Slavné matematické problémy starověku

Radek Erban

Úvod

Už od 5. století př.n.l. začaly řeckou matematikou hýbat tyto tři slavné problémy:

(1) *Zdvojení krychle*, tj. nalezení hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobkem zadané krychle.

(2) *Trisekce libovolného úhlu*, tj. rozdělení daného úhlu na tři stejné části.

(3) *Kvadratura kruhu*, tj. nalezení čtverce o obsahu rovném obsahu daného kruhu.

U každého z těchto problémů se jednalo o konstrukci jednoho geometrického objektu z jiného pomocí pravítka a kružítka. Otázka tedy zněla, zda-li je možné v konečném počtu kroků využívajících pouze pravítko (bez stupnice) a kružítko provést požadované konstrukce. Poznamenejme, že to byly čistě teoretické problémy, v praxi není důvod se omezovat jen na pravítko a kružítko a vsechny požadované konstrukce lze provést s dostatečnou přesností. Tyto starověké problémy ovšem velice pomohly v rozvoji matematiky. Vedly k objevení kuželoseček a dalších křivek, k rozvoji moderní teorie rovnic a těles. Ačkoliv jsou to problémy geometrické, k jejich řešení budeme využívat moderní algebru. Ukážeme, že ani jednu z konstrukcí není možné provést pomocí kružítka a pravítka.

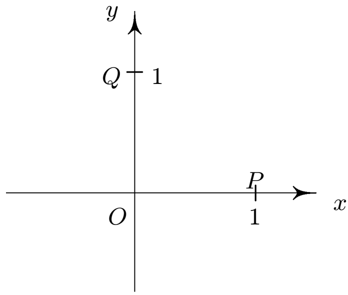
Nejprve si problémy přeformulujme do řeči čísel:

(1) Budeme-li brát hranu zadané krychle jako jednotku délky, můžeme problém zdvojení krychle přeformulovat takto: „*Je dána úsečka délky* 1. *Zkonstruuj úsečku délky x, kde $x^3 = 2$.*“

(2) K tomu, abychom ukázali, že libovolný úhel nelze rozdělit na tři části pomocí pravítka a kružítka, stačí ukázat, že nelze roztřetit úhel 60°. Snadno ověříme, že úhel α může být zkonstruován právě tehdy, když je zkonstruovatelná úsečka délky $\cos\alpha$ z dané úsečky délky 1. Využijeme-li snadno ověřitelnou identitu
$$\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$
pro $\alpha = 60^\circ$, dostaneme
$$8x^3 - 6x - 1 = 0, \quad \text{kde } x = \cos 20^\circ.$$
Problém trisekce úhlu 60° lze proto přeformulovat takto: „*Je dána úsečka délky* 1. *Zkonstruuj úsečku délky x, kde $8x^3 - 6x - 1 = 0$.*“

(3) Budeme-li brát poloměr zadaného kruhu jako jednotku délky, můžeme problém kvadratury kruhu přeformulovat takto: „*Je dána úsečka délky* 1. *Zkonstruuj úsečku délky x, kde $x^2 = \pi$.*“

Tím se nám podařilo přeformulovat všechny tři řecké úlohy. Nyní předpokládejme, že máme dánu úsečku délky 1. Pomocí kružítka a pravítka můžeme nejprve zkonstruovat dvě kolmé přímky. Na každou z nich si vyneseme vzdálenost délky 1 a dostaneme souřadné osy v rovině, které nám umožní přiřadit souřadnice každému bodu roviny. Označme si tyto osy x a y :



Nyní můžeme zavést následující přirozené definice:

Definice 1. *Body O, P a Q nazveme zkonstruovatelné body. Zkonstruovatelnými body budeme dále nazývat všechny body, které můžeme zkonstruovat pomocí konečného počtu použití pravítka a kružítka, vyjdeme-li z bodů O, P a Q.*

Definice 2. *Zkonstruovatelná přímka je přímka procházející dvěma zkonstruovatelnými body.*

Definice 3. *Zkonstruovatelná kružnice je kružnice se středem ve zkonstruovatelném bodě a poloměrem rovným vzdálenosti mezi dvěma zkonstruovatelnými body.*

Shrnutím předcházejích definic vidíme, že bod různý od O, P, Q je zkonstruovatelný právě tehdy, je-li průsečíkem dvou zkonstruovatelných přímek, nebo dvou zkonstruovatelných kružnic, nebo zkonstruovatelné přímky a zkonstruovatelné kružnice.

Definice 4. *Zkonstruovatelné číslo je každé reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna vzdálenosti mezi nějakými dvěma zkonstruovatelnými body.*

Snadno nahlédneme, že bod je zkonstruovatelný právě tehdy, když každá z jeho souřadnic je zkonstruovatelným číslem. Abychom nyní mohli zkoumat zkonstruovatelná čísla, podíváme se do moderní algebry.

Exkurze do moderní algebry

Definice 5. *Nechť $\mathbb{T}$ je podmnožina reálných čísel taková, že pro libovolná dvě čísla $a \in \mathbb{T}$ a $b \in \mathbb{T}$ platí $a + b \in \mathbb{T}$, $a - b \in \mathbb{T}$, $a \cdot b \in \mathbb{T}$ a v případě, že $b \neq 0$, také $a/b \in \mathbb{T}$. Pak množinu $\mathbb{T}$ nazveme tělesem.*

Poznamenejme, že pod pojmem „těleso“ se v moderní algebře skrývají mnohdy obecnější matematické objekty než jen podmnožiny reálných čísel. Nám však bude stačit chápat tělesa pouze ve smyslu definice 5 (neplést si s pojmem tělesa známým z geometrie, to je jen shoda názvů). Příkladem tělesa je množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Definice 6. *Nechť $\mathbb{T}$ je těleso a $a \in \mathbb{R}$. Symbolem $\mathbb{T}(a)$ označíme nejmenší těleso, které obsahuje všechny prvky z $\mathbb{T}$ i číslo a.*

Například $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ obsahuje všechna reálná čísla $c + d\sqrt{2}$, kde $c \in \mathbb{Q}$ a $d \in \mathbb{Q}$.

Zkonstruovatelná čísla

Abychom vyřešili slavné starověké problémy, budeme nejprve zkoumat množinu všech zkonstruovatelných čísel. Označme ji písmenem $\mathbb{K}$. V dalších částech tohoto textu uvádím už jen bez důkazů a bez hlubší motivace seznam důležitých vět a lemmat, se kterými se na přednášce setkáme. Podrobné důkazy, komentáře, vysvětlení a motivaci se dozvíš na přednášce.

Vta 1. *Množina $\mathbb{K}$ všech zkonstruovatelných čísel je těleso.*

Lemma 1. *Nechť $\mathbb{T}$ je těleso.*

(a) *Pokud přímka obsahuje dva body, jejichž souřadnice jsou v tělese $\mathbb{T}$, pak má tato přímka rovnici $ax + by + c = 0$, kde $a \in \mathbb{T}$, $b \in \mathbb{T}$ a $c \in \mathbb{T}$.*

(b) *Pokud má kružnice poloměr v $\mathbb{T}$ a střed v bodě se souřadnicemi v $\mathbb{T}$, pak má tato kružnice rovnici $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, kde $d \in \mathbb{T}$, $e \in \mathbb{T}$ a $f \in \mathbb{T}$.*

Nyní můžeme přejít k základní charakterizaci zkonstruovatelných čísel:

Vta 2. *Reálné číslo r je zkonstruovatelné právě tehdy, když existuje konečná posloupnost těles*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{T}_k$$

takových, že $r \in \mathbb{T}_k$ a $\mathbb{T}_j = \mathbb{T}_{j-1}\left(\sqrt{a_{j-1}}\right)$, kde a_{j-1} je kladné číslo z tělesa $\mathbb{T}_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$.

Polynomy, tělesa a slavné problémy starověku

Starověké úlohy jsme přeformulovali do řeči polynomů. Klíčovou úlohu v jejich řešení bude hrát tato věta:

Vta 3. *Pokud kubická rovnice s racionálními koeficienty nemá žádný racionální kořen, nemá také žádný zkonstruovatelný kořen.*

K důkazu věty 3 se nám budou hodit dvě pomocná lemmata:

Lemma 2. *Má-li rovnice* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *kořeny* x_1, x_2 *a* x_3, *platí* $x_1+x_2+x_3=-b/a$.

Lemma 3. *Nechť* $\mathbb{T}$ *je těleso a nechť kubická rovnice* $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a,b,c,d \in \mathbb{T}$ *má kořen* $p+q\sqrt{r}$, *kde* $p,q,r \in \mathbb{T}$, $r > 0$ *a* $\sqrt{r} \notin \mathbb{T}$. *Pak* $p-q\sqrt{r}$ *je také kořenem rovnice* $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

S ohledem na větu 3 je dobré najít nějakou nutnou podmínku pro existenci racionálního kořene polynomu s celočíselnými koeficienty:

Vta 4. *Nechť* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *je polynom s celočíselnými koeficienty. Pokud* r/s *je racionální kořen* $f(x)$ *a* $(r,s)=1$, *pak* $r|a_0$ *a* $s|a_n$.

S využitím věty 3 a věty 4 již snadno vyřešíme problém trisekce úhlu a zdvojení krychle. Problém kvadratury kruhu souvisí s vlastnostmi čísla π a vyřešíme ho na základě věty 2.

(Text byl pro účely sborníčku zkrácen. Zájemci mohou kompletnější text získat na přednášce.)