Geometrie trojúhelníka 3

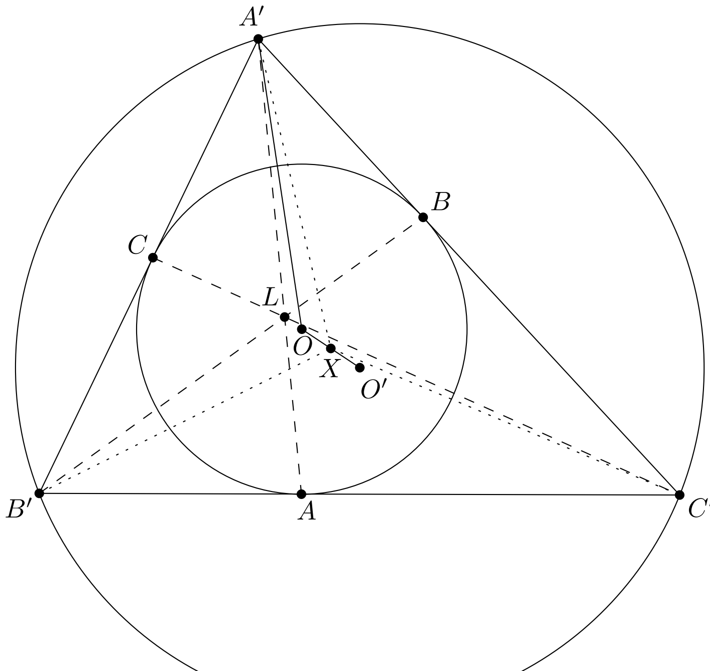
3. SERIÁLOVÁ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Je dán ostroúhlý nerovnostranný trojúhelník ABC. Tečny k jeho kružnici opsané vedené vrcholy B a C se protínají v bodě, který označíme A' a podobně definujeme body B' a C'. Označme O opsiště trojúhelníku ABC, L jeho Lemoinův bod a O' opsiště trojúhelníku $A'B'C'$. Obraz přímky LA' podle osy úhlu $B'A'C'$ označme l_A a podobně definujeme přímky l_B a l_C. Dokažte, že přímky l_A, l_B, l_C a OO' procházejí jedním bodem.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:



Je známé, že přímka AA' je symediánou trojúhelníku ABC, tudíž L je průsečík přímek AA', BB', CC'. Nyní se podíváme na všechno z pohledu trojúhelníka $A'B'C'$. Kružnice opsaná ABC je vlastně kružnice vepsaná $A'B'C'$, a proto L je Gergonův bod v $A'B'C'$. Nechť X je kamarádem bodu L. Pak X podle definice leží na l_A, l_B, i l_C. Podle tvrzení na osmé straně třetího dílu seriálu je X

středem záporné stejnolehlosti převádějící kružnici vepsanou $A'B'C'$ na kružnici opsanou $A'B'C'$; leží tudíž i na spojnici jejich středů O a O'.

Poznámky:
S klíčovou znalostí o kamarádu Gergonova bodu se úloha stala jednoduchou. Drtivá většina došlých řešení postupovala stejně jako to vzorové a téměř všichni dostali plný počet bodů.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 2.

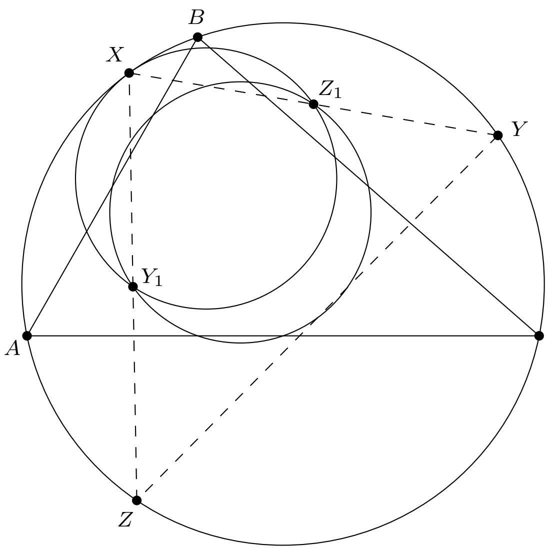
Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Γ a Feuerbachovou kružnicí γ. Buď X bod na Γ. Nechť Y a Z jsou dva různé body na Γ takové, že středy úseček XY a XZ leží na γ. Navíc platí, že trojúhelník XYZ je ostroúhlý. Ukažte, že střed YZ leží na γ.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme jako γ' Feuerbachovu kružnici trojúhelníku XYZ. Ukážeme, že $\gamma = \gamma'$. Potom zjevně střed YZ bude ležet na γ.

Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, leží jeho kolmiště uvnitř trojúhelníka. Takže γ jako obraz Γ ve stejnolehlosti se středem v tomto kolmišti a koeficientem stejnolehlosti $\frac{1}{2}$ leží celá uvnitř Γ a speciálně ji neprotíná. Analogicky si uvědomíme, že γ' a Γ se neprotínají.

Označme R poloměr kružnice Γ, pak γ i γ' mají poloměr $\frac{R}{2}$. Označme si střed XZ a XY jako Y_1 a Z_1. Kružnice procházející skrze Y_1 a Z_1 s poloměrem $\frac{R}{2}$ jsou dvě. Jedna z nich je kružnice opsaná trojúhelníku XY_1Z_1, která má správný poloměr, protože je to obraz Γ ve stejnolehlosti se středem v X a koeficientem $\frac{1}{2}$. Tato kružnice ovšem protíná Γ, takže se nemůže shodovat ani s jednou z γ a γ'. Tedy obě dvě musejí být rovny té druhé kružnici procházející Y_1, Z_1 s poloměrem $\frac{R}{2}$ a tedy i sobě navzájem.



Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná, občas ovšem řešitelé zapomněli říci, že se jedná o „tu správnou“ z oněch dvou možných kružnic. Za to jsem strhával jeden bod.

Na otázku „Jak toto souvisí s třetím dílem seriálu?“ se dá odpovědět „Ponceletovo porisma“. Úloha se zdála být podobná Ponceletovu porismatu (máme dvě kružnice, které jsou někdy opsaná a Feuerbachova a chceme ukázat, že pak už jsou „vždycky“ opsaná a Feuerbachova). Pro ty z vás, kteří znají inverzi byla úloha dokonce i přímo řešitelná Ponceletovým porismatem: po inverzi úlohy dle Γ bychom dostali přesně Ponceletovo porisma.

(Rado van Švarc)

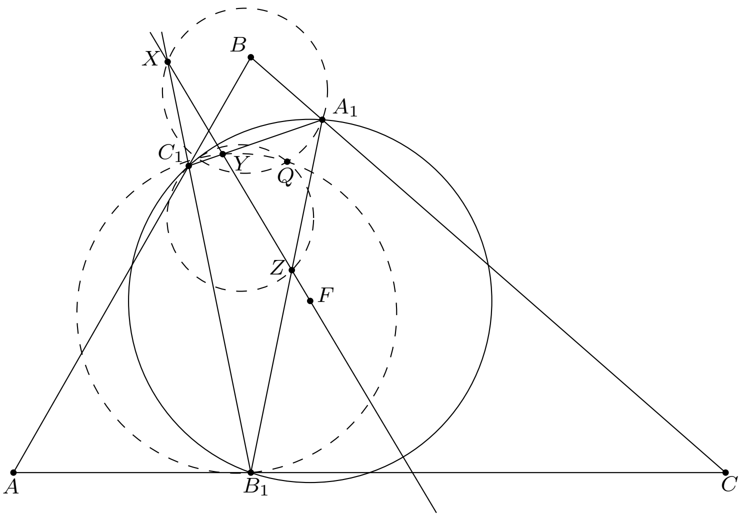
Úloha 3.

Nechť ABC je různostranný trojúhelník s kolmištěm H a opsištěm O. Paty výšek na strany BC, CA a AB označme popořadě A_1, B_1 a C_1. Přímka OH protíná přímky B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1 postupně v bodech X, Y a Z. Ukažte, že kružnice nad průměry A_1X, B_1Y a C_1Z mají všechny společný bod.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Přímka OH je Eulerovou přímkou trojúhelníku ABC, tedy prochází i středem F jeho Feuerbachovy kružnice. Tato kružnice je kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1B_1C_1$, takže dle druhé Fonteného věty platí, že na Feuerbachově kružnici trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží takový bod Q, že pro každý bod P na této přímce OH kružnice opsaná patám z P na přímky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 prochází bodem Q.

Nyní si stačí uvědomit, že kružnice opsaná patám z X (resp. Y, resp. Z) na strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ splývá s kružnicí nad průměrem A_1X (resp. B_1Y, resp. C_1Z). Takže všechny tyto kružnice procházejí bodem Q a jsme hotovi.



Poznámky:
Všechny doraziviší úlohy dosáhly na plný počet bodů. Udělali jste mi fakt radost.

Danil Koževnikov se krom vzorového řešení pokusil úlohu zobecnit a dokázat, že pro libovolný trojúhelník ABC a trojici kolineárních bodů X, Y a Z na přímkách určených jeho stranami BC, CA a AB procházejí kružnice nad průměry AX, BY a CZ jedním bodem. Bohužel ovšem v poslední části důkazu udělal chybu, jinak by si vysloužil $+i$.

(Rado van Švarc)