Burnsideovo lemma

Háňa Bendová

Abstrakt. Burnsideovo lemma je silný nástroj při řešení jistého typu kombinatorických úloh. V tomto příspěvku jsou na konkrétním příkladu vysvětlené potřebné pojmy a následně i samotné lemma. Příspěvek také obsahuje sadu několika dalších příkladů.

Jedná se o velice silný nástroj při počítání jistých kombinatorických úloh, které by nám bez znalosti tohoto lemmatu připadaly neřešitelné.

Příklad. Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků? Korálky jsou navlečené na šňůrce, takže dva náhrdelníky lišící se jen pootočením považujeme za shodné.

Kdybychom nedodali poslední větu, byla by odpověď lehká, hledaný počet by byl $\binom{8}{3} = 56$ (počítáme „pevné“ náhrdelníky, tj. náhrdelníky, u kterých záleží na natočení). Nám ovšem některé náhrdelníky splynou, takže jich bude méně. Jednou z možností, jak spočítat kolik jich tedy je, je použít Burnsideovo lemma. Časem si povíme, co toto lemma říká i jak ho na takový příklad aplikovat. Nejdřív si ale přiblížíme několik pojmů.

Permutace, grupa

Permutace množiny X je *prosté* zobrazení množiny X *na* X, tzn. žádné dva prvky se nezobrazí na stejný prvek (prosté) a zároveň se na každý prvek něco zobrazí (na). Jde tedy o nějaké „přeházení“ prvků množiny X.
Grupa permutací[1] v podstatě znamená, že máme množinu, na ní permutace a mezi permutacemi jakožto prvky množiny binární operaci skládání (složit 2 permutace znamená provést je za sebou – POZOR, záleží na pořadí – běžně se permutace skládají zprava doleva). Ke každé permutaci existuje permutace k ní inverzní (složením permutace s permutací k ní inverzní dostaneme identitu).
Nechť $S(X)$ je grupa permutací na množině X. Pojmem **podgrupa** rozumíme podmnožinu grupy $S(X)$ takovou (označme ji G), která s každou permutací obsahuje i její inverzi a navíc je uzavřená na skládání (tzn. s každými dvěma permutacemi obsahuje i jejich složení – z čehož mimo jiné vyplývá, že obsahuje i identitu).

V našem příkladu si množinu X představme jako množinu všech možných „pevných“ náhrdelníků ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků, tedy takových, u kterých záleží na natočení. Za podgrupu G grupy všech permutací na X budeme brát jen ty permutace, které odpovídají nějakému otočení náhrdelníku (včetně identické permutace), tj. otočení o $k \cdot 45°$, $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Klíčová slova. kombinatorika, náhrdelníky, obarvení, permutace, grupa, podgrupa, orbita, pevný bod

[1]Tohoto pojmu netřeba se bát. :-)

Orbita, pevné body

Pro $x \in X$ označme $O_x = \{\pi(x);\ \pi \in G\}$ takzvanou **orbitu** prvku x; v podstatě to jsou body, kam se můžu z x dostat použitím permutací z G. Množinu všech orbit, tj. $\{O_x;\ x \in X\}$, budu značit $\mathcal{O}$.

Všimni si, že pokud $y \in O_x$, tak $O_x = O_y$. Intuitivně je to jasné — pokud se z jednoho místa mohu dostat do druhého, tak se z obou mohu dostat do týchž míst. A není problém toto přeformulovat do přesného důkazu.

Z toho ovšem plyne důležitý důsledek: orbity tvoří rozklad množiny X. Tím se míní, že každé $x \in X$ leží v právě jedné orbitě. Zjevně totiž $x \in O_x$. Pokud by x ležel ještě v nějaké jiné orbitě, tj. $x \in O_y$ a $O_x \neq O_y$, pak je dle předchozího odstavce $O_x = O_y$, což je spor. V množině $\mathcal{O}$ jsou tedy množiny, které jsou po dvou disjunktní a jejichž sjednocení je celé X.

V našem příkladu tvoří orbity skupiny náhrdelníků, které se na sebe dají převést pouhým otočením (tj. nějakou permutací z G). Naším cílem je tedy spočítat počet všech orbit.

Bod x se nazývá *pevným bodem* permutace π, pokud $\pi(x) = x$. Jedná se tedy o body, které permutace π zachová (nepohne s nimi)). Množinu všech pevných bodů permutace π budeme značit $X_\pi = \{x \in X;\ \pi(x) = x\}$.

Uvážím-li tedy nějakou permutaci z G z našeho příkladu, tj. nějaké otočení náhrdelníku, pevné body této permutace budou všechny takové náhrdelníky, které se příslušným otočením nezmění. Je snadné ověřit, že v případě našeho náhrdelníku ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků je množina pevných bodů identické permutace celé X, tedy všech $\binom{8}{3} = 56$ náhrdelníků (každý se zobrazí sám na sebe) a ostatní permutace (otočení o $k \cdot 45°$, $k = 1, 2, \ldots, 7$) nemají žádný pevný bod. Kdybychom ovšem měli jiný náhrdelník, třeba ze 4 skleněných a 4 dřevěných korálků, pak už by například otočení o 180° pevné body mělo, kupříkladu náhrdelník, kde se korálky pravidelně střídají.

Burnsideovo lemma

A teď již konečně přijde na řadu ono slíbené báječné mazané …

Lemma. (Burnsideovo)

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} |X_\pi|$$

Možná interpretace: „Počet orbit je roven průměrnému počtu pevných bodů permutací v G."

Pěkný důkaz je v příspěvku Roberta Šámala: „Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati".

Aplikujeme-li lemma na náš příklad, dostaneme, že počet orbit (to jest přesně to, co chceme spočítat – počet různých náhrdelníků, nezáleží-li na natočení) je roven

$$\frac{1}{8} \cdot (56 + 0 + \cdots + 0) = 7.$$

Úlohy

Příklad 1. Jak se změní výsledek příkladu z úvodu, budeme-li moci náhrdelník i převracet?

Příklad 2. Kolik náhrdelníků lze sestavit z k skleněných a $8 - k$ dřevěných korálků?

Příklad 3. Kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice

(1) 3×3
(2) 4×4
(3) $n \times n$

dvěma barvami? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud lze dostat jedno z druhého pootočením šachovnice.

Příklad 4. Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že je šachovnice skleněná (sklo je průhledné, šachovnice se teď dá i překlápět).

Příklad 5. Dětská skládanka obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3, nezáleží-li na natočení?

Příklad 6. Kolika způsoby lze obarvit stěny krychle

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením krychle.

Příklad 7. Kolika způsoby můžeme obarvit hrany krychle

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Příklad 8. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle

(1) 3 barvami?
(2) k barvami?

Příklad 9. Na každou ze stěn krychle máme nakreslit některou z úhlopříček. Kolik různých krychlí můžeme získat?

Příklad 10. Na každou ze stěn krychle máme nakreslit šipku mířící k některému z vrcholů krychle ležících v této stěně. Kolik různých krychlí můžeme získat?

Příklad 11. Jak se změní odpověď v předchozí úloze, můžeme-li na libovolný počet stěn šipku nenakreslit?

Příklad 12. Kolika způsoby lze na stěny krychle umístit čísla 1–6? Kolika způsoby to lze udělat tak, aby byl součet protilehlých čísel 7?

Příklad 13. Kolika způsoby lze obarvit stěny čtyřstěnu

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením čtyřstěnu. Co se stane, pokud budeme uvažovat všechny symetrie čtyřstěnu?

Příklad 14. Kolika způsoby můžeme obarvit stěny pravidelného dvanáctistěnu, máme-li k dispozici 2 barvy?

Příklad 15. Kolika způsoby můžeme obarvit hrany pravidelného dvanáctistěnu, máme-li k dispozici 3 barvy?

Příklad 16. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy pravidelného dvanáctistěnu, má-li být polovina bílých a polovina černých?

Příklad 17. Kolik různých náramků je možné vytvořit ze 3 bílých, 3 červených a 3 černých korálků, nemají být žádné dva korálky stejné barvy vedle sebe? Dva náramky, které na sebe umíme převést pouhým překlopením nebo otočením, považujeme za stejné.

Příklad 18. Pro všechna přirozená N a n dokažte, že n dělí $\sum_{k=1}^{n} N^{\mathrm{NSD}(n,k)}$, kde $\mathrm{NSD}(a,b)$ značí největší společný dělitel čísel a a b.

Úlohy jsou čerpány ze sbírky *Příklady z algebry* od Davida Stanovského, a z knihy *Metody řešení matematických úloh II* od kolektivu autorů Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša.

Poděkování

Tento text čerpá ze starších příspěvků

[1] Robert Šámal, *Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati*, Rokytnice 1998,
[2] Zuzanka Safernová, *Burnsideovo lemma*, Rapotín 2007.

Velká část je přímo převzata z jednoho či druhého, proto děkuji oběma autorům, neboť mi velmi ušetřili práci.