Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Anička o prázdninách navštívila muzeum, ve kterém byla vystavena starodávná tabulka o n řádcích a 2017 sloupcích vyplněná reálnými čísly. Součty čísel ve všech jejích sloupcích byly navzájem různé. Anička tabulku omylem shodila a všechna políčka z ní vypadala. Teď by ráda čísla vrátila zpátky tak, aby součty nejen ve všech sloupcích, ale i ve všech řádcích byly navzájem různé.[1] *Podaří se jí to pro jakákoliv čísla v tabulce, pokud*

(a) $n = 2$,

(b) $n = 2017$? *(Rado van Švarc)*

ŘEŠENÍ:

(a) Ano, pro $n = 2$ se jí to podaří.

Začne tím, že políčka umístí do tabulky tak, jak v ní byly předtím. V tu chvíli mají sloupce určitě různé součty. Pokud mají i řádky různé součty, jsme hotovi. Předpokládejme, že mají tedy oba řádky stejné součty.

Pokud jsou v nějakém sloupci dvě různá čísla, můžeme je prohodit, čímž se nám zachovají součty sloupců, ale součet jednoho řádku vzroste a druhého klesne. Tím dostaneme různé součty řádků a máme hotovo.

Zbývá nám případ, kdy jsou v každém sloupci dvě stejná čísla. Protože sloupce mají různé součty, bude v každém sloupci jiná dvojice čísel. Označme si tři nejmenší čísla v tabulce jako $x < y < z$. Ve třech sloupcích, které odpovídají těmto číslům, čísla proházíme následujícím způsobem: Z políček vytvořme uspořádané dvojice (x, y), (x, z) a (y, z), a ty umístěme do sloupců tak, aby první člen dvojice byl vždy v prvním řádku. Tím se součet prvního, resp. druhého řádku sníží, resp. zvýší o $z - x$, takže řádky už budou mít různé součty. Navíc tyto pozměněné tři sloupce budou mít různé součty $x + y < x + z < y + z$, které jsou navíc všechny menší než $2z$, a tudíž i menší než všechny další součty sloupců v tabulce. Takže máme hotovo.

(b) Ne, pro $n = 2017$ se jí to nepodaří.

Předpokládejme, že je tabulka na začátku vyplněná tak, aby v prvním sloupci byly samé nuly a pro $i > 1$ bylo v i-tém sloupci i jedniček a $2017 - i$ nul.

Pro spor předpokládejme, že lze políčka přeskupit požadovaným způsobem. Všimněme si, že součty ve sloupcích nabývají jen celočíselných hodnot mezi 0 a 2017. Proto pokud je v každém sloupci jiný součet, musí být mezi součty sloupců vynecháno právě jedno celé číslo mezi 0 a 2017. Protože navíc víme, že součet součtů sloupců je roven $0 + 2 + 3 + \cdots + 2017$, musí být vynechána jednička. To speciálně znamená, že existuje sloupec se samými nulami (ten se součtem nula) a sloupec se samými jedničkami (ten se součtem 2017). Ovšem analogickou úvahou získáme to samé pozorování o řádcích. Ale sloupec se samými jedničkami a řádek se samými nulami nemohou existovat zároveň, což je hledaný spor. Anička tedy nemůže docílit stavu, kdy by ve všech řádcích i ve všech sloupcích byly různé součty.

[1] Součet čísel v nějakém řádku se ale může rovnat součtu čísel v některém sloupci.

Poznámky:
První část úlohy nebyla těžká, ale mnoho řešitelů udělalo chybu, když si čísla x, y, z zvolili libovolně. Potom totiž nebylo možné zaručit, že součet jednoho z nově vzniklých součtů sloupce není roven součtu jiného sloupce v tabulce. Za tuto chybu jsem strhával bod. *(Rado van Švarc)*

Úloha 2.

(a) *Tonda narazil na n po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součtem je prvočíslo. Určete všechny možné hodnoty n.* *(Jan Krejčí)*

(b) *Orgové PraSátka na schůzce debatovali o tom, kam se půjde na PraSečí výlet. Zaznělo několik nápadů a každý z nich podporovalo právě k organizátorů z celkově $2k$ přítomných. Ukázalo se, že pro libovolnou $(k-1)$-člennou skupinu organizátorů existuje právě jeden návrh, který podporuje celá skupina. Dokažte, že potom $(k+1)$ je prvočíslo.* *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
(a) Ukážeme, že jediné hodnoty, kterých n může nabývat, jsou jedna a dvě. Prvočíslo 43 lze triviálně napsat jako součet jednočlenné posloupnosti čísel, navíc jej lze napsat jako součet dvoučlenné posloupnosti $21+22$, pro n rovno jedné či dvěma tedy taková posloupnost opravdu existuje.

Pro $n>2$ uvažme nějakou posloupnost n po sobě jdoucích čísel a nejmenší z nich označme k. Potom si součet uvažovaných čísel upravíme[2] na

$$k+(k+1)+\cdots+(k+n-1)=\frac{n}{2}\cdot(k+(k+n-1))=n\cdot\left(k+\frac{n-1}{2}\right).$$

Pro sudá n je číslo $\frac{n}{2}$ přirozené a větší než jedna, stejně tak $2k+n-1$ je větší než jedna, protože k i n jsou alespoň jedna. Pro n liché je $n>1$ z předpokladu a $k+\frac{n-1}{2}$ je přirozené číslo větší než jedna. V obou případech jsme schopni součet napsat jako součin dvou přirozených čísel, která jsou větší než jedna, takže se nemůže jednat o prvočíslo.

(b) (podle Viktora Fukaly) Po celou dobu předpokládáme, že k je přirozené. Zjevně platí $k+1>1$. Pokud tedy dokážeme, že $k+1$ není dělitelné žádným menším prvočíslem, budeme hotovi. O k-členné skupině orgů, která hlasovala pro jeden nápad, mluvme jako o *klice*.

Mějme $0\le r\le k-2$ a libovolnou skupinu r organizátorů. Pro každý návrh, který podporují všichni z nich, je možné tuto r-člennou skupinu doplnit $k-r$ způsoby na $(k-1)$-člennou skupinu, která bude hlasovat pro tento návrh (z odpovídající kliky můžeme vybrat $k-r$ způsoby člověka, kterého do výsledné $(k-1)$-členné skupiny nezařadíme). To znamená, že počet všech $(k-1)$-členných skupin obsahujících námi vybranou skupinu r organizátorů musí být dělitelný číslem $k-r$, neboť ze zadání víme, že každá $(k-1)$-členná skupina musí být součástí právě jedné kliky. Protože $(k-1)$-členných skupin obsahujících našich r organizátorů je $\binom{2k-r}{k-1-r}$, dostáváme

$$k-r\mid\binom{2k-r}{k-1-r}.$$

Pro libovolné prvočíslo $1<p<k+1$ lze nyní zvolit $0\le r\le k-2$ takovým způsobem, aby $k-r=p$. Potom

$$\binom{2k-r}{k-1-r}=\frac{(2k-r)!}{(k-r-1)!(k+1)!}=\frac{(k+2)(k+3)\dots(2k-r-1)(2k-r)}{(k-1-r)!}.$$

Protože $p=k-r$ je prvočíslo a dělí poslední zlomek, musí dělit jednu ze závorek v čitateli, řekněme A. Pokud by navíc $k-r$ dělilo $k+1$, muselo by $k-r$ dělit i $A-(k+1)$. Ovšem rozdíl $A-(k+1)$ je větší než nula a menší než $k-r$, což nelze. Tedy dohromady dostáváme, že $k+1$ není dělitelné žádným prvočíslem menším než $k+1$, takže je to prvočíslo, čímž jsme hotovi.

[2] Jedná se o součet aritmetické posloupnosti pro $a_1=k$, $a_n=k+n-1$ a diferenci $d=1$.

Poznámky:

Častou chybou bylo, že v řešení byl uvedený součet jako ve vzorovém řešení části **(a)**, aniž by bylo definováno, co sčítáme (záhadně se tam objevila neznámá, která nikde předtím nebyla definovaná). Kromě tohoto formálního nedostatku byla většina řešení části **(a)** správně. Odevzdaných částí **(b)** bylo o poznání méně. V této části si za hezké a krátké řešení zasloužil $+i$ Viktor Fukala, podle kterého je sepsaný i vzorák. *(Honza Krejčí)*

Úloha 3.

(a) *Na bleším trhu si Honza koupil hodinový ciferník s obvykle umístěnými čísly od jedné do dvanácti. Zvláštní je ale tím, že se s čísly dá hrát. Honza každé ráno buď vyměnil dvě protilehlá čísla, nebo dvě sousední o jedna zvýšil. Kdyby žil dost dlouho, mohl by po konečně mnoha dnech mít na ciferníku dvanáct stejných čísel?* *(Honza Krejčí)*

(b) *Na ostrově je n nor a v každé z nich žije jeden ptakopysk. Je známo, že každému ptakopyskovi se líbí jedna nora, a ta se nelíbí žádnému jinému. Po velkém ptakopyscím zasedání bylo rozhodnuto, že se všichni ptakopysci přestěhují do nor, které se jim líbí. Probíhá to následovně: Během jednoho dne si může každý ptakopysk vyměnit noru s jediným dalším. Určete nejmenší počet dní, který jim ke stěhování stačí, ať už je situace sebezapeklitější.* *(Kuba Löwit)*

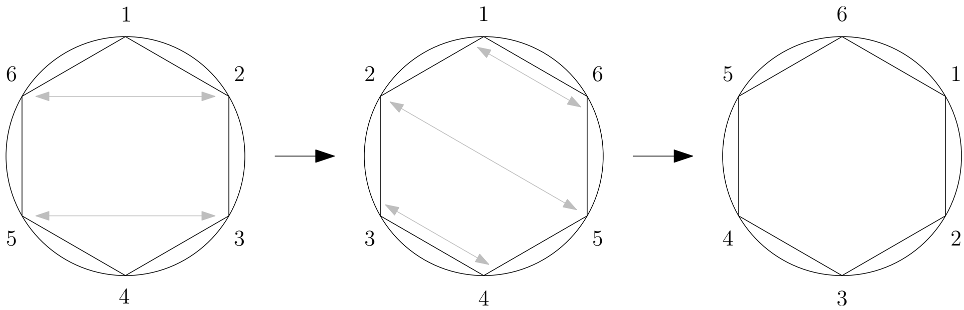
Řešení:

(a) Obarvěme si modře čísla na ciferníku, která byla na začátku sudá, a zbylá obarvěme červeně. Na začátku byl součet modře obarvených čísel $2 + 4 + \cdots + 12 = 42$, zatímco součet červeně obarvených čísel byl $1 + 3 + \cdots + 11 = 36$, tedy o 6 méně. Nyní si stačí všimnout, že se tento rozdíl po žádné z Honzových operací nezměnil. Vskutku, pokaždé, když Honza prohodil dvě protilehlá čísla, byla buď obě dvě červená, nebo obě dvě modrá, a barva čísla umístěného na dané pozici se tak nezměnila. Jestliže přičetl jedničku ke dvěma vedlejším číslům, jedno z nich bylo modré a druhé červené, rozdíl odpovídajících součtů tedy zůstal stejný. Na Honzově ciferníku se proto nikdy neobjevilo dvanáct stejných čísel – pokud by se tak stalo, pak by rozdíl součtu modrých a červených čísel musel být 0.

(b) Není těžké ověřit, že pokud $n = 1$, nejsou potřeba žádné operace, a pokud $n = 2$, potřebné prohození dvou ptakopysků se dá zvládnout za jeden den. Dále předpokládejme, že $n > 2$. Všimněme si, že situace, kdy ptakopysk p_1 touží po noře ptakopyska p_2, p_2 se chce přestěhovat k p_3 a p_3 by rád bydlel u p_1, se již nedá zvládnout za jeden den. Ukážeme, že sebezapeklitější situace se dá (nezávisle na n) vyřešit za dva dny.

Ze zadání víme, že každý ptakopysk bydlí v jedné noře a v každé noře chce bydlet jeden ptakopysk. Zafixujme nyní nějakého ptakopyska p_1 a uvažme posloupnost ptakopysků $p_1, p_2, \ldots$ takovou, že p_1 chce bydlet u p_2, p_2 u p_3 atd. V takové nekonečné posloupnosti se nutně nějaký ptakopysk musí opakovat. Nechť p_k je první ptakopysk v posloupnosti takový, že p_{k+1} se už někdy v naší posloupnosti vyskytl. Všimněme si, že ptakopysk p_{k+1} musí být doopravdy ptakopyskem p_1, neboť u všech ostatních ptakopysků již víme, kdo u nich chce bydlet (jejich předchůdce v posloupnosti). Dostali jsme tedy cyklus ptakopysků $p_1, p_2, \ldots p_k$ takový, že každý ptakopysk v něm chce bydlet u svého následníka v cyklu. Snadno si dorozmyslíme, že opakováním stejného procesu nakonec všechny ptakopysky rozdělíme do několika takových cyklů.

Nyní ukážeme, jak se během dvou dní vypořádat s jedním cyklem ptakopysků $p_1, \ldots, p_k$ nezávisle na těch ostatních. Uděláme to následovně. Během prvního dne vždy vyměníme ptakopyska p_i s ptakopyskem p_{k-i+2} pro všechna i taková, že $2 \leq i \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor$. V průběhu druhého dne pak vždy vyměníme ptakopyska p_i s ptakopyskem p_{k-i+1} pro $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$. Proč takové řešení funguje, už lze jednoduše dopočítat, my místo toho ukážeme, jak lze jeho správnost nahlédnout pomocí obrázku. Řešení má totiž názornou geometrickou interpretaci: jestliže si cyklus ptakopysků představíme jako pravidelný mnohoúhelník s vrcholy očíslovanými čísly $1, \ldots, k$, stěhování pak odpovídá rotaci mnohoúhelníku o úhel $360°/k$. Takovou rotaci umíme získat složením dvou vhodných osových souměrností (podle os, které svírají úhel $360°/2k$ a prochází středem mnohoúhelníku), a to jsou právě ony výměny ze začátku odstavce.



Poznámky:
Ačkoliv s ciferníkem si většina z Vás hravě poradila, ptakopysci leckteré PraSátko převezli. Mnozí řešitelé si totiž špatně přečetli zadání a mysleli si, že za jeden den je možno prohodit pouze jednu dvojici ptakopysků. Rozmyslete si, že potom by správnou odpovědí bylo $n-1$. Další populární odpovědí bylo $\log_2(n)$, neboť takový počet dní potřebuje „hladový“ algoritmus, který každý den ubytuje polovinu ptakopysků (to je vskutku nejvíc, co za jeden den můžeme udělat). Taková řešení si vysloužila jeden bod. *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 4.

(a) Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y splňující

$$f(x+y) < f(xy).$$

(Rado van Švarc)

(b) Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ splňující pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ vztah

$$f(f(x)) = -x.$$

(David Hruška)

Řešení:
(a) Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje nekonstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá dvě reálná čísla x a y vztah $f(x+y) \geq f(xy)$. Z dosazení $y = 0$ vidíme, že platí $f(x) \geq f(0)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále dosaďme $y = -x$ a dostáváme

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

opět pro každé reálné x. Protože funkce $g(x) = -x^2$ nabývá všech nekladných hodnot, plyne z obou dosud odvozených nerovností pro každé $z < 0$ vztah $f(0) \leq f(z) \leq f(0)$, tedy f musí být konstantní na nekladných číslech. Konečně dosazením $x = y = -\sqrt{a}$, kde a je libovolné kladné číslo, dostáváme

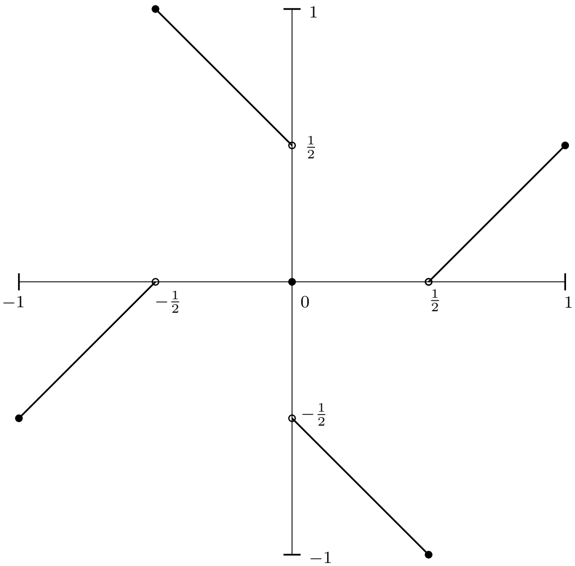
$$f(a) \leq f(-2\sqrt{a}).$$

My už ale víme, že $f(-2\sqrt{a}) = f(0)$ a $f(0) \leq f(a)$, čili f je konstantní na celém definičním oboru, což je spor.

(b) Zadání splňuje například funkce definovaná následujícím způsobem:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in \langle -1, \frac{1}{2}), \\ -x + \frac{1}{2}, & x \in \langle -\frac{1}{2}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ -x - \frac{1}{2}, & x \in (0, \frac{1}{2}\rangle, \\ x - \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle. \end{cases}$$

Ukažme si to třeba pro $x \in \langle -1, -\frac{1}{2})$. Pro taková x platí $f(x) = x + \frac{1}{2}$, což je číslo v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 0)$, tedy $f(f(x)) = -(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = -x$, což jsme chtěli. Na dalších intervalech se tato identita ověří zcela analogicky.



Poznámky:

V první části úlohy bylo nejčastější chybou tvrzení, že pro každá dvě čísla a, b (pro která $f(a) < f(b)$) lze najít čísla x a y, aby $x + y = a$ a $xy = b$, což není pravda (vezměme například $a = 1$ a $b = 100$), dokonce je to ekvivalentní tomu, že každá kvadratická rovnice má reálné řešení. Dále se vyskytl názor, že reálná funkce musí být alespoň na nějakém intervalu monotónní (tedy neklesající nebo nerostoucí), což ovšem také není pravda a příkladem je například funkce dávající hodnotu 1 v racionálních a hodnotu 0 v iracionálních číslech.

I s druhou částí se velká většina z došlých řešení vypořádala úspěšně. Skoro všechna obsahovala předpis nějaké podobné (po částech lineární) funkce. Objevil se ale i jiný přístup: nule přiřadit nulu, spárovat čísla v intervalu $(0, 1\rangle$ a pak f definovat pro spárovaná kladná čísla p a q takto: $f(p) = q$, $f(q) = -p$, $f(-p) = -q$ a $f(-q) = p$, čímž zaručíme platnost zadaného vztahu. Pokud si chce čtenář zavzpomínat na loňský seriál o teorii množin, doporučuji mu si rozmyslet, že tento přístup dává opravdu hodně řešení, přesněji řečeno $2^{|\mathbb{R}|}$, což je stejně jako vůbec všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Na druhou stranu řešení nemohou být moc hezká, konkrétně se jejich grafy nemohou dát „nakreslit jedním tahem“, přesněji žádné řešení úlohy nemůže být spojitá funkce. Několik opravdu pěkně a správně sepsaných řešení si vysloužilo imaginární bod. *(David Hruška)*

Úloha 5.

(a) *Na skalní římse leží tři hromádky o* 51, 49 *a* 5 *kamenech. V každém kroku můžeme buď sloučit dvě hromádky, nebo rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejně velké. Můžeme takto vytvořit* 105 *hromádek po jednom kameni?*

(b) *Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři.*

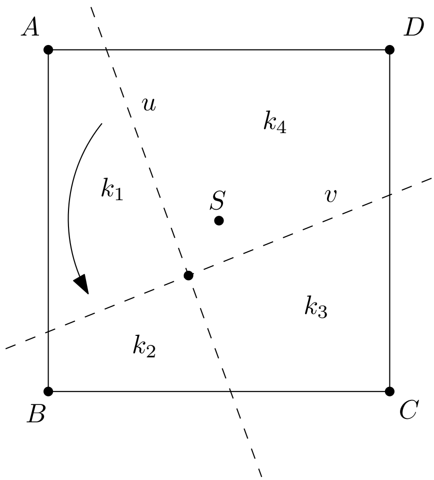
(Anh Dung „Tonda" Le)

Řešení:

(a) Kdyby se stalo, že v některém kroku dostaneme hromádky, jejichž počty mají lichého společného dělitele a, pak už nikdy nemůžeme vytvořit hromádku s jedním kamenem, protože hromádky vzniklé půlením nebo sloučením budou pořád mít počet dělitelný a.

Na začátku mají všechny tři hromádky lichý počet kamenů, a proto v prvním kroku musíme dvě hromádky sloučit. Získáme tak buď dvě hromádky s 51 a 54 kameny, jejichž velikosti mají společného dělitele 3, nebo dvě hromádky o velikostech 49 a 56, které mají společného dělitele 7, nebo dvě hromádky velké 5 a 100, které mají společného dělitele 5. Nemůžeme tedy vytvořit 105 hromádek po jednom kameni (dokonce neumíme ani vytvořit žádnou hromádku s jedním kamenem).

(b) Vrcholy čtverce označíme A, B, C, D a střed S. Dvě přímky označíme u, v a čtyři ohraničené oblasti v pořadí k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_1, k_2 leží na jedné straně vůči u a k_2, k_3 leží na jedné straně vůči v. BÚNO k_1, k_2, k_3 mají stejný obsah. Uvažujme otočení o $90°$ se středem v S ve směru k_1 ku k_2 a k_2 ku k_3. Nechť u' je obraz přímky u, pak platí, že $u' \parallel v$ a tyto přímky rozdělují čtverec ve stejném poměru, neboť $k_1 + k_2 = k_2 + k_3$. Díky zvolenému směru otočení dostáváme $u' \equiv v$.



Nechť a, b jsou oblasti vzniklé sloučením k_1 a k_2, resp. k_2 a k_3. Podle předchozí části víme, že oblast a se otočením zobrazí na b. Přímka v půlí oblast a, a proto se otočením zobrazí na přímku v', která půlí oblast b. Navíc platí, že $v' \parallel u$ a u také půlí b, tudíž $v' \equiv u$. Tedy otočíme-li přímku u o $180°$ kolem S, dostaneme zase u, a proto u obsahuje S. Oblast a má obsah rovný polovině obsahu čtverce a každá z částí k_1, k_2, k_3 má obsah čtvrtiny čtverce, z čehož plyne, že i čtvrtá část musí mít obsah čtvrtiny čtverce.

Poznámky:

Mnoho řešitelů se v části **(a)** domnívalo, že počet hromádek s jedním kamenem je vždy sudý, neboť vzniknou po dvou půlením hromádek se dvěma kameny, a proto celkový počet kamenů musí být lichý. Tento argument bohužel neplatí, neboť jednokamenné hromádky můžeme použít ke sloučení a jako protipříklad slouží startovní pozice se dvěma hromádkami 2 a 3, které dávají dohromady 5 kamenů, přitom se snadno dobereme k 5 jednokamenným hromádkám.

Část **(b)** se ukázala být zapeklitější, než jsem si myslel. Nebylo těžké nahlédnout, že aby měly všechny oblasti stejný obsah, musí přímky procházet středem čtverce, což navádí k postupu, který rozebíral změny obsahů jednotlivých částí při posunutí průsečíku přímek ke středu, což se rigorózně podařilo jen pár jedincům. Častou chybou bylo předpokládat podobnost čtyřúhelníků, které mají stejné vnitřní úhly, což obecně neplatí. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 6.

(a) *Kuba našel pravidelný čtyřstěn s hranou délky jedna. Nelenil a hned na jeho povrch nakreslil devět bodů. Dokažte, že mezi nakreslenými body vždy najdeme nějaké dva, jejichž vzdálenost v prostoru je nejvýše $\frac{1}{2}$.* *(Honza Krejčí)*

(b) *Čtyřboký jehlan $SABCD$ má podstavu tvořenou lichoběžníkem $ABCD$ s rovnoběžnými stranami AD a BC, přičemž $|AD| > |BC|$. Středy úseček AB a SD označme po řadě M a N, průsečík roviny ABN s přímkou SC nazvěme E. Dokažte, že přímky BE a MN jsou rovnoběžné.*
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

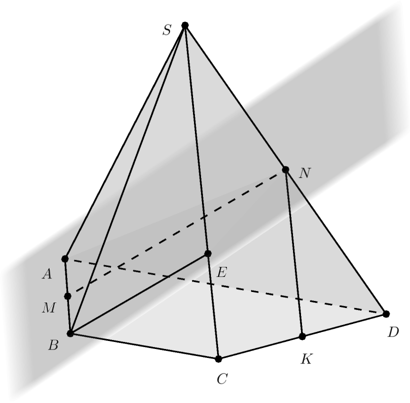
(a) Na každé stěně pravidelného čtyřstěnu nakreslíme střední příčky, které stěny rozdělí na pravidelné trojúhelníky o straně délky $\frac{1}{2}$. Celkový povrch pak rozdělíme na osm částí: čtyři části jsou jednotlivé trojúhelníky ze středních příček na každé stěně a každá ze zbývajících čtyř částí se skládá ze tří trojúhelníků sdílejících společný vrchol čtyřstěnu. Jelikož Kuba nakreslil devět bodů, nutně musí být nějaké dva body X, Y ve stejné části, říkejme jí $\triangle$. Ukážeme, že vzdálenost těchto dvou bodů je nejvýše $\frac{1}{2}$.

Předpokládejme nejprve, že $\triangle$ je trojúhelník. Bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je nějaký vrchol $\triangle$, označme ho A. (Rozmysli si, že A je opravdu vrchol – pokud by A ležel uvnitř $\triangle$, můžeme ho „prodloužením“ úsečky AX dostat na stranu, dále pokud by A byl na straně a ne ve vrcholu, pak se posunutím A směrem k jednomu z vrcholů vzdálenost zvětší.) Dále bod v $\triangle$ s největší vzdáleností od A je (využitím stejné úvahy) jeden ze dvou zbylých vrcholů, označme ho B. Platí tedy $|XY| \leq |XA| \leq |AB| = \frac{1}{2}$, neboť AB je strana $\triangle$ a má délku $\frac{1}{2}$.

Dále si všimněme, že pokud $\triangle$ je čtyřstěn bez jedné stěny, platí to stejně: Bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je vrchol A naproti stěně, na které leží X.[3] (Protože pokud A není zmíněný vrchol, tak koule o středu A a poloměru $|XA|$ neobsahuje celý $\triangle$, a proto můžeme A posunout do větší vzdálenosti.) Tedy bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od X je A, bod na $\triangle$ s největší vzdáleností od A je jiný vrchol B, a tedy $|XY| \leq |XA| \leq |AB| = \frac{1}{2}$.

(b) Označme K střed úsečky CD. Potom KN je střední příčka v trojúhelníku CDS, je tedy rovnoběžná s CS. Dále jsou z definice rovnoběžné přímky MK a BC. Z těchto svou rovnoběžností máme rovnoběžnost rovin MKN a BCE. Přímky BE a MN tedy leží v rovnoběžných rovinách BCE a MKN, navíc obě leží ve společné rovině ABN. Jsou tedy rovnoběžné.

[3] Pokud X leží na hraně čtyřstěnu, znamená to, že leží na obou sousedních stěnách.



Poznámky:
V řešeních části **(a)** se často objevoval známý nešvar v podobě používání obratů jako: „Nejvýhodnější bude, pokud Kuba rozmístí čtyři body do vrcholů čtyřstěnu…“ Řešení se pak totiž omezí na jedno konkrétní rozmístění, ačkoliv úlohou bylo ukázat, že to platí pro každé rozmístění.

V části **(b)** se sešlo o dost méně řešení, za ni si vysloužil imaginární bod *Martin Raška*, který přišel s nápadem zobrazit si vše v kolmé projekci na rovinu kolmou k AD a obrázek si tím poněkud zjednodušil. *(Tonda Češík)*

Úloha 7.

(a) *Existuje přirozené číslo a takové, že součet počtů cifer a a a^3 je roven 2017?*

(Honza Krejčí)

(b) *Nechť $S(k)$ značí ciferný součet přirozeného čísla k. Pro které nejmenší přirozené n platí*

$$S(n) = S(2n) = \cdots = S(2017n)?$$

(Rado van Švarc)

Řešení:
(a) Podíváme se, jak se změní počet cifer čísla a, když ho umocníme na třetí. Pokud a má n cifer, potom platí $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Umocněním této nerovnosti na třetí dostaneme $10^{3n-3} \leq a^3 < 10^{3n}$, tedy a^3 má $3n-2$, $3n-1$ nebo $3n$ cifer. Součet počtů cifer a a a^3 bude tedy buď $4n-2$, nebo $4n-1$, nebo $4n$ pro nějaké přirozené n. Bude tedy po vydělení čtyřmi dávat zbytek 0, 2 nebo 3. Protože ale 2017 dává při dělení čtyřmi zbytek jedna, tak žádné takové číslo a nemůže existovat.

(b) Nejprve ukážeme, že číslo 9999 vyhovuje zadání, tedy že pro každé k od 1 do 2017 platí $S(9999k) = 36$. Číslo 9999 lze přepsat jako $10000 - 1$, na násobení čísla k číslem 9999 se tedy můžeme dívat jako na odčítání k od jeho desetitisícinásobku. Nechť k není dělitelné deseti (pokud je, můžeme ho deseti vydělit a ciferný součet se nezmění). Zapíšeme si jeho cifry jako $\overline{abcd}$, kde a i další cifry zleva můžou být nuly, pouze d je určitě nenulové. Můžeme si všimnout, že

$$\overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}.$$

Tato rovnost platí proto, že d je nenulové, tedy v řádu jednotek dojde při odčítání k přenosu jedničky. Obdobně v řádech desítek, stovek i tisíců odečítáme vždy alespoň jedničku, která se přenesla z minulého řádu, tedy i tady dojde k přenosu. V řádu desetitisíců naopak odečítáme právě jedničku přenesenou z řádu tisíců od d, které je alespoň jedna, tedy k dalšímu přenosu nedojde.

Ciferný součet $S(\overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)})$ bude $a+b+c+d-1+9-a+9-b+9-c+10-d=36$.

Nyní již stačí ukázat, že 9999 je opravdu nejnižší možné.

Vezměme si tedy nějaké přirozené $n \leq 9999$, které splňuje zadání. Chceme ukázat, že $n = 9999$. Protože ciferný součet dává stejný zbytek modulo devět jako číslo samo a $S(9n)$ je dělitelné devíti, musí být i $S(n)$, a tedy i n dělitelné devíti. Nechť tedy $m = \frac{n}{9}$. Protože n je maximálně 9999, m je maximálně 1111. Dále víme, že $S(n) = S(1111n) = S(1111 \cdot 9m) = S(9999m)$, ale protože $1 \leq m \leq 1111 < 2017$, tak již podle tvrzení dokázaného v první části důkazu platí $S(9999m) = 36$. Tedy $S(n) = 36$. Číslo 9999 je ale evidentně nejnižší číslo s ciferným součtem 36.

Poznámky:

Úloha byla poměrně přístupná, a tak se drtivá většina řešitelů pokusila i o část **(b)**. Část **(a)** většině nečinila větší potíže, pouze několik řešitelů se dopustilo chyby o jedničku. Ta je bohužel typicky stála oba body, protože v jejich řešení nebyla žádná z myšlenek potřebných ke korektnímu vyřešení úlohy.

To samé bohužel nelze říct o části **(b)**, kde kromě zhruba deseti správných řešení přišlo také téměř dvakrát tolik řešení, která sice nalezla správnou hodnotu $n = 9999$, ale buď její správnost nedokazovala vůbec, nebo používala vágní, zamlžené formulace o tom, že „je nejlepší, když číslo obsahuje hodně devítek“ a podobně. Taková řešení dostala někdy jeden (například pokud korektně dokázala alespoň $9 \mid n$), typicky však žádný bod.

Úspěšná řešení části **(b)** nejčastěji postupovala opačně než vzorák, tedy začala důkazem, že žádné menší n fungovat nemůže. V takovém případě většinou rozebírala člen $S(1001n)$, nicméně tento postup byl, ač většinou úspěšný, o něco delší a méně elegantní než vzorák. *(Viki Němeček)*