

# Sto vězňů a žárovka

FILIP HLÁSEK

Budeme se zabývat známou a tradiční úlohou. Nebyla vždy takto populární a do obecného povědomí se dostala až začátkem jednadvacátého století. Vše začalo v roce 2002, kdy americká technologická společnost IBM vypsalala soutěž týkající se této úlohy. Poté se objevily nové varianty hádanky a vědecké články, které vedou k pozoruhodným aplikacím při návrhu komunikačních protokolů. Především teoreticky se jedná o velmi zajímavý problém a existuje mnoho dosud nezodpovězených otázek souvisejících s tímto tématem.

## Zadání problému

Do nejmenované věznice právě nastoupilo sto nových vězňů. Bachař jim dá šanci vymanit se ze svého trestu. Počínaje zítřkem budou věznění v oddělených celách a každý den bude vybrán jeden vězeň k výslechu. Jediným zajímavým předmětem ve výslechové místnosti je běžná žárovka, což je také jediný prostředek, pomocí kterého spolu mohou vězni komunikovat. Žárovku vidí pouze právě vyslýchaný vězeň a může ji dle svého uvážení zhasnout nebo rozsvítit. Kdykoliv může kterýkoliv vězeň ohlásit: „Všech sto vězňů již bylo alespoň jednou vyslechnuto.“ Pokud je to pravda, budou všichni okamžitě propuštěni, v opačném případě budou všichni popraveni. Pomozte vězňům domluvit si spolehlivou strategii, díky které se jim podaří dosáhnout svobody.

## Předpoklady

- (a) Každý vězeň bude vyslechnut nekonečněkrát. V některých případech budeme potřebovat dokonce, aby každý den byl vyslechnut náhodný vězeň.
- (b) Žárovka je na začátku zhasnutá.
- (c) Každý den je vyslechnut právě jeden vězeň.

## Řešení úlohy

V této sekci navrhneme několik různých postupů, jak spolu mohou vězni pomocí žárovky komunikovat. Ke každému uvedeme navíc střední počet dní, po nichž budou vězni propuštěni. Předpokládáme, že každý den má každý vězeň se stejnou pravděpodobností, že bude vyslechnut.

### Zkusíme štěstí

Rozdělíme dny na bloky po 100 dnech. Během každého bloku budou vězni komunikovat podle následujících pravidel:

- (i) Pokud je první den bloku a žárovka je zhasnutá, rozsviť ji.
- (ii) Je-li žárovka rozsvícená a jsi v tomto bloku vyslechnut podruhé, zhasni ji.
- (iii) Pokud je první den bloku a žárovka je rozsvícená, ohlaš, že již byli všichni vyslechnuti.
- (iv) Ve všech ostatních případech ponechej stav žárovky nezměněný.

Když některý vězeň ohlásí, že byli všichni vyslechnuti, musel být každý vyslechnut právě jednou v předcházejících 100 dnech. Pokud by tam byl v posledním bloku někdo dvakrát, žárovku by zhasnul. Ona ale zůstala rozsvícená, takže tam byl každý jenom jednou.

Střední doba trvání:  $\frac{n^{n+1}}{n!} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^n \doteq 1,072 \cdot 10^{44}$  dní.

### Počtář

Následující protokol nespolehá na počítání dní, ale dává speciální funkci jednomu vězni. Před začátkem si všichni zúčastnění určí jednoho, který bude mít roli *počtáře*. Počtář si bude pamatovat jedno celé číslo – počet spoluvězňů, u kterých si je jist, že již byli vyslechnuti.

Všichni ostatní vězni si budou pamatovat také jednu hodnotu – to, zda již počtáři sdělili, že byli vyslechnuti. Pro lepší představu uvážíme, že má každý na začátku jeden *token* (= virtuální předmět, který se snaží předat počtáři).

Dále detailněji popíšeme systém, kterým si vězni budou předávat tokeny:

- (i) Pokud nejsi počtář, máš ještě token a je zhasnuto, rozsviť a uber si jeden token.
- (ii) Jsi-li jsi počtář a je-li rozsvíceno, zhasni a připočti si jeden token.
- (iii) Pokud jsi počtář a nasbíral jsi všech 100 tokenů (včetně svého), ohlaš úspěch.
- (iv) Ve všech ostatních případech ponechej stav žárovky nezměněný.

Střední doba trvání:  $O(n^2) \sim 10417,74$  dní  $\doteq 28,54$  let.

## Dynamická volba počtáře

Trochu vylepšíme předcházející protokol tím, že zvolíme počtáře až v průběhu, nikoliv dopředu. Počtářem se stane ten, kdo bude během prvních  $n$  dní jako první vyslechnut podruhé. Celý protokol se tedy skládá ze dvou fází:

- (i) prvních  $n$  dní – Pokud budeš vyslechnut podruhé a je v místnosti zhasnuto, rozsvít a staň se počtářem. Ostatní poté vidí rozsvíceno a ví tedy, že funkce počtáře si už někdo vzal. Kdyby nikdo nepřišel do místnosti podruhé, bude v  $n$ -tém dni pořad zhasnuto a vězeň vyslýchaný ten den bude vědět, že všichni byli jednou vyslechnuti. Může tedy ohlásit úspěch.
- (ii) dny  $n + 1, n + 2, \dots$  – Uvažme, že počtář byl vyslechnut podruhé v  $k$ -tém dni. Předtím bylo vyslechnuto  $k - 1$  různých lidí. Jsou to právě ti, kteří viděli v první fázi zhasnutou žárovku. Můžeme tedy postupovat podle předcházejícího protokolu s tím rozdílem, že oněch  $k - 1$  různých lidí již své tokeny počtáři předalo (vědí to oni i počtář).

## Pomocní počtáři

Zásadní nevýhodou jednoho počtáře je to, že vždy poměrně dlouho trvá (průměrně 100 dní), než přijde a vezme si token. Navrhujeme protokol, který používá deset *pomocných počtářů* a jednoho *hlavního počtáře* (může jím být dokonce jeden z pomocných počtářů). Každý pomocný počtář bude sbírat tokeny, dokud jich nebude mít deset, a poté je pošle hlavnímu počtáři, který je posbírání po desítkách. Teoreticky tedy stačí, aby byl každý z počtářů vyslechnut přibližně dvacetkrát namísto předchozích minimálně 100 výsledků počtáře.

Na první pohled to může vypadat přímočaře, ale zůstává otázkou, jak předávat tokeny. Samozřejmě, že pomocí žárovky (žádný jiný prostředek totiž nemáme). Problém je ale v tom, že není jasné, zda rozsvícená žárovka znamená poslání jednoho tokenu od *nepočtáře* nebo jednoho *desítkového* tokenu od pomocného počtáře tomuto hlavnímu. Tyto dvě situace musíme nějak odlišit, nicméně žárovka může být buhužel pouze rozsvícená, nebo zhasnutá. Problém vyřešíme úskokem. Rozdělíme dny do jednotlivých fází. V první fázi (například 100 dní) budou posílat nepočtáři svoje jednotkové tokeny a pomocní počtáři je budou sbírat. Poté bude následovat druhá fáze (opět například 100 dní), kdy budou moct pomocní počtáři poslat své desítkové tokeny (pokud již nasbírali deset jednotkových) a hlavní počtář je bude sbírat. Po druhé fázi bude následovat opět první fáze a takto dále, dokud hlavní počtář neposbírá všech 100 tokenů. Každý vězeň si tedy musí důkladně počítat dny a vědět, která fáze právě probíhá.

Ani teď ještě nemáme vyhráno. Může se totiž stát, že nepočtář vyšle v první fázi token, ale do konce fáze už nebude vyslechnut žádný počtář. Když bude poté ve druhé fázi vyslechnut hlavní počtář, může si myslet, že rozsvícená žárovka symbolizuje desítkový token poslaný od pomocného počtáře. Takto může velmi snadno dojít k nedorozumění, které povede k neúspěchu. Bude tedy potřeba důsledně hlídat, aby tokeny „nepřetékaly“ mezi fázemi. Opravíme to tak, že během posledního dne každé

fáze sebere vyslýchaný vězeň token, pokud je žárovka rozsvícená, a to nezávisle na tom, zda je to počtář. I nepočtář tak může mít u sebe několik jednotkových či desítkových tokenů. Tyto tokeny se pokusí při nejbližší vhodné příležitosti doručit správným příjemcům. Když má nějaké tokeny, které mu nenáleží, je správná fáze a zhasnutá žárovka, vyše jeden z nich rozsvícením žárovky.

Tento poměrně komplikovaný doručovací mechanismus již funguje. Nyní ho popíšeme přesněji – každý vězeň začíná s jednotkovým tokenem a každý si bude pamatovat počet jednotkových a desítkových tokenů, které vlastní.

### Hlavní počtář

- (i) Pokud máš 10 desítkových tokenů, ohlaš vítězství.
- (ii) Pokud je druhá fáze a žárovka je rozsvícená, zhasni a připočti si desítkový token.
- (iii) Pokud je první fáze, máš jednotkový token a žárovka je zhasnutá, rozsviť a odeber si jeden token.
- (iv) Je-li poslední den první fáze a je rozsvíceno, zhasni a připočti si jednotkový token.

### Pomocný počtář

- (i) Pokud máš 10 jednotkových tokenů, zahod je a vyrob z nich jeden desítkový token. Přestáváš být pomocným počtářem a stáváš se nepočtářem.
- (ii) Pokud je první fáze, žárovka je rozsvícená, zhasni a připočti si jednotkový token.
- (iii) Pokud je druhá fáze, máš desítkový token a žárovka je zhasnutá, rozsviť a odeber si desítkový token.
- (iv) Je-li poslední den druhé fáze a je rozsvíceno, zhasni a připočti si desítkový token.

### Nepočtář

- (i) Pokud je první fáze, máš jednotkový token a žárovka je zhasnutá, rozsviť a odeber si jeden token.
- (ii) Je-li poslední den první fáze a je rozsvíceno, zhasni a připočti si jednotkový token.
- (iii) Pokud je druhá fáze, máš desítkový token a žárovka je zhasnutá, rozsviť a odeber si desítkový token.
- (iv) Je-li poslední den druhé fáze a je rozsvíceno, zhasni a připočti si desítkový token.

Střední doba trvání:  $3\,500 - 4\,000 \text{ dní} \doteq 9,5 - 11 \text{ let}$ .

### Binární tokeny

Myšlenku uvedenou v předcházejícím řešení se nyní pokusíme ještě zobecnit, a dosáhnout tak téměř nejlepšího dosud známého postupu. Jak již název napovídá, nebudou počtáři shlukovat tokeny po deseti, ale po mocninách dvojky. Budeme potřebovat,

aby počet všech tokenů byla mocnina čísla dvě. Když počet vězňů není mocnina dvojky, dáme na začátku některému vězni tokenů více.

Předpokládejme tedy, že všichni vězni dohromady mají  $2^k$  tokenů. Jejich počáteční rozdělení si domluví před začátkem, přičemž jediná podmínka je, aby měl každý alespoň jeden. Jakmile někdo získá všechny, může ohlásit úspěch. Podobně jako v minulém případě budou i tentokrát jednotlivé tokeny různě cenné. Konkrétně máme  $k+1$  druhů tokenů o hodnotách  $2^0, 2^1, \dots, 2^k$ . Jakmile někdo získá dva tokeny stejné hodnoty  $2^i$ , udělá z nich jeden hodnoty  $2^{i+1}$ .

Jak si budou vězni tokeny mezi sebou předávat? Opět nás nezklame myšlenka rozdělení dnů na fáze. Tentokrát bude ovšem fází  $k$  a bude mnohem více záviset na jejich velikosti. Jako nejlepší se ukazují stejně dlouhé fáze o zhruba 613 dnech. Nyní již máme vše potřebné k tomu, abychom řádně popsal, jak budou vězni komunikovat v  $i$ -té fázi:

- (i) Pokud máš token hodnoty  $2^k$ , ohlaš úspěch.
- (ii) Pokud máš dva tokeny hodnoty  $2^j$  pro nějaké celé  $j$ , udělej z nich jeden token hodnoty  $2^{j+1}$ .
- (iii) Je-li žárovka rozsvícená, zhasni ji a připočti si token hodnoty  $2^i$ .
- (iv) Je-li žárovka zhasnutá a máš-li token hodnoty  $2^i$ , rozsviř a odeber si token.

Střední doba trvání:  $O(n(\ln n)^2) \sim 3\,500$  dní  $\doteq 9$  let.

## Varianty úlohy

- (1) **Zákeřný bachař** – Je dáno předem známé přirozené číslo  $k$ . Bachař může  $k$ -krát během celého procesu změnit stav žárovky (rozsvítit nebo zhasnout).
- (2) **Všichni musí ohlásit** – Vězni budou propuštěni jedině tehdy, pokud všichni ohlásí, že již všichni byli vyslechnuti.
- (3) **Propuštěný po ohlášení** – Všichni vězni musejí ohlásit, ale pokud někdo ohlásí, je okamžitě propuštěn a už nikdy nebude vyslýchán.
- (4) **Červené a modré cely** – Někteří vězni jsou ubytováni v červených celách, zatímco ostatní v modrých. Při ohlášení musí vězeň také nahlásit, kolik jeho kolegů bydlí v červených a kolik v modrých celách.
- (5) **A pošle zprávu B** – Předem určený vězeň  $A$  musí poslat zprávu (přirozené číslo) vězni  $B$ .
- (6) **Číslo v celách** – V každé cele je napsáno jedno celé číslo. Vězeň, který ohlašuje, musí nahlásit také všechna tato čísla.
- (7) **Všichni posílají zprávy všem** – Navrhněte obecný protokol, pomocí kterého si budou moci navzájem posílat jakékoliv zprávy.
- (8) **Všichni musí ohlásit ve stejný den** – Vězni mohou ohlásit, že již všichni byli vyslechnuti, také ve dny, kdy nejsou vyslýcháni. Budou propuštěni jedině tehdy, pokud to všichni ohlásili ve stejný den. Ohlásí-li to někdo dříve, budou všichni popraveni.
- (9) **Náhodné časy** – Řešte všechny předcházející úlohy bez předpokladu (c). Vězni jsou vyslýcháni v náhodné časy a nemohou tedy počítat dny.

## Návody na řešení jednotlivých variant

- (1) **Zákeřný bachař** – Každý vězeň bude mít  $2k + 1$  tokenů (méně nestačí!), a když počtář napočítá do  $100(2k + 1) - k$ , může ohlásit, že již všichni byli vyslechnuti.
- (2) **Všichni musí ohlásit** – Použijeme strategii *počtář* s tokeny  $n$  druhů (tedy  $n$  fází). Každý vězeň bude mít na začátku token určený pro každého dalšího. Každý vězeň je počtářem svého druhu tokenů.
- (3) **Propuštění po ohlášení** – Funguje předcházející strategie: vězeň ohlásí až tehdy, když nasbírá svých sto tokenů a zbaví se všech ostatních.
- (4) **Červené a modré cely** – Použijeme jednoho *počtáře*, který bude sbírat dva druhy tokenů – červené a modré (dvě fáze). Nasbírá-li dohromady 100 tokenů, ohlásí, kolik z nich bylo červených a kolik modrých.
- (5) **A pošle zprávu B** – Vězeň  $A$  zakóduje zprávu do binární soustavy. Chce-li používat jiné znaky než jedničky a nuly, mohou se domluvit na posílání například po pěti bitech, kde každá pětice bude vyjadřovat jedno písmeno. Pět nul pak může znamenat konec zprávy.

Jak ale posílat jedničky a nuly? Použijeme opět dva druhy tokenů: *nulový* a *jedničkový*. Vězeň  $A$  bude postupně posílat vězni  $B$  jednotlivé bity zprávy. Přenos ale bohužel nezachovává pořadí, takže vězeň  $B$  pravděpodobně dostane bity přeházené. Abychom tomu zabránili, přidáme ještě potvrzovací token, který pošle vězeň  $B$  vězni  $A$  po přijetí jednoho bitu (nulového nebo jedničkového tokenu). Vězeň  $A$  vždy po vyslání bitu čeká na potvrzovací token a další bit vyšle až po jeho obdržení. Potřebujeme tedy celkem tři fáze a jim odpovídající tři typy tokenů. Všichni ostatní vězni si musí pamatovat, kolik mají kterých tokenů. Naštěstí však mohou mít všichni dohromady v každém okamžiku nejvýše jeden token (buď se posílá bit, nebo se čeká na potvrzení přijetí).

(6) **Čísla v celách** – Komunikační kanál popsaný v předchozí pasáži realizujeme mezi počtářem a každým vězňem. Celkem tak bude potřeba  $3 \cdot 99$  různých tokenů. Tedy bude také  $3 \cdot 99$  fází a každý vězeň si bude muset pamatovat, kolik kterých tokenů drží.

(7) **Všichni posílají zprávy všem** – Opět použijeme stejný mechanismus, ale tentokrát budeme potřebovat dokonce  $\frac{3n(n-1)}{2}$  druhů tokenů. Každý vězeň takto může komukoliv poslat jakoukoliv zprávu. To vše realizují vězni pomocí jediné žárovky.

(8) **Všichni musí ohlásit ve stejný den** – Vzhledem k předchozím výsledkům to může znít poměrně překvapivě, ale skutečně není možné navrhnout spolehlivý postup, pomocí kterého by vězni ohlásili, že již všichni byli vyslechnuti, ve stejný den. Pro spor předpokládejme, že taková strategie existuje, a uvažme nějakou posloupnost vyslýchání vězňů, při které všichni vězni ohlásí, že již byli vyslechnuti. Každý vězeň se musí někdy rozhodnout, že i pokud by už nebyl vyslechnut, tak v nějaký den  $D$  ohlásí. Podívejme se na toho vězně, který se rozhodne jako první. Od dne jeho rozhodnutí jej už nebudeme vyslýchát a jako zákeřný bachař budeme až do dne

$D$  stále vyslychat jednoho jiného vězně. Žádný vězeň kromě těchto dvou se tedy nerozhodne ohlásit, což je spor s existencí strategie.

Přestože si vězni mohou vyměnit jakékoliv zprávy, nemohou se domluvit na jednom konkrétním dni tak, aby se to všichni stihli dozvědět. Schopnost vyměňovat si zprávy je sice silný nástroj, ale vězni nemají žádný odhad na to, jak dlouho bude posílání zprávy trvat.

(9) **A co bez počítání dní?** – Navrheme protokol, pomocí něhož si vězni mohou posílat zprávy bez toho, aby počítali dny. Ve všech předchozích řešeních bylo naprosto klíčové, aby vězni přesně věděli, která fáze právě probíhá. Není tedy možné přímo aplikovat výše uvedené postupy.

Zprávu budeme reprezentovat jako nezáporné celé číslo  $N$  (například ve dvojkové soustavě). Vězeň  $A$  bude vězni  $B$  postupně posílat  $N$  tokenů. Jelikož  $A$  je jediným odesílatelem (jediný, kdo rozsvěcuje žárovku) a  $B$  jediným příjemcem (jediný, kdo žárovku zhasíná), nemohou se tokeny nikde ztratit a po určité době dojde jistě celá zpráva k  $B$ . Poté  $A$  přestane vysílat tokeny. Problém je ale v tom, že  $B$  neví, jestli má ještě čekat, že mu něco přijde.

Na první pohled to opět vypadá jako neřešitelný problém, my ale přesto ukážeme postup, jak se s ním vypořádat. Vězeň  $B$  občas pošle jeden token zpátky, aby vyzkoušel, jestli už  $A$  poslal všechno. Pokud  $A$  již poslal všechno a viděl zhasnuto (tj. ví, že  $B$  vše přijal), je potom ochoten přijmout jeden token. Když se potvrzení podaří, uvidí poté  $B$  opět zhasnuto a bude si jist, že dostal celou zprávu. Pokud potvrzení nedostane (buď proto, že  $A$  bude ještě posílat, nebo proto, že mezitím nebyl vyslechnut), zkusí to po nějaké době znovu.

Uvedeným způsobem může předem zvolený vězeň poslat jakoukoliv zprávu jinému předem určenému vězni. Tentokrát ovšem není vůbec jasné, jak protokol rozšířit pro komunikaci každé dvojice vězňů. Je možné navrhnout systém, jak se budou vězni dorozumívat každý s každým, i pokud nemohou počítat dny. Je ale poměrně náročný a zdlouhavý, a proto ho nebudeme uvádět. Jeho kompletní popis společně s detailním rozbořením většiny uvedených metod naleznete v článku [4].

## Literatura a zdroje

- [1] IBM Research; *100 prisoners and a lightbulb challenge*, 2002
- [2] [https://www.math.washington.edu/~morrow/336\\_11/papers/yisong.pdf](https://www.math.washington.edu/~morrow/336_11/papers/yisong.pdf)
- [3] <http://www.ocf.berkeley.edu/~www/papers/100prisonersLightBulb.pdf>
- [4] <http://www.segerman.org/prisoners.pdf>
- [5] <http://personal.us.es/hvd/newpubs/FinalLightKR.pdf>