Matematický aparát fyziky

Martin Fraas

Pozrieme sa na využitie rôznych matematických disciplín vo fyzike. V prednáške nám nepôjde o exaktné matematické dôkazy a značenie, ale o metódy počítania s ním. Preto mi v texte nižšie odpuste rôzne nepresnosti a aj vedomé zamienanie rôznych pojmov, ktoré sú ale pri praktickom použití nerozlíšiteľné.

Lineárna Algebra

Každý priestor ma samozrejme svoju bázu – (to jest napr. vektory $(1,0,0),(0,1,0)$ a $(0,0,1)$, ktoré tvoria tak zvanú kartézku bázu) – my nepotrebujeme uvažovat priestor s n dimenziami a úplne si vystačíme s bázou e_i pre normálny trojrozmerný euklidovský priestor (takže $i = 1,2,3$) a bázou e_α pre minkovského časopriestor (teda $\alpha = 0,1,2,3$ pričom 0 je vyhradená pre časovú zložku). Každý vektor sa teda dá vyjadrit v tvare $v = \alpha_i e_i$ kde čísla α_i nazývame súradnicami. Transformácie vektorov sú dané vzťahmi $v' = Av$. Teda napríklad otočenie vektora o 90 stupňov $x' = -y$, $y' = x$ je dané maticou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

alebo pre súradnice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A ešte inak pre počítanie najlepšie $x'^j = A^j_i x^i$. Kde pri zápise používame Einsteinovo sumačné kritérium podľa ktorého ak su vo výraze dva rovnaké indexi tak sa cez ne sumuje, teda zápis $a_i b_i$ značí $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Pre fyziku je dôležité ako sa transformujú súradnice pri prechode medzi rôznymi inerciálnimi sústavami. V klasickej mechanike je to Galileova transformácia:

$$t' = t, x' = x + vt, y' = yz' = z$$

A v špeciálnej relativite sa transformuje Lorentzovou maticou

$$\lambda^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde γ je známe $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ a platí $x'^\alpha = \lambda^\alpha_\beta x^\beta$.

Ďalšou dôležitou štruktúrou priestoru je norma teda spôsob ako v ňom počítame vzdialenosť. Obecne nám vzdialenosť s definuje nejaká symetrická bilineárna forma vzťahom $s^2 = g_{ij}x^ix^j$. Kde g_{ij} nazývame metrickým tenzorom. Pre normálnu euklidovskú vzdialenosť je $g_{ij} = \delta_{ij}$ pričom δ_{ij} je tzv. kroneckerovo delta definované ako $\delta_{ij} = 1$ ak $i = j$ inak $\delta_{ij} = 0$. Teda skutočne sú to naše známe vzdialenosti $s^2 = \delta_{ij}x^ix^j = x^ix^i = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$. V časopriestore máme metrický tenzor

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

teda vzdialenosť $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$.

Tenzory

Tenzor je písmenko ktoré ma indexi dole a indexi hore napr. a^l_{ijk} a cez tieto indexi sa dá sumovať a každý index sá dá transformovať. Jedným z najjednoduchších používaných tenzorov je Levi-civitov symbol ε_{ijk} definovaný ako znak permutacie ijk.

Invariantné vektory

Vektory žijú aj bez popisu v nejakej súradnicovej sústave (my sme zatiaľ používali kartézsku, ale ďalej si ešte ukážeme cilindrické a sférické súradnice), pri tomto chápaní ale potrebujeme na prácu s nimi mať definované „invariantné“ operácie a poznať potrebné vektorové identity. Teda základné operácie (odhliadnuc od sčítavania..) sú skalárny súčin $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, vektorový súčin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ a diadický súčin $\boldsymbol{uv}$. A základné identity:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{CB} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{BC}$$

a

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}).$$

K nim by sa ešte hodilo dodať (anti)komutativitu vektorového, skalárneho súčinu a asociativitu skalárneho a diadického. Poznamenajme, ešte že v zložkovom zápise je $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk}a^jb^k$.

Súradnicové sústavy

Polárné súradnice popisujú rovinu pomocou vzdialenosti od počiatku a uhlu ktorý zviera sprievodič s osou x. Teda $x = \varrho\cos\varphi, y = \varrho\sin\varphi$. Cylindrické alebo válcové súradnice vzniknú doplnením polárnych o výšku nad rovinou xy teda o súradnicu z. Sférické súradnice $r, \vartheta, \varphi, \varphi$ zavedieme takto: Spojnici počiatku O s daným bodom P

prísluší vzdialenosť $r = |OP|$, táto spojnica zviera s osou z uhol ϑ. A priemet tejto spojnice do roviny xy zviera s osou x uhol φ. Platia vzťahy: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, y = r \sin\vartheta \sin\varphi, z = r \cos\vartheta$. Niekedy sa ešte hodí poznať rovnice kužeľosečiek v polárnych súradniciach: $\varrho = \frac{p}{1+\varepsilon(\varphi-\varphi_0)}$, pričom $\varepsilon = 0$ odpovedá kružnici, $\varepsilon < 1$ elipse, $\varepsilon = 1$ parabole a $\varepsilon > 1$ hyperbole.

Komplexné čísla

Zavádzame ich vzťahom $z = a + bi$, kde $i^2 = -1$, alebo ako $z = re^{i\varphi}$, kde r je absolútna hodnota komplexného čísla $r = a^2 + b^2$ a φ je uhol natočenia v gaussovej rovine. Dôležitým poznatkom je že násobenie komplexného čísla výrazom $e^{i\varphi}$ je otočenie fázora o uhol φ. A pre počítanie treba vedieť komplexné čísla deliť $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ a umocňovať $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$.