Functions

4^{TH} AUTUMN SERIES — MODEL SOLUTIONS

Problem 1.

David found the quadratic function $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$, $f(x) = x^2$ and a function $g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$. For each of the compositions $f \circ g$ or $g \circ f$ decide whether it may be injective.

(David Hruška)

SOLUTION:

First have a look at the function $f \circ g$. We will show that this composition may be injective for some g. Such function g must satisfy the condition $|(g(x_1))| \neq |(g(x_2))|$ for each x_1, x_2 two distinct elements of $\langle 0, \infty)$ (otherwise $f(g(x_1)) = (g(x_1))^2 = (g(x_2))^2 = f(g(x_2))$, hence $f \circ g$ would not be injective).

We can see that this condition is met e. g. for $g(x) = x$ or $g(x) = \sqrt{x}$, since then $(f \circ g)(x) = x^2$, resp. $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, both of them are injective functions on $\langle 0, \infty)$.

In contrast, the composition $g \circ f$ cannot be injective since $-1 \neq 1$ and

$$g(f(-1)) = g((-1)^2) = g(1^2) = g(f(1)).$$

POZNÁMKY:

Řešení se sešla vskutku rozmanitá, takže bylo bohužel potřeba využít celou bodovací škálu. V první části stačilo najít příklad jedné funkce g, pro kterou je složení prosté, v druhé dosadit opačná čísla a ukázat rovnost funkčních hodnot. Často řešení obsahovala správné závěry, ale bez dostatečného zdůvodnění; například pouze stanovit podmínky na g (což ani nebylo nutné) nestačí, protože není obecně jisté, že taková funkce existuje. To se právě nejsnáze ukáže tím, že se nějaká taková konkrétní funkce najde.

Občas se také v první části objevovalo tvrzení, že g musí mít pouze nezáporné nebo pouze nekladné hodnoty, případně že stačí, aby byla prostá. Ani jedno neplatí, jak je vidět z protipříkladů $g(x) = -x$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $g(x) = x$ pro $x \in (1, \infty)$, respektive $g(x) = x - 1$. Platí, že $f \circ g$ bude prostá právě tehdy, když funkce $|g(x)|$ je prostá.

Ráda bych ještě podotkla, že k sérii byl vydán úvodní text. I když třeba funkcím rozumíte, je dobré si ho přečíst, bylo tam vysvětlené značení a další pojmy. Takhle se několikrát stalo, že „$g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$“ bylo interpretováno tak, že funkce g je *na* $\mathbb{R}$ (tedy že *codomain* a *range* splývají), což ale není obecně pravda. Podobně výrazy *domain* a *codomain* označují množiny, nikoliv konkrétní argumenty či funkční hodnoty v bodě.

(Anička Doležalová)

Problem 2.

Is there a function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(f(n)) < f(n)$ for all positive integers n?

(Martin „E.T.“ Sýkora)

SOLUTION:

We will prove by contradiction that such function cannot exist. If it exists, its range $\mathrm{Rng}(f)$ is a subset of $\mathbb{N}$. Thus $\mathrm{Rng}(f)$ has the least element; let us denote it by m. Since m belongs to $\mathrm{Rng}(f)$, there exists some n such that $f(n) = m$. However, the condition $f(f(n)) < f(n)$ must also hold for this n and since $f(n) = m$, we have $f(m) < m$. On the other hand $f(m)$ also belongs to $\mathrm{Rng}(f)$, which contradicts the fact that m is the least element of $\mathrm{Rng}(f)$.

ALTERNATIVE SOLUTION:

This time we will use the principle of infinite descent. As in previous solution, let us suppose that such function f exists. Take any positive integer c. We do not know whether $f(c) < c$ but we do know that $f(f(c)) < f(c)$. By plugging $n = f(c)$ into the given condition we obtain $f(f(f(c) < f(f(c))$. More generally, for all k in $\mathbb{N}$, $f^{(k+1)}(c) < f^{(k)}(c)$. It means that $f(c), f^{(2)}(c), f^{(3)}(c), \ldots$ is an infinite decreasing sequence, but such sequence doesn't exist in $\mathbb{N}$, which is a contradiction.

POZNÁMKY:

Druhá úloha anglické série k mému překvapení zaskočila i mnoho ostřílených řešitelů, čemuž také odpovídá průměrné hodnocení 1,78 bodu.

Přestože většina řešitelů nakonec správně došla k negativnímu závěru, mnoho řešitelů automaticky předpokládalo, že pokud $f(f(n)) < f(n)$, tak určitě také $f(n) < n$ pro každé n. To ale vůbec nemusí být pravda. Pokud bychom hledali například funkci $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takovou, že $g(g(n)) < g(n)$ pro každé n ze $\mathbb{Z}$, ale pro některá n ze $\mathbb{Z}$ neplatí $g(n) < n$, určitě ji najdeme. Příkladem může být třeba funkce

$$g_1(n) = \begin{cases} \text{Nejbližší vyšší násobek 100, pokud } n \text{ není dělitelné 100,} \\ n - 100 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení, že $f(n) < n$ pro každé n, bylo často použito nepřímo pomocí substituce t za $f(n)$, která rozhodně **není** obecně správně. Tím spíše, chceme-li potom bez důkazu tvrdit, že t může nabývat nějaké konkrétní hodnoty. Řešení, která tak či onak toto tvrzení použila, jsem až na pár výjimek ocenil jedním bodem.

Někteří řešitelé se též snažili tvrdit, že taková funkce existuje. Nejčastěji při tom nabízeli funkce jako $f(x) = x - 1$ nebo $f(x) = \frac{x}{2}$. Bohužel pro ně ani jedna z těchto funkcí nemá jako svůj obor hodnot přirozená čísla (například funkční hodnota jedničky je v prvním případě nula, v druhém jedna polovina).

V několika řešeních jsem se setkal i s tvrzením, že všechny funkce lze popsat nějakým výrazem, jako například x, $x^5 - 1$ nebo $\sqrt{x}$. Taková řešení rozebrala pár druhů funkcí, které jejich autory napadly, a potom prohlásila, že žádné jiné funkce už neexistují. To také není pravda. Tuto výtku zde ale nebudu dále rozepisovat, protože k ní je poznámka již v povídání k této sérii nebo v o poznání obsáhlejším, avšak česky psaném povídání k třetí podzimní sérii 33. ročníku.

Na závěr bych chtěl poukázat na skutečnost, že ač to tak na první pohled nemusí vypadat, obě vzorová řešení jsou vlastně založena na té samé myšlence. Pouze nabízejí různé způsoby, jak o ní přemýšlet. Stejnou myšlenku využívala i všechna správná řešení. *(Viki Němeček)*

Problem 3.

Find a function $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that $f^{(n)}$ has exactly n roots for all positive integers n.

(David Hruška)

SOLUTION:

Let us partition all positive integers into disjoint sets M_m, $m\in\mathbb{N}$ such that each M_m contains m elements. One possible way to do this is to put $M_1=\{1\}$, $M_2=\{2,3\}$, $M_3=\{4,5,6\}$ and so on. That is we begin with $M_1=\{1\}$ and in general[1]

$$M_1=\{1\},\quad M_m=\{\max M_{m-1}+1,\max M_{m-1}+2,\max M_{m-1}+3,\dots,\max M_{m-1}+m\}\,.$$

Now we define a function $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that the roots of $f^{(n)}$ are exactly the elements of M_n for every $n\in\mathbb{N}$. The function is defined as follows:

$$f(k)=\begin{cases}-1, & \text{for } k\le 0,\\ 0, & \text{for } k\in M_1,\\ \max M_{m-1}, & \text{for } k\in M_m, m\ge 2.\end{cases}$$

Then for every $n\in\mathbb{N}$ we have

$$f^{(n)}(k)=\begin{cases}-1, & \text{for } k\le 0 \text{ or } k\in M_m,\ m<n,\\ 0, & \text{for } k\in M_n,\\ \max M_{m-n}, & \text{for } k\in M_m, m>n,\end{cases}$$

since if $k\in M_m$, then $f(k)\in M_{m-1}$. Therefore the roots of $f^{(n)}$ are exactly the elements of M_n, so there are n of them.

POZNÁMKY:

Správná řešení se prakticky dala rozdělit do dvou skupin. První následovala myšlenku vzorového řešení. Druhá vsadila na funkci $f(k)=|k-1|$ či nějakou její obměnu (často zapsanou jinak). Našlo se i několik řešitelů, kteří se pokoušeli najít funkci f ve tvaru polynomu. Ti bohužel uspět nemohli, jelikož polynom splňující podmínku v zadání neexistuje. To je, volně řečeno, proto, že polynom f stupně alespoň dva (polynom stupně jedna určitě zadání nesplňuje) nám čísla, která jsou dost daleko od nuly, posílá ještě dál od nuly. Tudíž v absolutní hodnotě dost velká čísla nemohou být kořenem žádného $f^{(n)}$, a proto pro velké n nemůže mít $f^{(n)}$ dost kořenů.

Nakonec bylo pár řešitelů, kteří nepochopili význam symbolu $f^{(n)}$. Proto bych rád připomněl, že pokud máme k sérii úvodní text, vyplatí se ho pečlivě přečíst. *(Tonda Češík)*

Problem 4.

Find all functions $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ satisfying $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ for all $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(Jakub Löwit)

SOLUTION:

Let us choose an arbitrary $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Then we can plug a and $\frac{1}{a}$ into x in our functional equation:

$$f(a)+2f\left(\frac{1}{a}\right)=a,$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right)+2f(a)=\frac{1}{a}.$$

[1] The number $\max A$ is the largest element of the set A. So for example $\max M_3=6$.

We can easily solve this system of two equations by multiplying the second one by -2 and adding them together. Then we get

$$f(a) = \frac{2 - a^2}{3a}.$$

Now we know that every function satisfying the functional equation must assign $\frac{2-x^2}{3x}$ to any x from its domain. However, we must verify that this function really is a solution:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 - x^2}{3x} + 2 \cdot \frac{2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}{3\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{2 - x^2}{3x} + \frac{4x^2 - 2}{3x} = x.$$

Therefore $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ is a solution to the functional equation and it is the only one.

Poznámky:
Takřka všechna řešení se dobrala ke správnému předpisu funkce f. Někteří však zapomněli provést zkoušku nebo aspoň konstatovat, že všechny provedené úpravy rovnic byly ekvivalentní a platí pro každé a z definičního oboru. Pak totiž i bez zkoušky víme, že pro každé a musí platit také výsledný předpis a že tento předpis ekvivalentně vyhovuje i původní funkcionální rovnici. Takovým zapomnětlivcům jsem strhla jeden bod.

Nepříjemně mě překvapilo množství řešitelů, kteří špatně upravili rovnici nebo do závěru napsali jiný předpis pro f, než jaký našli o několik řádků výše. Pokud se správný výsledek jinde v textu vyskytoval a bylo jasné, že jde o překlep, body jsem nestrhávala. Ale chtěla bych zdůraznit, že taková nedbalost opravdu nepůsobí dobře.

Nakonec upozorním, že ač jsem se několikrát dočetla, že inverzní funkcí k $f(x)$ je $f\left(\frac{1}{x}\right)$, není tomu tak. *Inverzní funkce* k f je taková funkce f^{-1}, pro kterou platí $f^{-1}(f(x)) = x$. Například pro $f(x) = x^2$ je to tedy funkce, která x přiřadí $\sqrt{x}$, nikoli $\frac{1}{x^2}$.

(Bára Kociánová)

Problem 5.

Let $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a function that satisfies $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$. Show that f is nonincreasing.

(Pepa Svoboda)

Solution:
First, let us prove that $f(x) \leq 1$ for all x.

Assume $f(c) > 1$ for some c. If we plug $(x, y) = (c, y)$ into our equation, we get

$$f(c)f(yf(c)) = f(c+y).$$

Now we can choose y in such a way that $c + y = yf(c)$ holds. This is possible by solving the linear equation for y. By doing so, we obtain $y = \frac{c}{f(c)-1}$. Both the numerator and the denominator are positive numbers from our assumptions, therefore we can plug this y into our functional equation. However, we have chosen y in such a way that we can divide both sides of the equation by (positive) number $f(yf(c)) = f(c+y)$:

$$f(c) = \frac{f(c)f(yf(c))}{f(yf(c))} = \frac{f(c+y)}{f(c+y)} = 1.$$

This contradicts our assumption $f(c) > 1$. Therefore, $f(x) \leq 1$ for all positive x.

Now we prove that f is nonincreasing. In order to do that let us take positive numbers a and b such that $a < b$. Now if we plug $x = a$ and $y = b - a > 0$ into the original equation, we get

$$f(a)f((b-a)f(a)) = f(b).$$

We know that $f(x) \leq 1$ for all positive x. Hence $f((b-a)f(a)) \leq 1$ must hold as well and we conclude that $f(a) \geq f(b)$, as desired.

Poznámky:
Většina došlých řešení využívala tento nebo lehce obměněný postup. Upozornil bych především na to, že negací výroku „funkce f je nerostoucí" není výrok „funkce f je rostoucí" – funkce totiž může být na některých intervalech rostoucí a na některých ne. *(Marian Poljak)*

Problem 6.

Lucien had a dream about a nonzero polynomial P with nonnegative integer coefficients. If Áďa says an integer z, Lucien tells her the value $P(z)$. What is the lowest number of questions Áďa has to ask to be able to figure out what Lucien's polynomial is?

(Rado van Švarc)

Solution:

From the assumption P is a polynomial with nonnegative integer coefficients. Hence there is a natural number n and $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

We shall prove that the answer is two. To guess Lucien's polynomial Áďa's first wants to know the value of $P(x)$ at 1, thus obtaining the sum of all the coefficients of P. Because the coefficients are nonnegative, $P(1) + 1$ is strictly greater than each of them.

Now Áďa chooses natural number k, such that $10^k > P(1) + 1$ and asks for the value of $P(x)$ at 10^k. Let us denote it by m. Each of the coefficents has at most k digits and all the numbers $a_n 10^{kn}, a_{n-1} 10^{k(n-1)}, \ldots, a_1 10^k$ have at least k zeros at the end, so the last k digits of m will represent a_0. Numbers $a_n 10^{kn}, a_{n-1} 10^{k(n-1)}, \ldots, a_2 10^{2k}$ have at least $2k$ zeros at the end, so the next k digits of m represent a_1 and so on. Using this approach Áďa can determine every coefficient of Lucien's polynomial.

It remains to be proven that one question is not sufficent to determine the polynomial. Suppose Áďa's only question will be the value of $P(x)$ at l. If the answer is l^2 then there are at least two possible polynomials, namely the quadratic x^2 and the constant l^2, so Áďa can never guarantee to choose the right one.

Poznámky:
Někteří zapomněli na klíčovou podmínku, že koeficienty jsou nezáporná celá čísla, a proto jim vyšla odpověď $n + 1$, kde n je stupeň polynomů. Bohužel stupeň polynomů předem neznáme, a proto to nemůže být správné řešení. Dále, ačkoli je počet otázek překvapivě malý, je pořád potřeba ověřit, že jedna otázka nestačí. Vzhledem k tomu, že se jedná o nedílnou součást každého důkazu, kde hledáme minimum nebo maximum, strhl jsem za takovou nedbalost dva body.

Hlavní idea důkazu spočívá v tom, že nám první otázka dá horní mez pro koeficienty. Dále můžeme tyto koeficienty považovat za číslice v jednoznačném zápisu nějaké číselné soustavy.

(Anh Dung „Tonda" Le)

Problem 7.

A function $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ is said to be cruelstrict if $f^{(f(k))}(k) = k$ for all positive integers k. Prove that any cruelstrict function has at least $P(n) + 1$ fixed points, where $P(n)$ is the number of primes in $(\sqrt{n}, n\rangle$.

(Rado van Švarc)

Solution:
Let us consider a directed graph on n vertices that represent numbers $1, \ldots, n$. There is an edge from x to y if and only if $y = f(x)$. From every vertex there is one outgoing edge and there is at least one incoming edge to each vertex because

$$x = f^{f(x)}(x) = f(f^{f(x)-1}(x)),$$

where we define $f^0(x)$ as x. Consequently, there is exactly one incoming edge to each vertex because the number of outgoing edges is the same as the number of incoming edges (it is simply the number of edges).

We pick an arbitrary vertex and go along the only outgoing edge. Because the number of vertices is finite, after some number of steps we return to some vertex that we have visited earlier. Moreover, it has to be the vertex where we started (otherwise there would be a vertex with two incoming edges).

So the whole graph is a union of several cycles (some of which may be of length 1).

Lemma. *The length of the cycle divides every number in the cycle.*

Proof. Let's take an arbitrary vertex x and its predecessor on the cycle y. Then $f^{f(y)}(y) = y$, or $f^x(y) = y$. This means that if we start walking from vertex y along the edges and do x steps, we end up back in vertex y. So the length of the cycle must divide x.

Now we take any prime number $p \in (\sqrt{n}, n\rangle$. We know it is in some cycle and by the lemma its length must divide p, so it is either 1 or p. Suppose for the sake of contradiction that its length is p. Then, according to the lemma, every number in the cycle is divisible by p. But every vertex in the cycle represents different number, so we have p different multiples of p. That is a contradiction with the fact that number of multiples of p in the set $\{1, \ldots, n\}$ is $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor < \sqrt{n} < p$.

Vertex that represents number p is therefore in a cycle of length one which means $f(p) = p$, so p is a fixed point. Moreover we know from the lemma that number 1 lies in a cycle of length 1 so it is a fixed point as well (and it is not equal to any of the previous numbers because it is not a prime).

Hence we found $P(n) + 1$ fixed points which concludes the proof.

Poznámky:

Všechna správná došlá řešení postupovala stejně jako řešení vzorové. Jediný rozdíl byl v tom, že většina z nich nepoužila pro představu funkce graf, nýbrž o jednotlivých krocích mluvila algebraicky. Například to, že do každého vrcholu vchází jedna hrana, odpovídá tomu, že zobrazení f je bijekce.

(Štěpán Šimsa)

Problem 8.

Let $f \colon \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ be a function given by $f(n) = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots(n-1)\sqrt{n}}}}$ for all positive integers $n > 1$. Prove that f is bounded by 3.

(Rado van Švarc)

Solution:

Let M be the set of ordered pairs natural numbers (m, n), for which $m \leq n$. Let $g \colon M \to \mathbb{R}$ be a function given by $g(m, n) = \sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots(n-1)\sqrt{n}}}}$ for every pair $(m, n) \in M$. Let us prove that for every $(m, n) \in M$ the relation $g(m, n) < m + 1$ holds. Since $0 < f(n) = g(2, n)$, we'll be done after that.

We'll use a quite unusual form of induction, specifically for m going from n to 1. For $m = n$, we are to prove that $\sqrt{n} < n + 1$. That's obvious from $\sqrt{n} \leq n$.

Now let $g(m, n) < m + 1$ for some $m > 1$. Then

$$g(m-1, n) = \sqrt{(m-1)g(m, n)} < \sqrt{m^2 - 1} < m$$

and that means we're done.

Sketch of "adult" solution (by Alexandr Jankov):
We're going to use some advanced arsenal now, specifically Jensen inequality and infinite sums. We will not always be perfectly rigorous, only main ideas will be shown.

After taking the logarithm of $f(n) < 3$ we'll get an equivalent inequality

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{2^{k-1}} < \ln 3.$$

Since all terms in this series are positive, it's enough to prove

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{2^{k-1}} < \ln 3.$$

Notice that (from formula for the sum of infinite geometric series) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Also let us mention that

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1+i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 3.$$

Since logarithm is a concave function we have from the infinite Jensen inequality

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{2^{k-1}} \leq \ln \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} \right) = \ln 3$$

and we're done.

Poznámky:
Ačkoliv úloha nebyla přímo jednoduchá, byla dosti „datelná“ a dala se celkem rozumným způsobem „umlátit“. Nakonec ovšem žádné řešení nebylo natolik ošklivé, abych byl nucen dát mu $-i$. Na druhou stranu bylo rozdáno několik $+i$ za řešení podobná prvnímu vzoráku. *Alexandr Jankov* poslal dvě řešení (která jsou výše obě uvedena), z nichž druhé se mi líbilo natolik, že jsem k již udělenému $+i$ za řešení dle prvního vzoráku přidal další $+i$, čímž bylo po dlouhé době opět uděleno hodnocení $5 + 2i$.

Rád bych řešitele upozornil na to, že při práci s nekonečnými řadami není vždy povoleno libovolně přeskládávat a uzávorkovávat členy, obzvlášť pokud jsou mezi nimi kladná i záporná čísla. Nakonec jste vždy dělali jen změny, které vlastně povolené jsou (ačkoliv jste to obvykle neodůvodňovali), a tak jsem se za to rozhodl body nestrhávat. Koneckonců, já to ve vzoráku taky z důvodu přehlednosti nedělal. *(Rado van Švarc)*