Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *David má doma v řadě za sebou položených pět krabic. Každou noc spí v jedné z nich, ale odmítá komukoli říct ve které. David moc rád vstává brzo, a protože jak známo* ranní ptáče dál doskáče*, každé ráno přeskočí do sousední krabice, ve které zůstane až do následujícího rána. Kačka by ráda Davida zase spatřila. Každé poledne se může podívat do jedné z krabic a zjistit, jestli v ní David je. Nalezněte strategii, díky níž Kačka časem otevře krabici, ve které se David zrovna schovává.* *(Rado van Švarc)*

(b) *Bitevní pole má tvar tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Na každém políčku před bitvou stojí jeden vojín. Vojáci se nepohybují, v průběhu bitvy ale můžeme opakovaně provádět následující taktickou operaci – vybereme si libovolné políčko a na všech políčkách sousedících s ním hranou (ale ne v něm samotném) všechny vojíny povýšíme na generály a všechny generály naopak degradujeme na vojíny. Určete, pro která n lze docílit toho, aby* po bitvě byl každý generálem.

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

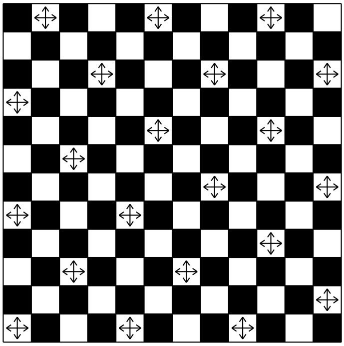
(a) Očíslujeme krabice 1 až 5. Uvědomíme si, že pokud David spal danou noc v sudé krabici, pak následující noc přeskočí do liché krabice. Obdobně to platí, i když bude spát v liché krabici. David tedy každý den změní paritu krabice, ve které se nachází.

Nejprve budeme předpokládat, že byl David první den v sudě očíslované krabici. Kačka se proto podívá do krabice s číslem dva. Pokud v ní není, musel být ve čtvrté krabici. Druhý den ho proto očekáváme ve třetí nebo v páté krabici. Kačka se podívá do třetí krabice, a pokud tam David není, víme, že je v páté krabici a následující den se přemístí do čtvrté. Kačka se do ní tedy následující den podívá. Pokud Kačka doposud Davida nenašla, byl náš počáteční předpoklad chybný a David byl první den v liché krabici. Nyní je již jisté, že v tuto chvíli je v sudé krabici, a Kačka jen zopakuje stejný postup.

(b) Nejprve ukážeme, že pro liché n neumíme zajistit, aby po bitvě byl každý generálem. Podíváme se na vojíny na jedné z hlavních úhlopříček. Těch je lichý počet. Označíme a počet vojínů a b počet generálů na diagonále. Vždy, když vybereme políčko vedle hlavní diagonály, změní se (a, b) na

(i) $(a-2, b+2)$, pokud vedle zvoleného políčka byli dva vojíni;
(ii) (a, b), pokud vedle zvoleného políčka byl jeden vojín a jeden generál;
(iii) $(a+2, b-2)$, pokud vedle zvoleného políčka byli dva generálové.

Na počátku jsme ve stavu $(n, 0)$, a abychom povýšili všechny vojíny na generály, museli bychom dosáhnout stavu $(0, n)$. Protože je n liché a my umíme a změnit pouze přičtením nebo odečtením dvojky, bude první číslo vždy liché, takže požadovaného stavu nikdy dosáhnout nemůžeme.



Stačí již jen ukázat, že pro sudá n existuje provedení taktických operací tak, aby se všichni vojíni generály stali.

Abychom to ukázali, obarvíme si pole jako šachovnici. Protože černá políčka sousedí pouze s bílými políčky, vybereme-li černé políčko, změníme vojíny na generály (a naopak) pouze na bílých políčkách. Obdobně to platí i při vybrání bílého políčka. Umíme-li změnit všechny vojíny stojící na bílých políčkách na generály, pak umíme změnit i všechny vojíny na černých políčkách na generály. Stačí pouze provést tahy pootočeně o 90° kolem středu.

Vybereme směr úhlopříček tak, aby úhlopříčky délky jedna na krajích byly bílé. Bílých úhlopříček v tomhle směru je n a černých $n-1$. Na každé liché bílé úhlopříčce vybereme všechna lichá políčka, tedy začneme krajním (je jedno z jakého konce), vždy jedno přeskočíme a následující vybereme, dokud nedojdeme na druhý konec. Protože mají bílé úhlopříčky vždy lichou délku, vybereme první i poslední políčko na každé úhlopříčce.

Každá černá úhlopříčka sousedí s právě dvěma bílými úhlopříčkami, tedy s právě jednou lichou bílou úhlopříčkou. Každé políčko na černé úhlopříčce sousedí buď se dvěma bílými políčky na liché úhlopříčce, nebo s jedním krajním políčkem na liché úhlopříčce. Celkově při takovém výběru políček sousedí každé černé políčko s právě jedním vybraním políčkem.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 2.

(a) *Rado vyhrál v tombole několik tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pro každé dvě jeho množiny A a B, které nejsou stejné, platí $|A \cap B| \leq 1$. Dokažte, že Rado nemá víc než $\frac{n(n-1)}{6}$ množin.* *(Rado van Švarc)*

(b) *Od své výhry v tombole Rado nepřestal o oné množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ přemýšlet. Proto se jeho rodiče rozhodli, že mu její co největší podmnožinu X zakážou. Zároveň mu ale nechtěli zkazit radost z výhry, a tak se dohodli, že zakážou jen takové prvky, aby žádná z Radových tříprvkových podmnožin neměla všechny své prvky zakázané. Dokažte, že mohou vybrat podmnožinu X s alespoň $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ prvky.*[1] *(Marian Poljak)*

Řešení:

(a) Každá dvojice prvků může být jen v jedné tříprvkové množině. Zároveň pro každou trojici platí, že v ní jsou tři různé dvojice prvků.

Protože možných dvojic je celkem $\binom{n}{2}$, žádná není ve dvou trojicích a v každé trojici jsou tři, může trojic být nanejvýš $\frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{6}$.

(b) Pro spor předpokládejme, že rodiče správně zakázali m prvků, $m \leq \sqrt{2n} - 1$, a žádné další prvky už zakázat nemohou, aby tím nezakázali žádnou trojici celou.

[1] Pro $x \in \mathbb{R}$ značíme $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x, tedy největší přirozené číslo, které není větší než x.

To, že žádný další prvek zakázat nemohou, znamená, že každý prvek množiny buď již zakázaný je, a nebo je v trojici s nějakými dvěma již zakázanými prvky. Zároveň však každá již zakázaná dvojice určuje nanejvýše jeden prvek, který je s ní v nějaké trojici. Takže prvků, které ještě nejsou zakázané, je nanejvýš tolik jako dvojic zakázaných prvků, neboli $\binom{m}{2}$. To znamená, že $n \leq m + \binom{m}{2}$.

Po úpravě dostáváme, že platí $(m+1)m \geq 2n$. Ale pokud $m \leq \sqrt{2n} - 1$, tak $(m+1)m \leq \sqrt{2n}\left(\sqrt{2n} - 1\right) < 2n$, což je spor.

Poznámky:
Většina z vás si troufla jen na první úlohu. Měli jste ji většinou dobře. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 3.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a bod Q uvnitř něj. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu Q na strany BC, AC, AB. Ukažte, že obě trojice trojúhelníků AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ a P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ

(a) *mají stejný součet obsahů,*

(b) *mají stejný součet poloměrů kružnic vepsaných.* *(Kuba Löwit)*

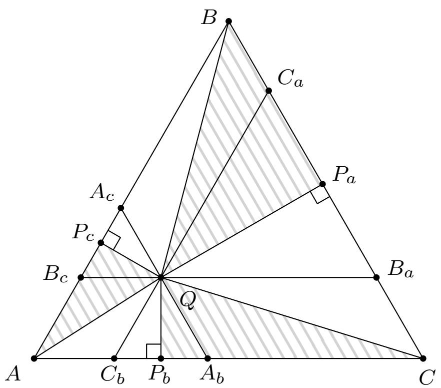
Řešení:

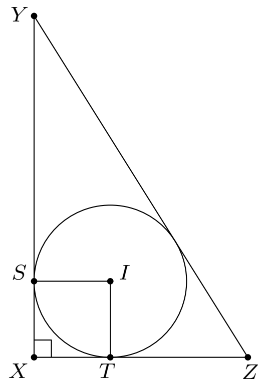
(a) Bodem Q vedeme rovnoběžku se stranou AC, která protne strany AB a BC v bodech B_c a B_a. Analogicky sestrojíme body A_b, A_c, C_a a C_b.

Díky souhlasným úhlům u rovnoběžek víme, že trojúhelník A_bQC_b je rovnostranný. Přímka QP_b je jeho výškou, takže ho dělí na dvě části o stejném obsahu. Tedy, pokud budeme obsah trojúhelníku XYZ značit jako $[XYZ]$, platí $[A_bP_bQ] = [C_bP_bQ]$ (a analogicky také $[B_aP_aQ] = [C_aP_aQ]$ a $[A_cP_cQ] = [B_cP_cQ]$).

Čtyřúhelník QA_cBC_a je rovnoběžník, takže jeho úhlopříčka ho dělí na dvě stejné části. Proto platí $[QA_cB] = [QC_aB]$ (a analogicky také $[QA_bC] = [QB_aC]$ a $[QC_bA] = [QB_cA]$).

Tímto jsme pokryli trojúhelník šesti útvary – třemi rovnoramennými trojúhelníky a třemi rovnoběžníky – takovými, že každý leží z půlky ve sjednocení první trojice trojúhelníků a z druhé půlky ve sjednocení druhé. Tím pádem mají tyto trojice stejný součet obsahů.





(b) Nejprve si všimněme, že kdykoliv je XYZ pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u X, pak poloměr jeho kružnice vepsané je roven $\frac{|XY|-|YZ|+|ZX|}{2}$. Tomu je tak proto, že pokud si dotyky kružnice vepsané se stranami XY a XZ označíme jako S a T a střed kružnice vepsané jako I, pak je $XSIT$ čtverec, a tedy poloměr kružnice vepsané bude dle známého vzorce pro vzdálenost mezi vrcholem a dotykem kružnice vepsané roven $|XT| = \frac{|XY|-|YZ|+|ZX|}{2}$.

Proto je součet poloměrů kružnic vepsaných AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ roven

$$\frac{1}{2}\left(|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| + |QP_a| + |QP_b| + |QP_c| - |AQ| - |BQ| - |CQ|\right)$$

a součet poloměrů kružnic vepsaných P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ je roven

$$\frac{1}{2}\left(|AP_b| + |BP_c| + |CP_a| + |QP_a| + |QP_b| + |QP_c| - |AQ| - |BQ| - |CQ|\right).$$

Stačí nám tedy ukázat, že $|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| = |AP_b| + |BP_c| + |CP_a|$.

Protože trojúhelník C_bQA_b je rovnostranný a QP_b je jeho výška, platí $|A_bP_b| = |P_bC_b|$ (a analogicky $|C_aP_a| = |P_aB_a|$ a $|A_cP_c| = |P_cB_c|$).

Protože $B_cB_a \parallel AC$ a úhly B_cAC a B_aCA mají stejnou velikost, je AB_cB_aC rovnoramenný lichoběžník. Proto je $|AB_c| = |B_aC|$ (a analogicky $|AC_b| = |C_aB|$ a $|BA_c| = |A_bC|$).

Tímto jsme pokryli obvod trojúhelníka šesti dvojicemi stejně dlouhých úseček, kde v každé dvojici leží jedna v jedné části obvodu a druhá v druhé. Tím pádem mají tyto části obvodu stejný součet délek.

Jinak řečeno:

$$\begin{aligned}|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| &= (|AB_c| + |B_cP_c|) + (|BC_a| + |C_aP_a|) + (|CA_b| + |A_bP_b|)\\ &= |CB_a| + |A_cP_c| + |AC_b| + |B_aP_a| + |BA_c| + |C_bP_b|\\ &= (|AC_b| + |C_bP_b|) + (|BA_c| + |A_cP_c|) + (|CB_a| + |B_aP_a|)\\ &= |AP_b| + |BP_c| + |CP_a|.\end{aligned}$$

Poznámky:
Část **(a)** se dala řešit mnoha rozmanitými způsoby, krom vzorového například pomocí hýbání s body nebo pomocí dokreslování vhodných obdélníků. Proto se také řešení části **(a)** sešlo mnoho.

Na části **(b)** bylo nejtěžší uvědomit si, že pro pravoúhlé trojúhelníky má poloměr kružnice vepsané vcelku hezký tvar. S tímto pozorováním už se úloha stala podobně snadnou jako část **(a)**.

(Rado van Švarc)

Úloha 4.

(a) *Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla a součin třetí mocninou přirozeného čísla.*

(Rado van Švarc)

(b) *Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takových, že $n^2 + 3m$ i $m^2 + 3n$ jsou druhé mocniny přirozených čísel.* *(Michal Töpfer)*

Řešení:
(a) Řešení existuje víc, nejpřímočařejší je volba $a_k = n^3$ pro všechna k. Potom totiž

$$a_1 + \cdots + a_n = n \cdot n^3 = (n^2)^2, a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = (n^3)^n = (n^n)^3.$$

Jelikož n^2 i n^n jsou přirozená čísla, jsme hotovi.

(b) Uvažme přirozená čísla a, b taková, že

$$n^2 + 3m = (n + a)^2, m^2 + 3n = (m + b)^2.$$

Roznásobením a úpravou rovnic dostaneme

$$3m = 2na + a^2, 3n = 2mb + b^2.$$

Tuto soustavu vyřešíme, vyjádříme m a poté ho dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme

$$3n = \frac{4nab + 2a^2b}{3} + b^2,$$

což dá

$$9n - 4nab = 2a^2b + 3b^2,$$

tedy

$$n = \frac{2a^2b + 3b^2}{9 - 4ab}.$$

Protože n je přirozené číslo a čitatel je vždy kladný, musí být i jmenovatel kladný. Díky tomu víme, že $ab \leq 2$.

Buď nastane situace $a = b = 1$, nebo je jedno z těchto čísel rovno jedné a to druhé je rovno dvěma. V prvním případě dostaneme $n = m = 1$, v druhém případě $n = 16$, $m = 11$, respektive $n = 11$, $m = 16$. Víc možností není a všechny tyto dvojice vyhovují, neboť

$$1 + 3 = 4 = 2^2, 11^2 + 3 \cdot 16 = 121 + 48 = 169 = 13^2, 16^2 + 3 \cdot 11 = 256 + 33 = 289 = 17^2.$$

Poznámky:
V části **(a)** většina řešitelů volila buď výše popsané řešení, nebo $a_k = k^3$. Součet pak je $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (jedná se o známý vzorec, který se dá dokázat třeba indukcí), což je čtverec přirozeného čísla, neboť vždy jedno z čísel n, $n+1$ je dělitelné dvěma, a součin je $(n!)^3$.

V části **(b)** se sešla celá škála řešení, která více či méně využívala různé odhady výrazů (typicky $n^2 < n^2 + 3m < (n+3)^2$) doplněné o rozbor případů. Ráda bych upozornila na to, že pokud se odvodí rovnice, které musí řešení splňovat, pak jejich řešení ještě automaticky nemusí řešit původní zadání. Je tedy nutné provést zkoušku nebo jinak zdůvodnit, proč se jedná o řešení.

(Anička Doležalová)

Úloha 5.

(a) *Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro žádná dvě přirozená čísla $i \neq j$ nejsou zároveň $a_i + j$ a $a_j + i$ dělitelná 2017?*

(b) *Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každá dvě přirozená čísla $i \neq j$ jsou $a_i + j$ a $a_j + i$ nesoudělná?* *(Rado van Švarc)*

Řešení:
(a) Vezměme si posloupnost (a_n) takovou, že každé $a_n \in \{1, 2, \cdots, 2017\}$ a zároveň $a_i \equiv 1 - i \pmod{2017}$. Ukážeme, že tato posloupnost splňuje zadání. Je zřejmé, že každý člen této posloupnosti je jednoznačně určený a že každý člen je přirozené číslo. Nyní pro spor předpokládejme, že existují $i \neq j$ taková, že $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou obě dělitelná 2017. Pak

$$0 \equiv (a_i + j) + (a_j + i) \equiv (1 - i + j) + (1 - j + i) \equiv 2 \pmod{2017},$$

což je požadovaný spor. Posloupnost (a_n) tedy splňuje zadání.

(b) Dokážeme sporem, že taková posloupnost neexistuje. Předpokládejme tedy, že (a_n) je posloupnost splňující zadání.

Vezměme libovolnou dvojici sudých indexů i, j. Pak $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou nesoudělná, a tak nejsou obě sudá. To znamená, že alespoň jedno z a_i, a_j je liché. A protože toto platí pro všechny dvojice sudých i, j, pak pro sudá i jsou všechna a_i až možná na jedno lichá.

Obdobně vezměme libovolnou dvojici lichých indexů i, j. Pak $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou nesoudělná, a tak nejsou obě sudá. To znamená, že alespoň jedno z a_i, a_j je sudé. A protože toto platí pro všechny dvojice lichých i, j, pak pro lichá i jsou všechna a_i až možná na jedno sudá.

Takže určitě existuje nějaké sudé i takové, že a_i je liché, a alespoň jedno liché j takové, že a_j je sudé. Pak ale $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou obě sudá, a tudíž soudělná, a to je požadovaný spor. Posloupnost splňující zadání tedy neexistuje.

Poznámky:
Skoro všechna řešení, která jsem ať už k první nebo k druhé části úlohy dostal, došla ke správnému výsledku a použila velmi podobnou myšlenku jako vzorové řešení. V první části se občas objevily celkem zajímavé posloupnosti, zaujala mě například posloupnost Samuela Krajčiho. Ten indexům $i \equiv 2015 \pmod{2017}$ přiřadil $a_i = 3$, indexům $i \equiv 2016 \pmod{2017}$ přiřadil $a_i = 2$ a všem ostatním i přiřadil $a_i = 1$. Důkaz, že posloupnost splňuje zadání, ale až zas tak elegantní a jednoduchý není, a proto jsem tuto variantu ve vzorovém řešení neuváděl.

Několika řešitelům jsem doporučil podívat se na nějaký text o kongruencích – určitě se bude ještě mnohokrát hodit vědět, co všechno umí a jak se dají použít. Něco málo je o nich v Úvodním textu ke 3. sérii 34. ročníku a nebo v seriálu o Teorii čísel ze 33. ročníku. Zkuste si texty pročíst, trochu si s kongruencemi pohrát a třeba vám už brzo usnadní nějakou další úlohu.

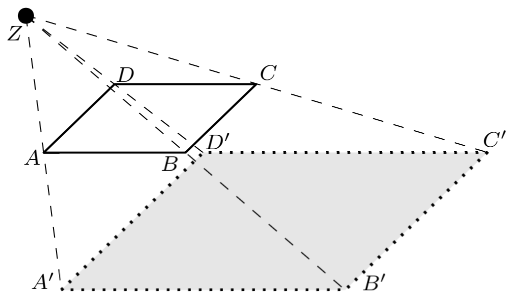
(Jáchym Solecký)

Úloha 6.

(a) *Na rovině leží krychle o hraně délky jedna. V dané výšce h nad touto rovinou ($h > 1$) je zdroj světla. Jakou nejmenší plochu může mít stín, který krychle vrhá na rovinu? Do plochy stínu počítáme i spodní podstavu krychle.* *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

(b) *Slunce svítí rovnoběžnými paprsky kolmo na rovinu. Nad touto rovinou se v prostoru vznáší krychle o hraně délky jedna, kterou je možné libovolně otáčet. Určete, jaký největší stín může tato krychle na rovinu vrhat.* *(David Hruška)*

Řešení:



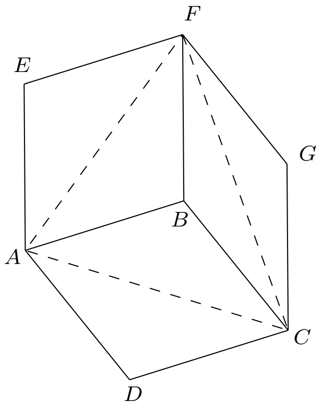
(a) Zdroj světla si označíme Z. Z krychle si zatím představíme jen její horní stěnu, jejíž vrcholy si označíme po řadě A, B, C a D. Tato stěna vrhá na rovinu čtvercový stín, jehož vrcholy si označíme stejným způsobem A', B', C' a D'.

Protože jsou jehlany $ZABCD$ a $ZA'B'C'D'$ stejnolehlé, nezávisí plocha stínu na poloze zdroje. Koeficient stejnolehlosti vypočítáme z poměru délek výšek. Výška jehlanu $ZA'B'C'D'$ je vzdálenost zdroje světla od roviny, tedy h. Jehlan $ZABCD$ má výšku o jedna menší. Protože délka úsečky AB je jedna, délka úsečky $A'B'$ je $1 \cdot \frac{h}{h-1}$. Plocha čtverce $A'B'C'D'$ je tedy

$$\frac{h^2}{(h-1)^2}.$$

To je ale také minimální možný rozměr stínu, protože horní stěna vrhá takovýto stín vždy, když je zdroj světla přímo nad krychlí, žádná další stěna již stín nevrhá.

(b) Nejprve je potřeba udělat dvě pozorování. Prvním pozorováním je, že nejvýše tři stěny krychle budou vždy vrhat stín. To platí proto, že nikdy nemůže být osvícena současně stěna a stěna s ní rovnoběžná. Druhým pozorováním bude fakt, že zkoumáme-li stín rovinného útvaru, bude mít maximální plochu, pokud je jeho rovina rovnoběžná s rovinou, na níž se promítá.



Nyní tedy vezmeme vrchol, kolem kterého jsou tři osvícené stěny, a označíme si ho B. Podle prvního pozorování je takový vrchol nejvýše jeden. Pokud by nebyl žádný, představíme si, že stín s nulovým obsahem vrhají i některé ze stěn, které jsou kolmé na rovinu, na níž krychle vrhá stín (této rovině budeme nadále říkat průmětna a pro každý bod X budeme X' značit jeho stín). Ostatní vrcholy krychle si označíme jako na obrázku. Stíny všech tří osvícených stěn jsou nutně rovnoběžníky. To platí například proto, že projekce zachovává příslušnost bodu k přímce a poměry vzdáleností, tedy i středovou symetrii. Protože strany krychle jsou čtverce, musí i jejich stíny být středově symetrické čtyřúhelníky, což jsou právě rovnoběžníky.

Nyní si všimneme, že stín krychle bude právě šestiúhelník $A'D'C'G'F'E'$ v němž možná některé vrcholy splývají. Podívejme se nyní na tři dvojice shodných trojúhelníků: $A'D'C'$ a $C'B'A'$, $C'G'F'$ a $F'B'C'$, $F'E'A'$ a $A'B'F'$. To nám říká, že obsah šestiúhelníku $A'D'C'G'F'E'$ je právě dvojnásobek obsahu trojúhelníku $A'C'F'$. Ten je ale maximální, když je rovina ACF rovnoběžná s průmětnou. Pak jsou trojúhelníky ACF a $A'C'F'$ shodné. Trojúhelník ACF je rovnostranný, jeho strana je stěnová úhlopříčka krychle, jejíž délka je $\sqrt{2}$ a obsah trojúhelníka ACF je tedy $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Maximální možný obsah stínu krychle je tedy $\sqrt{3}$.

Poznámky:

S částí **(a)** si většina řešitelů poradila hladce. O části **(b)** se ale to samé bohužel říct nedá. Spousta řešitelů vůbec nedokazovala, že nejlepší natočení krychle je právě toto. Taková řešení, neudělala-li žádnou další chybu, typicky získala jeden bod. Pouze *Samuel Krajčí* a *Klára* zvaná *Klátra Pernicová* se vydali stejnou cestou jako vzorové řešení a jenom Samuel tuto cestu dovedl až do zdárného konce. Oba dva byli za eleganci oceněni $+i$. Ostatní se pokoušeli o různé počítání pomocí goniometrických funkcí. Tento přístup typicky vedl též k cíli, ač často přes spoustu výpočtů a technických obtíží. V případech, kdy se řešitel navíc neobešel bez derivací, lineární algebry a jiných, primárně vysokoškolských technik, jsem se nakonec rozhodl udělit $-i$. *(Viki Němeček)*

Úloha 7.

(a) *Na kružnici o poloměru jedna leží naproti sobě body A a B. Zároveň je na ní začerveněno několik dalších bodů. Nechť a je geometrický průměr*[2] *délek všech úseček vedených z A do červených bodů a b je geometrický průměr délek všech úseček z B do červených bodů. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a, b je menší nebo rovno $\sqrt{2}$.* *(Kuba Löwit)*

[2] Geometrický průměr nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$.

(b) *Určete nejmenší kladné reálné číslo t takové, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí*

$$\frac{a+b}{2} \geq t\sqrt{ab} + (1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Rado van Švarc)

Řešení:

(a) Nechť X_1, X_2, … X_n jsou červené body ze zadání. Jsou-li a_i, resp. b_i vzdálenosti X_i od A, resp. B, z Thaletovy věty jsou všechny trojúhelníky AX_iB pravoúhlé, takže z Pythagorovy věty plyne $a_i^2 + b_i^2 = 2^2$. Z AG nerovnosti pro a_i^2 a b_i^2 (nebo rozepsáním $(a_i - b_i)^2 \geq 0$) dostáváme $2a_ib_i \leq a_i^2 + b_i^2$, neboli $a_ib_i \leq 2$. Proto

$$ab = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n} = \sqrt[n]{a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdots a_nb_n} \leq \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Alespoň jedno z čísel a, b tedy musí být menší nebo rovno $\sqrt{2}$, jinak by jejich součin byl ostře větší než 2.

(b) Dokážeme, že nejmenší takové t je $\frac{1}{2}$. Ekvivalentními úpravami původní nerovnosti osamostatníme t. Předpokládejme, že $a \neq b$ (pro $a = b$ platí nerovnost vždy):

$$t\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2},$$

$$t \geq \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}}.$$

Povšimněme si, že znaménko nerovnosti se nezměnilo, protože jmenovatel je vždy kladný, což plyne z AG nerovnosti pro a^2 a b^2.

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}\right)$ a využijeme vztahu $(X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2$:

$$t \geq \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}} = \frac{\frac{(a-b)^2}{4}}{\frac{(a-b)^2}{2}} \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}}\right).$$

Z AG nerovnosti je zřejmě poslední závorka menší než 1, takže $t = \frac{1}{2}$ jistě vyhovuje. Pro důkaz toho, že žádné menší t nevyhovuje, bychom potřebovali ukázat, že poslední zlomek může nabývat libovolně malých kladných hodnot. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné, dosaďme $a = 1+x$ a $b = 1-x$ do zmíněného zlomku a pokusme se ekvivalentně nerovnost, kterou potřebujeme, upravit tak, abychom nalezli podmínku pro x, která zajistí její platnost:

$$\frac{\frac{2}{2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{2}} + \frac{2}{2}} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+1} < \varepsilon.$$

Pokud zvolíme x tak, aby $1 - \sqrt{1-x^2} < \varepsilon$, budeme zřejmě hotovi, protože jmenovatel je větší než jedna. To ale znamená volit $0 < x < \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$. Na pravé straně máme kladné číslo, takže takové x opravdu najít lze a jsme hotovi.

Poznámky:

Nerovnost $a_i b_i \leq 2$ v první části lze dokázat mnoha způsoby. Mezi algebraické (využívající pak Pythagorovu větu jako vzorové řešení) patří například nerovnost $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy}$, která platí pro všechna nezáporná x, y a jejím zobecněním je tzv. *KAGH nerovnost*: jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ kladná čísla a označíme-li kvadratický průměr $K = \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$, aritmetický průměr $A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, geometrický průměr $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ a harmonický průměr $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$, pak platí $K \geq A \geq G \geq H$. Další možností je všimnout si, že $a_i b_i$ je obsah obdélníka vepsaného do jednotkové kružnice, jehož úhlopříčka je průměrem té kružnice. Jeho obsah proto může být nejvýše dvojnásobkem vzdálenosti bodu X_i od průměru AB, tedy opět $a_i b_i \leq 2 \cdot 1$.

Řešení druhé části nebylo tolik, ale i mezi nimi se našly různé přístupy, které si často vysloužily kladné imaginární body. Například platnost nerovnosti pro $t = \frac{1}{2}$ lze zvlášť dokázat Jensenovou nerovností, konstrukcí vycházející z geometrického znázornění nerovnosti $KAGH$ nebo prostě dvěma umocněními a dalšími úpravami. Odhad $t \geq \frac{1}{2}$ většina řešení prováděla podobně vzorovému řešení až do speciálního dosazení za a a b. Pak z toho, že pro $a = b$ (takovou dvojici přímo dosadit nemůžeme, protože bychom v předchozích úpravách krátili nuly) nabývá zlomek

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}}$$

hodnoty jedna, se zdá být jasné, že nabývá pro $a \neq b$ i hodnot libovolně blízkých jedné. Za pomoci základů matematické analýzy (bez kterých se žádné správné řešení neobešlo) to v tomto případě opravdu jasné je, ale podobná intuice nás často i zklame. *(David Hruška)*