Rovnostranné trojúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

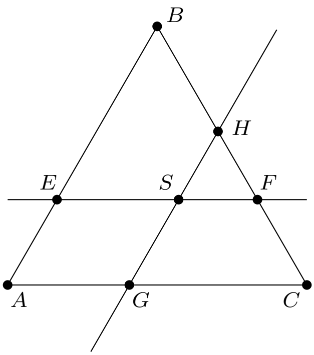
Je dán rovnostranný trojúhelník. Dokreslete do obrázku dvě přímky tak, aby se v něm pak nacházely čtyři rovnostranné trojúhelníky (mohou se překrývat).

(Tonda Le)

ŘEŠENÍ:

Dovnitř rovnostranného trojúhelníku ABC nakreslíme bod S. Potom jím vedeme dvě přímky, každou rovnoběžně s jinou stranou trojúhelníka. Tyto dvě přímky vytvoří spolu s původním trojúhelníkem čtyři rovnostranné trojúhelníky.

Pokud jedna z přímek protíná strany trojúhelníka AB a BC v bodech E a F a druhá protíná strany AC a BC v bodech G a H, dostaneme rovnostranné trojúhelníky ABC, EBF, GHC, SHF.



POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu vyřešila správně a různými způsoby popsala, jak přímky nakreslí. Někteří se poněkud zbytečně snažili dokazovat věci navíc, např. že více trojúhelníků se za pomocí dvou přímek nakreslit nedá, což nebylo součástí úlohy. Jiní poslali pouze obrázek bez dalšího vysvětlení, to také není zcela správně, řešení je třeba ve většině případů vysvětlit i slovně.

Bod S se může nacházet i vně trojúhelníka ABC, pokud bude osově souměrný s některým bodem, který je uvnitř trojúhelníku. Čtyři rovnostranné trojúhelníky pak budou vypadat podobně, jenom HSF bude vně trojúhelníka ABC.

(Zuzka Svobodová)

Úloha 2.

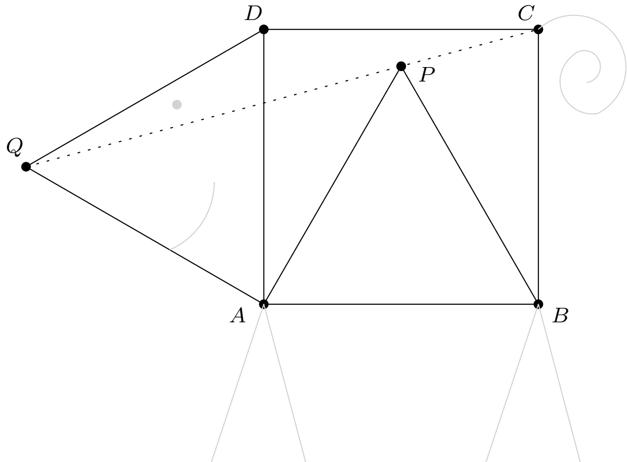
Je dán čtverec $ABCD$. V něm je vyznačený bod P takový, že je trojúhelník ABP rovnostranný. Mimo čtverec zvolme bod Q tak, aby byl trojúhelník ADQ rovnostranný. Dokažte, že body Q, P a C leží na jedné přímce.

(Tonda Le/David)

Řešení:

Dokážeme, že $\sphericalangle QPC$ je úhlem přímým. V rovnostranném trojúhelníku jsou velikosti všech úhlů rovné $60°$. Protože je $\sphericalangle BAD$ pravý a $|\sphericalangle BAP| = 60°$, z jejich rozdílu dostáváme: $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle BAP| = 90° - 60° = 30°$. Dále platí $|\sphericalangle QAP| = |\sphericalangle QAD| + |\sphericalangle PAD| = 60° + 30° = 90°$.

Trojúhelník QAP je tedy pravoúhlý, a navíc je i rovnoramenný, neboť ze zadání $|QA| = |AD| = |AB| = |AP|$. Z toho důvodu a z celkového součtu úhlů v trojúhelníku platí: $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle APQ| = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$. Trojúhelník BPC je rovněž rovnoramenný, neboť $|BP| = |BC|$. Analogicky jako jsme došli k tomu, že $|\sphericalangle PAD| = 30°$, je $|\sphericalangle PBC| = 30°$. Pro velikost úhlu $|\sphericalangle BPC|$ platí: $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BCP| = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Tím jsme skoro hotovi. Úhel $\sphericalangle QPC$ je součtem tří úhlů: $|\sphericalangle QPC| = |\sphericalangle QPA| + |\sphericalangle APB| + |\sphericalangle BPC| = 45° + 60° + 75° = 180$. Body Q, P a C svírají úhel $180°$, tedy leží na přímce.



Poznámky:

Řešení se dělila především na dvě velké skupiny – podobná vzorovému a dokazující shodnou velikost úhlů QCD a PCD, což bylo provedeno mnoha různými způsoby (podobnost trojúhelníků, úhlení, směrnice, ...). Ta byla povětšinou správná. Další skupiny byly opět dvě – analytická řešení a řešení se špatným předpokladem. Analytická řešení se mi nelíbila, takové lehké úlohy, jakou tato byla, je nehezké řešit analyticky. Všechna tato řešení byla správná a ne až tak ošklivá, proto jsem jim nakonec záporné imaginární body nedal. Poslední kategorií byla řešení implicitně využívající faktu, že body Q, P a C tvoří přímku. Tato řešení využívala souhlasných úhlů nebo faktu, že například součet úhlů $|\sphericalangle PQA| + |\sphericalangle QAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCP| = 360°$ – tedy, že P už na straně QC čtyřúhelníku $ABCQ$ leží. Taková řešení ode mě dostala po bodu, většinou za zbytek řešení či úhlení.

(Jan Kadlec)

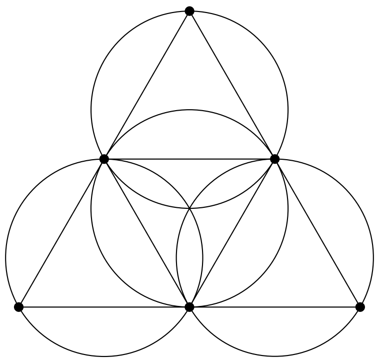
Úloha 3.

V rovině leží pět shodných rovnostranných trojúhelníků, které mohou být různě natočené. Dokažte, že pro každý z nich lze zbylé trojúhelníky bez otáčení posunout tak, aby ho celý zakrývaly. Trojúhelníky se mohou překrývat.

(Honza)

Řešení:

Libovolný trojúhelník (budeme ho zvát velký) ze zadání se dá rozdělit pomocí středních příček na čtyři shodné trojúhelníky (zveme malé) s poloviční délkou hrany. Kružnice opsaná malému trojúhelníku má stejnou velikost jako kružnice vepsaná velkému trojúhelníku. Malý trojúhelník se do ní celý vejde. Velký trojúhelník rozdělený středními příčkami pokryjeme tak, že každý ze čtyř velkých trojúhelníků umístíme těžištěm do těžiště jednoho z malých trojúhelníků. U každé dvojice splyne kružnice vepsaná velkého trojúhelníka a kružnice opsaná malého, a tím musí být všechny čtyři části velkého trojúhelníka pokryty, tedy i celý velký trojúhelník musí být pokryt.



Poznámky:

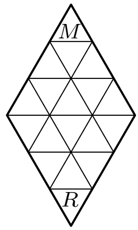
Někteří řešitelé si všimli, že nám k pokrytí stačí dokonce jen tři trojúhelníky – umístíme je stejně jako když umisťujeme čtyři ve vzorovém řešení, ale vynecháme trojúhelník s těžištěm v těžišti pokrývaného velkého trojúhelníka. Argument, že jeden z trojúhelníků umístíme doprostřed pokrývaného trojúhelníka a zbylými třemi se to už určitě podaří dopokrýt, nebyl uznávám, protože u něj chybí důkaz.

(Zuzka Svobodová)

Úloha 4.

Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n-krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo buď jako první stoupne na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii[1].

[1] Hráč má vyhrávající strategii, pokud umí vyhrát nezávisle na tom, jak táhne jeho protivník.

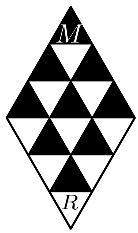


Situace na začátku hry pro $n = 3$

(Kuba L.)

Řešení:

Políčka hracího plánu obarvíme černou a bílou barvou tak, aby Michal stál na začátku hry na černém políčku a aby každá dvě políčka sousedící hranou měla různou barvu.



Obarvený hrací plán pro $n = 3$

Platí, že vždy po vykonání tahu se hráč přesune na políčko opačné barvy. Na začátku hry stojí hráči na políčkách různých barev a Michal začíná. Tudíž vždy po Michalově tahu budou hráči stát na políčkách stejné barvy a po Radově tahu budou stát na políčkách různých barev. Speciálně tedy po Radově tahu nemohou stát oba hráči na stejném políčku. Není tedy možné, aby Rado vyhrál tím, že si stoupne na políčko, na kterém stojí Michal.

Michalova vítězná strategie je tedy dojít nejkratší cestou do protějšího políčka. Jelikož hrací plán je symetrický a Michal začíná, nemůže se stát, že by Rado došel do protějšího políčka dříve než on. Michal proto nutně vyhraje – buď tím, že dojde do protějšího políčka, nebo tím, že se někdy cestou postaví na políčko, kde právě stojí Rado.

Poznámky:

Naprostá většina došlých řešení byla správně, což mne potěšilo. Pro důkaz toho, že Rado nemůže vyhrát „zašlápnutím“ Michala, využívala buď argument obarvování, či (v podstatě stejný) argument o paritě vzdálenosti hráčů. *(Tonda Češík)*

Úloha 5.

Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC. Přímky procházející vrcholem A, které dělí úhel $\sphericalangle BAC$ na třetiny, protínají kružnici k podruhé v bodech X_1 a X_2. Body X_3 až X_6 jsou definované podobně pomocí vrcholů B a C. Navíc body $X_1, X_2, \ldots, X_6$ leží na k v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že přímky X_1X_4, X_2X_5 a X_3X_6 určují rovnostranný trojúhelník.

(Kuba Löwit)

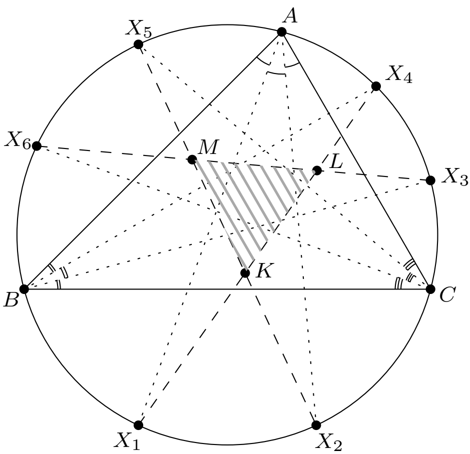
Řešení:

Označíme si úhly v trojúhelníku ABC standardně α, β a γ a dále postupně K, L, M průsečíky X_1X_4 s X_2X_5, X_1X_4 s X_3X_6 a X_2X_5 s X_3X_6.

Při výpočtu velikosti úhlu LKM použijeme shodnosti obloukových úhlů na kružnici a součtu úhlů v trojúhelníku ABC:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle LKM| &= |\sphericalangle X_4KX_5| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle KX_4X_5| - |\sphericalangle KX_5X_4| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle X_1X_4B| - |\sphericalangle BX_4X_5| - |\sphericalangle X_2X_5C| - |\sphericalangle CX_5X_4| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle X_1AB| - |\sphericalangle BCX_5| - |\sphericalangle X_2AC| - |\sphericalangle CBX_4| \\
&= 180^\circ - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta \\
&= 180^\circ - \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= 60^\circ.
\end{aligned}$$

Při hledání velikosti úhlů KLM a KML budeme postupovat analogicky. Protože jsou body X_1 až X_6 definovány podobným způsobem, pouze cyklicky pro A, B a C, zjistíme, že $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KML| = 60^\circ$. Protože všechny vnitřní úhly trojúhelníka KLM jsou shodné, je trojúhelník vždy rovnostranný.



Poznámky:

Zpravidla všechna došlá řešení byla správně. Ti, co využili obloukové lemma, které říká, jak velkému oblouku odpovídá úhel, který svírají dvě tětivy, si usnadnili práci a měli řešení na pár řádků. Někteří naopak vyjadřovali velikosti spousty úhlů, než se dobrali k hledanému úhlu, ale i tak byla jejich řešení správná.

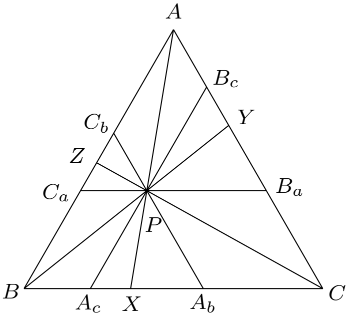
(„madam“ Verča Hladíková)

Úloha 6.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P. Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímek AP, BP, CP se stranami trojúhelníku ABC. Ukažte, že $|PX| + |PY| + |PZ| < |AB|$.

(David Hruška)

Řešení:



Bodem P povedeme rovnoběžky se všemi třemi stranami trojúhelníka ABC. Průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC nazveme A_b. Analogicky pojmenujeme i všechny ostatní průsečíky. Všimneme si, že (například kvůli souhlasným úhlům u příslušné strany trojúhelníka ABC) jsou trojúhelníky C_aC_bP, A_cA_bP i B_aB_cP rovnostranné.

Délku libovolné úsečky, která začíná ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka a končí někde v něm, můžeme shora odhadnout délkou strany (protože množina všech bodů, které jsou od vrcholu rovnostranného trojúhelníka dál než jiný jeho vrchol, je doplněk kruhu se středem v tomto vrcholu a poloměrem rovným délce strany trojúhelníka, a ten leží celý mimo trojúhelník).

Ještě potřebujeme dvě pozorování. První z nich je, že X je vnitřní bod úsečky A_cA_b a analogicky pro body Y a Z a pro úsečky B_aB_c a C_aC_b. To ale plyne z podobnosti trojúhelníků ABX a PA_cX (jelikož PA_C je rovnoběžná s AB, jsou tyto trojúhelníky stejnolehlé se středem stejnolehlosti v X).

Druhé pozorování je, že C_aPA_cB a B_aPA_bC jsou rovnoběžníky (jejich strany byly zvoleny jako rovnoběžky).

Nyní tedy víme (z druhého odstavce a prvního pozorování), že délky $|PX|$, $|PY|$, $|PZ|$ můžeme odhadnout pomocí strany rovnostranného trojúhelníka, ve kterém leží, následovně:

$$|PX| < |A_cA_b|$$
$$|PZ| < |C_aP|$$
$$|PY| < |PB_a|$$

Protože ale podle druhého pozorování platí $|C_aP| = |BA_c|$ a $|PB_a| = |A_bC|$, můžeme předchozí nerovnosti sečíst a dostaneme

$$|PX| + |PY| + |PZ| < |BA_c| + |A_cA_b| + |A_bC| = |BC| = |AB|,$$

což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:

Zhruba tři čtvrtiny řešení, která přišla, byla správně. Z nich zhruba půlka postupovala jako vzorák. Všichni ostatní úspěšní řešitelé využili toho, že vzhledem k tomu, že součet obsahů trojúhelníků ABP, BCP a CAP je roven obsahu trojúhelníka ABC, je i součet výšek z vrcholu P těchto trojúhelníků roven výšce trojúhelníka ABC.

Přišlo ale i poměrně hodně řešení, která úlohu vyřešila pro některé speciální případy, a bez důkazu tvrdila, že v ostatních případech už musí být součet ze zadání nutně menší. Některá řešení dokonce tvrdila, že maximum součtu je pro P v těžišti trojúhelníka, což není pravda. Maximum najdeme, pokud se budeme nekonečně přibližovat (právě jedné libovolné) straně. Takovým řešením jsem se nakonec rozhodl dát motivační jeden bod. *(Viki Němeček)*

Úloha 7.

V sešitě je nakreslený trojúhelník ABC, pro který platí, že úhel při vrcholu A je dvojnásobkem úhlu při vrcholu B. Anička v něm vyznačila bod P a pak si všimla, že vzdálenosti bodu P od bodů A a B jsou stejné. Navíc je délka úsečky AC stejná jako délka úsečky CP. Dokažte, že přímka CP dělí úhel při vrcholu C v poměru $2:1$.

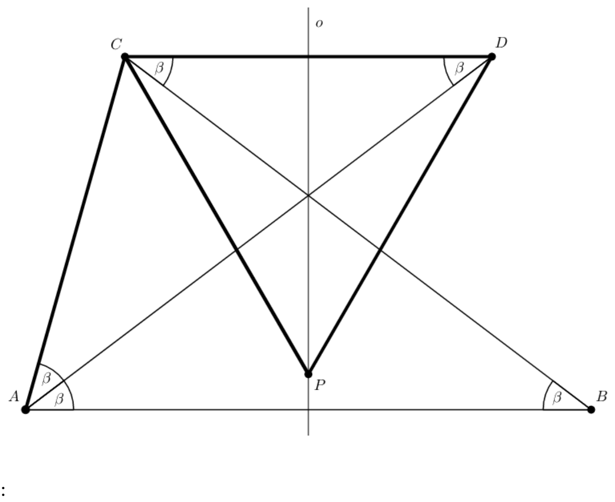
(Kuba L.)

Řešení:

Označíme si o osu AB. Nechť D je obraz bodu C v osové souměrnosti podle o. V této osové souměrnosti se dále A zobrazí na B, z čehož plyne, že AB a CD jsou rovnoběžné.

Označíme si β velikost úhlu ABC. Ze zadání víme, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2\beta$. Ze symetrie (podle o) plyne, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABC| = \beta$. Tedy také $|\sphericalangle CAD| = \beta$. Dále z rovnoběžnosti AB a CD máme rovnost střídavých úhlů $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle BAD| = \beta$ a $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ABC| = \beta$.

Anička si všimla, že $|AP| = |BP|$, tedy P leží na o, z čehož plyne, že také $|DP| = |CP|$. Ze zadání víme, že $|CP| = |AC|$. Jelikož $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA|$, tak je trojúhelník ACD rovnoramenný se základnou AD, a tudíž $|AC| = |CD|$. Celkem máme $|DP| = |CP| = |CD|$, tedy trojúhelník CPD je rovnostranný. Toho využijeme v následujícím výpočtu: $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PCD| - |\sphericalangle BCD| = 60^\circ - \beta$. Konečně pro velikost úhlu $\sphericalangle ACP$ platí: $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle BCP| = (180^\circ - 3\beta) - (60^\circ - \beta) = 120^\circ - 2\beta = 2(60^\circ - \beta) = 2|\sphericalangle PCB|$, což je kýžený poměr.



Poznámky:

Většina došlých řešení byla správně. Řešitelé postupovali podobně jako ve vzorovém řešení, někteří zkonstruovali bod D jako průsečík kružnice opsané trojúhelníku ABC a osy úhlu u vrcholu A . Pár řešitelů zvolilo náročnější cestu a k řešení se dobralo za pomoci několika sinových vět a součtových vzorců.

(Lucien Šíma)

Úloha 8.

V různostranném trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Osy úhlů CAB, BCA protínají protější strany v bodech X, Y a sebe navzájem v I. Nad úsečkou XY sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky XYP a XYQ. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku BPQ. Ukažte, že $OI \perp AC$.

(Rado Švarc)

Řešení:

BÚNO nechť P leží ve stejné polorovině určené přímkou XY jako B.

Platí $|\sphericalangle AIC| = 180^\circ - |\sphericalangle ICA| - |\sphericalangle CAI| = 180^\circ - \frac{|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB|}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - |\sphericalangle ABC|}{2} = 90^\circ + \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} = 120^\circ$. Protože $|\sphericalangle XBY| = 60^\circ = 180^\circ - |\sphericalangle XIY|$, leží body X, Y, I a B na jedné kružnici.

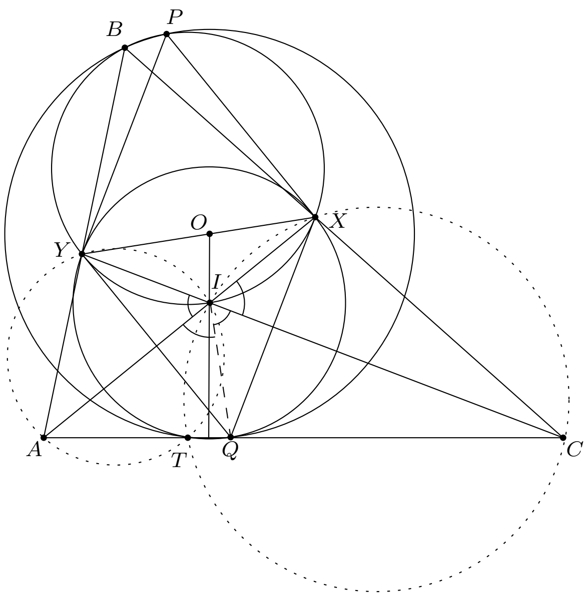
Označme si jako Q' průsečík osy úhlu AIC s úsečkou AC. Ukážeme, že $Q = Q'$.

Platí $|\sphericalangle AIY| = 180^\circ - |\sphericalangle AIC| = 60^\circ = |\sphericalangle AIQ|$. Zároveň platí $|\sphericalangle YAI| = |\sphericalangle Q'AI|$, takže Q' je obraz Y podle přímky AI. Proto je $|XY| = |XQ'|$. Analogicky dostaneme $|YX| = |YQ'|$, takže $XQ'Y$ je rovnostranný trojúhelník. Tedy $Q = Q'$.

Protože X a Y jsou obrazy Q při překlopení podle přímek AI a CI a protože I na obou těchto přmkách leží, platí také $|IX| = |IQ| = |IY|$.

Nyní nechť se kružnice opsané trojúhelníkům AIY a CIX podruhé protínají v bodě T. Platí $|\sphericalangle ATI| = 180^\circ - |\sphericalangle AYI| = |\sphericalangle BYI| = 180^\circ - |\sphericalangle BXI| = |\sphericalangle CXI| = 180^\circ - |\sphericalangle CTI|$. Z toho plyne, že T leží na AC. Zároveň však $|\sphericalangle TYX| = |\sphericalangle TYI| + |\sphericalangle IYX| = |\sphericalangle TAX| + |\sphericalangle IXY| = |\sphericalangle XAY| + |\sphericalangle YXA| = 180^\circ - |\sphericalangle AYX| = |\sphericalangle XYB|$, kde jsme využívali obvodové úhly v tětivových čtyřúhelnících a fakt, že XIY je rovnoramenný trojúhelník. Máme tedy $|\sphericalangle TYX| = |\sphericalangle XYB|$. Analogicky dostaneme $|\sphericalangle TXY| = |\sphericalangle YXB|$. Takže T je obraz B podle přímky XY.

Zjevně Q je obraz bodu P při překlopení podle přímky XY. Protože T je obrazem B podle této přímky, je úsečka TQ obrazem BP při tomto překlopení. Proto je $PQTB$ rovnoramenný lichoběžník, tedy T leží na kružnici opsané BPQ. Z toho plyne, že O leží na ose úsečky TQ. Zároveň platí $|\sphericalangle XTY| = |\sphericalangle XBY| = 60^\circ = |\sphericalangle XQY|$, tedy T leží na kružnici opsané XYQ. Ale už jsme ukázali, že $|IX| = |IQ| = |IY|$, tedy I je střed kružnice opsané XYQ. Takže I leží také na ose úsečky TQ. Proto je OI osa úsečky TQ, takže skutečně $OI \perp AC$.



Poznámky:
Většina přijatých řešení byla správně. Každá dvě řešení byla různá a sešla se celá plejáda různých přístupů, z nichž takřka všechny dospěly do úspěšného konce. Vzorové řešení si popůjčovalo myšlenky z několika různých přijatých řešení, aby byl výsledný vzorák co nejelegantnější.

(Rado Švarc)