nutně všechna čísla, součet tedy už dosáhl 2016 a my jsme již zkonstruovali vhodnou množinu pro každé $x \leq 2016$.

Vlk chytí ovečku buď 63., nebo 64. den v závislosti na tom, jestli den před první nocí označíme jako den 0 nebo den 1.

Poznámky:

Většina řešitelů nevyužila možnosti přeformulovat si zadání jako ve vzoráku, což často vedlo k tomu, že bylo nějaké značení poněkud kostrbaté nebo špatně definované.

Mnohem horší je ale fakt, že opravdu nadpoloviční většina řešitelů použila skutečnost, že pro každé $x$ najdeme podmnožinu $\{1, \ldots, n\}$ se součtem $x$, bez důkazu. Často toto tvrzení nebylo ani zformulováno. Bez něj ale vůbec není jasné, že celý důkaz funguje. Proto jsem řešením, kde jsem nenašel ani náznak důkazu (popř. evidentně nefunkční důkaz) tohoto tvrzení, strhával jeden bod.

Několik řešitelů též nepřišlo na to, že do závěrečné nerovnosti nepatří 2017, nýbrž jen 2016, kvůli čemuž jim vyšlo o den více. I tato chyba byla potrestána jednobodovou ztrátou. Někteří řešitelé se také pokoušeli ukázat přímo, že se $i$-tý den počet vrcholů, kde umí vlk být, zvýší o $i$. V takových řešeních však často chyběl jakýkoli důkaz, a tak většina z nich nedosáhla ani na tři body. Opět se však našli řešitelé, kteří poslali bezchybně a jasně sepsané elegantní řešení, i tentokrát jsem tedy mohl udělit několik $+i$. *(Viki Němeček)*

## Úloha 6.

*Dva shodné pravidelné $n$-úhelníky se překrývají tak, že jejich průnik je $2n$-úhelník (ne nutně pravidelný), jehož hrany postupně dokola očíslujeme čísly 1 až $2n$. Dokažte, že součet délek jeho sudě očíslovaných stran je stejný jako součet délek jeho stran s lichým číslem.*

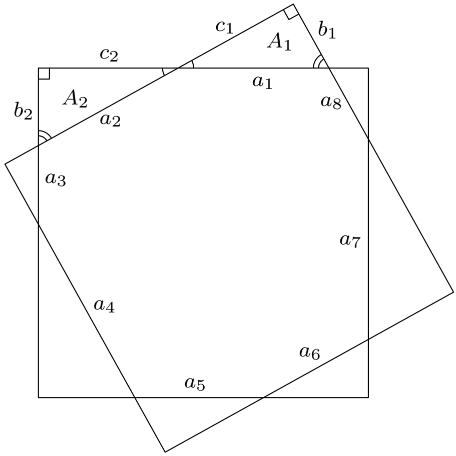
*(David Hruška)*

Řešení:

Dĺžky strán nášho $2n$-uholníka si označíme $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Nad každou z týchto strán je trojuholník (trojuholník nad stranou $a_i$ označíme $A_i$), ktorého tretí vrchol (prvé dva sú koncové body danej strany) je vrchol jedného z $n$-uholníkov. Trojuholníky zodpovedajúce susedným stranám sú podobné, pretože majú dva rovnaké vrcholové uhly, okrem toho má každý jeden uhol z jedného z pôvodných pravidlených $n$-uholníkov, a tie sú tiež rovnaké. Preto sú si všetky trojuholníky $A_i$ navzájom podobné. Zvyšné strany v trojuholníku $A_i$ si označíme $b_i, c_i$, a to tak, aby vďaka podobnosti platilo

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_{2n}}{a_{2n}} = p \quad \text{a} \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \cdots = \frac{c_{2n}}{a_{2n}} = r$$

pre nejaké $p$, $r$ kladné.




Teraz vyjadríme obvod $n$-uholníkov pomocou strán našich trojuholníkov. Kedže susedné strany $2n$-uholníka nikdy nepatria do toho istého trojuholníka, dostávame, že obvod prvého $n$-uholníka je $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + b_{2k-1} + c_{2k-1}$ a druhého $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + b_{2k} + c_{2k}$. Naše $n$-uholníky sú zhodné, preto majú rovnaké obvody, a teda dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + b_{2k-1} + c_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + b_{2k} + c_{2k}.$$

Dosadíme koeficienty podobnosti a máme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + pa_{2k-1} + ra_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + pa_{2k} + ra_{2k-1},$$

$$(1-p-r)\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = (1-p-r)\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}.$$

Pokiaľ by $1 - p - r = 0$, tak by sme dostali $a_1 - pa_1 - ra_1 = 0$, a teda $a_1 - b_1 - c_1 = 0$. Trojuholník $A_1$ by nesplňoval trojuholníkovú nerovnosť. Preto $1 - p - r$ je nenulové, môžeme ním nerovnosť vydeliť, a dostávame, že súčet dĺžok nepárnych strán je rovnaký ako súčet dĺžok párnych strán.

Poznámky:

Je dôležité si uvedomiť, že na to, aby prienik dvoch rovnakých pravidelných $n$-uholníkov bol $2n$-uholník, musia byť útvary umiestnené ako na obrázku. Toto sa dá nahliadnuť nasledovne.

Označíme pravidelné $n$-uholníky $A, B$. Pravidelný $n$-uhloník $A$ je konvexný, a preto každá úsečka ho pretína v najviac dvoch bodoch. Každá strana $n$-uholníka $B$ teda pretína $n$-uholník $A$ v práve dvoch bodoch. Tieto dva priesečníky musia ležať na susedných stranách, inak by jedna strana $n$-uholníka $A$ žiaden priesečník nemala.

Bohužial pri zadávaní tejto úlohy sme si neuvedomili, že sa treba vysporiadať aj s touto časťou úlohy, pretože skutočným cieľom nemalo byť rozoberanie postavenia $n$-uholníkov, ale dokázanie danej rovnosti. Preto sme sa rozhodli nestrhávať body za zabudnutie popisu vzájomnej polohy $n$-uholníkov a chválime riešiteľov, ktorí sa tým vo svojom riešení viac či menej zaoberali.

Samotnú rovnosť dokazovala väčšina riešiteľov podobne ako vzorové riešenie, občas ľudia zabúdali vysvetliť, prečo rovnosť môžu vydeliť. Našli sa aj nejakí, ktorí úlohu vyriešili tak, že rozložili zobrazenie, ktoré zobrazilo jeden $n$-uholník na druhý na otočenie a posunutie, a ukazovali, že tieto zobrazenia rovnosť zachovávajú, ale tieto riešenia boli väčšinou ťažkopádnejšie.

*(Marta Kossaczká)*

## Úloha 7.

*Pro $n \geq 3$ je dán konvexní $n$-úhelník $K$, jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů $n$-úhelníku $K$ nazveme pokrývací, pokud jemu opsaný kruh pokrývá $K$. Dokažte, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n-2$.*

*(Rado Švarc)*

Řešení:

Nejprve ukážeme, že existuje triangulace $K$, jejíž všechny trojúhelníky jsou pokrývací. Vezmeme si libovolnou stranu $n$-úhelníka $AB$. Pro všechny vrcholy $K$ kromě $A$ a $B$ se podíváme na úhel, pod nímž je z nich vidět úsečka $AB$ ($K$ je konvexní, proto jsou všechny tyto vrcholy v jedné polorovině určené přímkou $AB$). Označíme si $C$ vrchol, pro který je tento úhel nejmenší. Nyní z vlastností obvodových úhlů víme, že trojúhelník $ABC$ je pokrývací. Pokud $K$ je trojúhelník, jsme hotovi, jinak nechť BÚNO $AC$ není v $K$ strana, ale úhlopříčka.

Všimneme si, že pro libovolný vrchol $X$ mnohoúhelníka $K$, který neleží v polorovině $ACB$,[3] obsahuje kruh opsaný $\triangle ACX$ všechny vrcholy $K$, které jsou v polorovině $ACB$. To platí proto, že $X$ určitě leží stejně jako tyto vrcholy v kruhu opsaném $\triangle ABC$. Hraniční kružnici tohoto kruhu nazveme $k$. Kružnice $l$ opsaná $\triangle ACX$ je v polorovině $ACX$ uvnitř kružnice $k$ a má s ní právě dva společné body $A$, $C$. V polorovině $ACB$ tedy leží vně $k$, a proto v ní v této polorovině leží vše, co leží v kružnici $k$. Kruh opsaný trojúhelníku $ACX$ tedy pokrývá část $K$ ležící v polorovině $ACB$.

Díky tomu můžeme stejným způsobem, jakým jsme našli $ABC$, najít trojúhelník pokrývací část $K$ ležící v polorovině $ACX$ s jednou hranou $AC$. Z předchozího víme, že je tento trojúhelník pokrývací i pro celý $K$. Dalším aplikováním tohoto postupu na každou úhlopříčku $K$, která se stane hranou nějakého pokrývacího trojúhelníka, najdeme triangulaci, kterou jsme hledali.

Tím jsme ukázali, že v $K$ je alespoň $n-2$ pokrývacích trojúhelníků, právě tolik trojúhelníků totiž má každá triangulace. Nyní stačí ukázat, že žádné další pokrývací trojúhelníky už neexistují.

Buď $L$, $M$, $N$ a $O$ vrcholy $K$, které leží na obvodu $K$ v tomto pořadí. Ukážeme, že nemůže existovat pokrývací trojúhelník se stranou $LN$ a současně jiný se stranou $MO$. Kdyby existovaly, musela by úsečka $MO$ ležet v nějaké kružnici nad úsečkou $LN$. Z vlastností obvodových úhlů by tedy musel být součet velikostí úhlů $LMN$ a $NOL$ větší než $180^\circ$. Současně by ale symetricky musel být větší než $180^\circ$ i součet úhlů $MNO$ a $OLM$, což je ve sporu s tím, že součet úhlů ve čtyřúhelníku $LMNO$ je $360^\circ$.

Protože už ale máme triangulaci z pokrývacích trojúhelníků, musel by každý další trojúhelník protínat nějaký již nalezený způsobem, o němž jsme právě dokázali, že není možný. Pokrývacích trojúhelníků je tedy právě $n-2$ a tvrzení je dokázáno.

Poznámky:

Zhruba třetina řešitelů se snažila úlohu řešit od začátku indukcí, což typicky vedlo k dlouhému řešení, které se podařilo dovést do úspěšného konce jen *Pavlu Turkovi.*

Další asi polovina řešení více či méně kopírovala vzorák, mnozí řešitelé však zapomněli na poslední část, tedy ukázat, že žádné jiné pokrývací trojúhelníky neexistují. Ti dostali po čtyřech bodech. Několika řešitelům se naopak povedlo krásně sepsané kompletní řešení, ti pak byli po zásluze odměněni $+i$.

*(Viki Němeček)*

[3] Značením „polorovina $ACB$“ máme na mysli polorovinu s hraniční přímkou $AC$, v níž leží bod $B$.

## Úloha 8.

*Rado a kaktus hrají logickou hru s pravidelným $(2n+1)$-úhelníkem, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Hrají střídavě, přičemž Rado začíná a každý z nich ve svém tahu začerní jeden dosud nezačerněný vrchol. Vyhraje ten, po jehož tahu na papíře nezbude žádný ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech původního $(2n+1)$-úhelníku. V závislosti na $n$ určete, kdo má vyhrávající strategii.*

*(Rado van Švarc)*

ŘEŠENÍ:

Úlohu budeme řešit indukcí, ale protože vůbec není vidět, jak provádět indukční krok, uděláme nejprve několik pozorování, které nám úlohu převedou na jinou, lépe uchopitelnou.

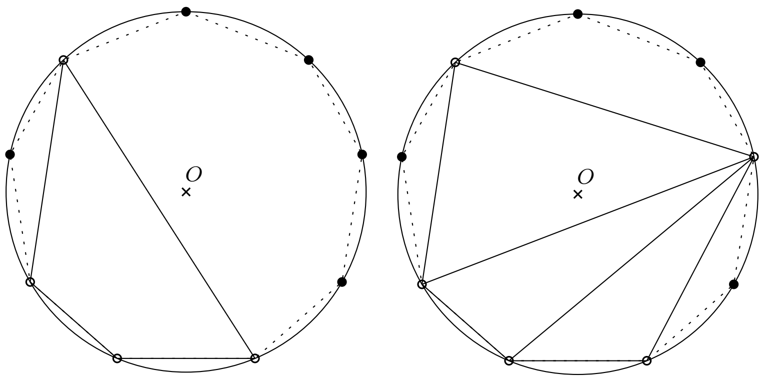
Označme si střed kružnice opsané našemu mnohoúhelníku jako $O$. Pokud $A$, $B$ a $C$ jsou tři různé vrcholy mnohoúhelníka, pak $\sphericalangle ABC$ je ostrý právě tehdy, když je oblouk $ABC$ delší než polovina obvodu kružnice. To nastane právě tehdy, když je $O$ (ostře) na stejné straně od $AC$ jako $B$. To samé uděláme i pro úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle CAB$ a dostaneme, že $\triangle ABC$ je ostroúhlý právě tehdy, když $O$ leží uvnitř něj. S tímto pozorováním lehce vydedukujeme následující lemma.

**Lemma.** *Ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech neexistuje právě tehdy, když existuje $n$ začerněných za sebou jdoucích vrcholů.*

*Důkaz.* Vytvořme si konvexní mnohoúhelník $M$ z nezačerněných vrcholů. Nechť $AB$ je jedna jeho strana. Bod $O$ leží od $AB$ ve stejné polorovině jako zbytek $M$ právě tehdy, když mezi $A$ a $B$ je nejvýše $n-1$ vrcholů. Z toho plyne, že neexistence $n$ začerněných vrcholů vedle sebe je ekvivalentní tomu, že od každé strany $M$ leží $O$ ve stejné polorovině určené tou stranou jako zbytek $M$, neboli $O$ leží uvnitř $M$.

Nyní pokud by existoval ostroúhlý trojúhelník z nezačerněných vrcholů, pak $O$ leží uvnitř něj, takže neexistuje $n$ za sebou jdoucích začerněných vrcholů.

Na druhou stranu pokud neexistuje $n$ za sebou jdoucích začerněných vrcholů, pak $O$ leží uvnitř $M$, takže rozřezáním $M$ na trojúhelníky určitě najdeme nějaký, uvnitř kterého je $O$ (nemůže být na hraně, protože $2n+1$ je liché číslo), a tento trojúhelník proto bude ostroúhlý. $\square$

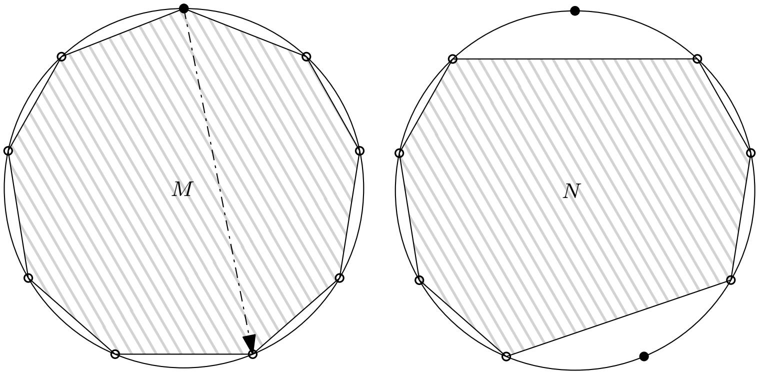



Nyní si všimněme, že se v tuto chvíli už vůbec nemusíme zabývat ostroúhlými trojúhelníky a náš $(2n+1)$-úhelník nemusí být pravidelný. Stačí uvažovat, že Rado a kaktus prostě hrají na obecném $(2n+1)$-úhelníku a vyhrává ten, kdo první začerní $n$ za sebou jdoucích vrcholů. Tady už vcelku jednoduchou indukcí ukážeme, že Rado nemá šanci.

Pro $n = 2$ hrajeme na pětiúhelníku. Tam vyhraje ten, kdo první začerní dva za sebou jdoucí vrcholy. Tudíž Rado prvním tahem určitě nevyhraje, ale kaktus jednoduše vyhraje druhým tahem tak, že začerní jeden ze sousedních vrcholů.

Nyní nechť kaktus umí vyhrát pro $(2n-1)$-úhelník pro $n > 2$. Ukážeme, že umí vyhrát i pro $(2n+1)$-úhelník, který si označíme $M$. Cílem je zjevně jako první začernit $n$ za sebou jdoucích vrcholů.

Ať Rado v prvním tahu zahraje kamkoliv (nazvěme tento vrchol $R$), kaktus zahraje do jednoho z vrcholů, které jsou nejdál od Radem začerněného (nazvěme jím zvolený vrchol $K$). Takže budou začerněné dva vrcholy, které mezi sebou mají $n$ nezačerněných vrcholů v jednom směru a $n-1$ ve druhém. Nyní si kaktus představí, že se hraje jen na $(2n-1)$-úhelníku ze zbývajících vrcholů, který nazveme $N$. Tam už zná vyhrávající strategii a hraje podle ní.




Proč tento postup funguje? Zjevně jde o to ukázat, že souvislý úsek $n$ začerněných vrcholů v $M$ vznikne právě tehdy, když v $N$ vznikne souvislý úsek $n-1$ začerněných vrcholů.

Prvně, pokud v $M$ je souvislý začerněný úsek délky $n$, pak určitě v $N$ je souvislý úsek délky $n-1$. To platí proto, že souvislý úsek délky $n$ nemůže obsahovat zároveň $R$ i $K$, a tedy v $N$ se toto projevuje jako souvislý úsek délky $n$ nebo $n-1$.

Na druhou stranu, nechť v $N$ existuje $n-1$ za sebou jdoucích začerněných vrcholů. Potom tento úsek v $M$ obsahuje uvnitř sebe nebo alespoň na jedné straně od sebe jeden z vrcholů $R$ nebo $K$, protože nejdelší úsek mezi $R$ a $K$ má $n$ vrcholů. Pak se ale do tohoto úseku dá $R$ nebo $K$ přidat a dostaneme souvislý úsek začerněných vrcholů v $M$ délky $n$.

Tím máme hotovo a dostáváme z toho, že Rada vždycky rozdrtí kaktus.

POZNÁMKY:

Indukce byla v takovéto neindukční úloze celkem trik a to se také projevilo na počtu správných řešení. Obzvlášť u takovéto obtížně stravitelné úlohy bych rád pochválil všechny, kteří se snažili psát svá řešení tak, aby se dala číst :) *(Rado van Švarc)*