Hojsova Stráž

Sborník, jaro 2016

Tonda Češík
Filip Hlásek
Martin Hora
David Hruška
Karolína Kuchyňová
Anh Dung „Tonda“ Le
Tomáš Novotný
Kuba Svoboda
Pepa Svoboda
Martin „E.T“ Sýkora
Štěpán Šimsa
Rado van Švarc
Martin Töpfer

matfyz

Autori: Tonda Češík, Filip Hlásek, Martin Hora, David Hruška, Karolína Kuchyňová, Anh Dung „Tonda“ Le, Tomáš Novotný, Kuba Svoboda, Pepa Svoboda, Martin „E.T“ Sýkora, Štěpán Šimsa, Rado van Švarc, Martin Töpfer
Editor: Tonda Češík
vydání první, náklad 45 výtisků
březen 2016
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Konstrukční úlohy

Tonda Češík

Abstrakt. Ukážeme si několik (spíše lehčích) konstrukčních úloh z planimetrie.

Všechny úlohy budeme klasicky konstruovat pravítkem a kružítkem. Nejprve pro připomenutí uvedeme několik známých tvrzení, která se nám budou při řešení úloh hodit.

Věta. (Thaletova) *Na kružnici nad průměrem AB zvolme libovolný bod C různý od A, B. Potom je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C. Popsané kružnici se říká Thaletova.*

Tvrzení. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě (říkáme mu těžiště). Těžiště rozděluje každou z těžnic v poměru $2:1$, tj. pokud má trojúhelník ABC těžiště T, potom platí $|AT| = 2 \cdot |S_aT|$, kde S_a je střed strany BC.*

Tvrzení. (O obvodovém a středovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem O a AB její tětiva. Potom se velikost úhlu AXB nemění, probíhá-li X některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc je $|\sphericalangle AXB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|$, kde úhlem AOB rozumíme vnější úhel ve čtyřúhelníku $AXBO$.*

Značení. Pro prvky trojúhelníka ABC budeme používat následující značení:

(1) a, b, c – strany trojúhelníka, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$,
(2) v_a, v_b, resp. v_c – výška na stranu a, b, resp. c,
(3) t_a, t_b, resp. t_c – těžnice z vrcholu A, B, resp. C,
(4) α, β, resp. γ – vnitřní úhel u vrcholu A, B, resp. C,
(5) R – poloměr kružnice opsané,
(6) r – poloměr kružnice vepsané,
(7) S_{ABC} – obsah trojúhelníka ABC.

Příklady

Pokud je v zadání příkladu uvedeno, že známe nějakou délku, znamená to, že umíme zkonstruovat kružnici s daným poloměrem.

Příklad 1. Je dána kružnice k a uvnitř ní dva různé body P a Q. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník vepsaný kružnici k tak, aby body P, Q ležely každý na jedné odvěsně.

Řešení. Sestrojíme kružnici ℓ nad průměrem PQ, průsečíky kružnic k a ℓ nazveme K, K'. Množina průsečíků navzájem kolmých přímek, z nichž jedna prochází bodem P a druhá bodem Q, je Thaletova kružnice ℓ nad průměrem PQ. Vrchol u pravého úhlu trojúhelníka tak musí ležet na kružnici ℓ, bude to tedy jeden z bodů K, K'. Nakonec průsečík přímky PK a kružnice k (různý od K) nazveme L, podobně průsečík přímky QK a kružnice k nazveme M. Potom je KLM hledaný trojúhelník.

Stejně tak můžeme najít trojúhelník $K'L'M'$, pokud místo K vezmeme druhý průsečík K'. Úloha tedy

(i) má dvě řešení, pokud se kružnice k a ℓ protínají ve dvou bodech,
(ii) má jedno řešení, pokud se kružnice k a ℓ dotýkají (v tomto případě $K = K'$),
(iii) nemá řešení, pokud se kružnice k a ℓ neprotínají.

Příklad 2. Je dána kružnice k a přímka p. Sestrojte kružnici ℓ o daném poloměru r tak, aby se obou dotýkala.

Příklad 3. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, v_a a R.

Příklad 4. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, t_a a α.

Příklad 5. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li t_a, t_b a t_c.

Příklad 6. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li úhly α, β a obvod $a + b + c$.

Příklad 7. Je dán trojúhelník ABC a na straně BC bod D. Zkonstruujte body P na AB a Q na AC tak, aby PQ byla rovnoběžná s BC a $\sphericalangle PDQ$ byl pravý.

Příklad 8. Je dán trojúhelník ABC a úsečka délky d. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, který má základnu délky $|KL| = d$ a jehož obsah je stejný jako obsah trojúhelníka ABC. (MKS 21–4–4)

Příklad 9. Uvnitř trojúhelníka ABC sestrojte bod M tak, aby platilo

$$S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3.$$

Příklad 10. Mějme přímku p a na ní po řadě body A, B, C, D. Nalezněte čtverec $KLMN$ takový, že přímky KL, MN, LM a KN protínají přímku p v bodech A, B, C a D v tomto pořadí. (MKS 27–6–5)

Příklad 11. Sestrojte kosočtverec, jehož protější strany leží na dvou daných rovnoběžkách p, q a druhé dvě strany prochází dvěma danými body E a F.

Příklad 12. Sestrojte čtyřúhelník $EFGH$, pokud znáte délky úseček EF, FG, GH, HE a XY, kde X je střed úsečky EF a Y je střed úsečky GH. (MKS 27–6–7)

Zdroje

Nechal jsem se inspirovat starším sborníkovým příspěvkem *Alči Skálové*, které tímto děkuji.

[1] Alča Skálová: *Konstrukční úlohy*, Hojsova Stráž, 2011

Finále soutěže ACM

Filip Hlásek

Abstrakt. Tento příspěvek je věnován úlohám, které se vyskytly na světovém finále soutěže ACM-ICPC konaném v marockém městě Marrákéš od 15. do 20. května 2015. Při řešení několika z nich bylo užitečné využít matematické znalosti a odhalit zajímavé zákonitosti. Přesně na ty úlohy se podíváme a pokusíme se je vyřešit.

Zkratka ACM je nesprávné označení jedné z nejstarších programátorských soutěží, jejíž celé jméno je ACM International Collegiate Programming Contest (ACM-ICPC) a je každoročně pořádána pod záštitou americké společnosti Association for Computing Machinery. Dále stojí za zmínku americká univerzita Baylor, na které soutěž v roce 1977 založil její dosavadní prezident profesor William B. Poucher. Oficiálně se mohou účastnit tříčlenné týmy studentů z jedné univerzity a během pětihodinového klání na ně čeká 8 až 13 úloh. K jejich řešení mohou využít jediného počítače, což vždy vyžaduje ohromnou dávku spolupráce, vstřícnosti a porozumění. Odevzdaný program je přijat za správný pouze tehdy, vydá-li pro všechny připravené vstupy správnou odpověď v daném časovém limitu.

Každý rok se na konci jara nebo na začátku léta koná mezinárodní finále, kam postoupí několik nejlepších týmů z každého geografického regionu. Naše týmy soupeří vždy na podzim se svými konkurenty ze střední Evropy obvykle o tři až pět míst (přesný počet závisí na umístění týmů v předchozím finále). Týmu z Karlovy univerzity se podařilo v roce 1998 v americké Atlantě porazit ve finále všechny ostatní a odvézt si domů obrovský pohár. Samotné finále je velice prestižní událost a se všemi formálními ceremoniemi, doprovodným programem a testovacími koly trvá bezmála celý týden. Ani probojovat se v silné konkurenci do finále není často vůbec snadné. Přesto se to v roce 2015 týmu organizátorů PraSátka ve složení Filip Hlásek, Mirek Olšák a Štěpán Šimsa podařilo. Navíc byly soutěžní úlohy finále tentokrát hodně *matematické* a našemu týmu se velmi hodily zkušenosti z matematických soutěží. Cílem tohoto příspěvku je ukázat, jak je možné matematické dovednosti uplatnit v příbuzném oboru.

Jak vypadá úloha na programátorské soutěži

Běžná programátorská úloha se skládá z popisu, jak bude vypadat vstup, a přesné definice očekávaného výstupu. Obvykle se vstup i výstup skládá z několika čísel či posloupnosti písmen (tzv. řetězců). V každém správném zadání úlohy nalezneme také omezení na velikosti všech čísel a na délky všech řetězců. Není potřeba ošetřovat nevalidní a chybné vstupy. Často je poměrně snadné implementovat nějaké řešení daného problému a hlavní výzvou zůstává časový limit na běh programu, který je obvykle nastaven na několik sekund.

Jak odhadnout dobu běhu programu na vstup dané velikosti

Dnešní počítače zvládnou vykonat několik miliard elementárních operací za sekundu. Bohužel není snadné odhadnout, kolik operací vykoná daný program na konkrétních vstupních datech. Při odhadování není třeba být přesný, protože spustíme-li program na jiném počítači, poběží jinak dlouho a málokdy dopředu víme přesnou konfiguraci stroje. Nejprve uvedeme přesnou definici, pomocí které lze řádově aproximovat rychlost růstu některých funkcí, a poté se ji naučíme intuitivně využívat na odhady časové složitosti algoritmů, jak se často nazývá počet operací, které daný program vykoná na vstupu konkrétní velikosti.

Definice. (Asymptotický odhad, „velké O notace“) Řekneme, že funkce g je „velké O od f“, značíme $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, pokud existuje kladná konstanta c taková, že pro všechna přirozená čísla n platí $g(n) \le c \cdot f(n)$. Tento vztah můžeme také popsat slovně tak, že funkce g je asymptoticky menší nebo rovna funkci f.

Uvedená definice je poměrně robustní a těžko uchopitelná, ale my se naučíme uvedené vztahy chápat intuitivně.

Cvičení. U uvedených dvojic funkcí určete tu, která je asymptoticky větší, případně ukažte, že jsou asymptoticky *stejné* (tj. obě jsou větší nebo rovny té druhé).

(1) $f(n) = n$, $g(n) = n^2$,
(2) $f(n) = 3n$, $g(n) = n$,
(3) $f(n) = 2n^4 - 3n^3 + 5n^2 - n + 17$, $g(n) = 29n^3 - 5n + 3$,
(4) $f(n) = n^{99}$, $g(n) = 1,01^n$,
(5) $f(n) = \sqrt{n}$, $g(n) = \log n$.

Při práci s asymptotickou složitostí je vždy potřeba si představovat, že nás zajímají opravu velké hodnoty n. Důležité je, jak rychle jednotlivé funkce „rostou“. Pokládáme si vlastně následující otázku: „Zvětšíme-li dvakrát vstup, kolikrát více času zabere výpočet?“ Vzhledem k tomu, že operace našeho programu nejsou elementární, můžeme počítat, že lineární algoritmus ($\mathcal{O}(n)$) stihne dokončit výpočet za několik vteřin pro vstupy do velikosti desítek milionů. Od toho se potom odvíjí, že o kvadratický algoritmus ($\mathcal{O}(n^2)$) má smysl se pokoušet pouze tehdy, pokud omezení na vstupní data jsou do několika málo tisíc, a podobně o kubický ($\mathcal{O}(n^3)$) tam, kde velikost vstupu je jen několik stovek. Dále algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(2^n)$ uspěje na soutěži nejvýše pro $n \leq 25$, zatímco $\mathcal{O}(n!)$ pouze pro n do 11.

Konec teorie, jdeme na úlohy!

Následují stručné verze zadání některých úloh, které se vyskytly na zmiňovaném světovém finále. Často chybí méně podstatné detaily a toto zadání se snaží popsat pouze klíčové části úlohy. Podrobnosti o úlohách naleznete v originálním zadání na oficiálních stránkách soutěže.

Úloha 1. Artyčoky je možné na trhu nakoupit a prodat kterýkoliv z n dnů číslovaných od 1 do n. Cena artyčoků na trhu v den k je rovna

$$\text{cena}(k) = p \cdot (\sin(a \cdot k + b) + \cos(c \cdot k + d) + 2).$$

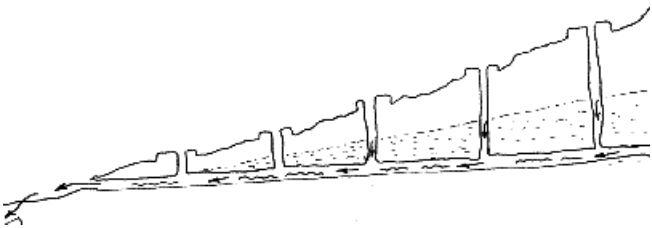
Určete největší pokles ceny mezi dvěma dny, kdy je možné artyčoky nakoupit (tj. maximální hodnotu $\text{cena}(i) - \text{cena}(j)$ pro $1 \leq i \leq j \leq n$). Vstup se skládá z šesti celých čísel p ($1 \leq p \leq 1\,000$), a, b, c, d ($0 \leq a, b, c, d \leq 1\,000$) a n ($1 \leq n \leq 10^6$). Výstup programu bude považován za správný, bude-li mít relativní nebo absolutní chybu nejvýše 10^{-6}.

Úloha 2. Na vstupu jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky, které se rovnoměrně pohybují v rovině (nerotují a pohybují se po přímce). Známé jsou jak jejich počáteční pozice, tak rychlosti a směry. Určete čas, kdy plocha jejich překryvu bude největší. Nepotkají-li se nikdy, vypište *nikdy*. Počet vrcholů každého mnohoúhelníku je nejvýše 10.

Úloha 3. Sýr má tvar krychle o rozměrech $100 \times 100 \times 100$. Vstup začíná dvěma celými čísly n, s ($0 \leq n \leq 10\,000$, $1 \leq s \leq 100$). Dalších n řádků popisuje jednotlivé díry v sýru tvaru koule souřadnicemi jejich středů a jejich poloměry. Všechny díry jsou celé uvnitř sýra a navzájem se neprotínají. Rozkrájejte sýr na s plátků rovnoběžných s osou z tak, aby všechny plátky měly stejný objem.

Úloha 4. Každý organizmus na nově objevené planetě lze popsat jeho genetickou informací tvořenou konečnou posloupností elementárních nukleotidů 'A', 'C' a 'M'. Na počátku věků žily na planetě dva jednoduché organizmy, každý složený z jediného nukleotidu. Občas se do genetické informace jednoho organizmu přimíchá (na libovolnou pozici) další nukleotid a nově vzniklý organizmus svého předchůdce okamžitě zahubí. Nyní žije na planetě pouze jediný druh organizmů (tj. obě vývojové větve se sloučily), jehož genetická informace je dána na vstupu. Dále jsou dané genetické informace organizmů odhalené z vykopávek. Rozhodněte, zda je možné, aby se na zkoumané planetě organizmy vyvíjely podle zmíněného modelu. Vykopávek na vstupu je nejvíce $4\,000$ a každá z nich obsahuje nejvíce $4\,000$ nukleotidů.

Úloha 5. *Kanát* je umělý podzemní kanál, jímž se do pouštních oblastí přivádí samospádem voda z hor. Tento dávný lidský vynález umožnil osídlení pouštních oblastí v Africe a v Asii. Kanát se skládá z jednoho hlavního vodorovného kanálu a několika svislých šachet (viz obrázek) vyhloubených do nakloněné roviny. Kanál i všechny šachty mají stejný konstantní průřez. Při stavbě kanátu je nesnadným problémem odvoz vykopané horniny, která musí být odstraněna právě budovanými šachtami. Je dán požadovaný tvar kanátu, navrhněte rozmístění n $(1 \leq n \leq 1\,000)$ pomocných svislých šachet (to jsou všechny kromě té nejvyšší a slouží především k usnadnění stavby) tak, aby celková práce potřebná ke stavbě kanátu byla co nejmenší. Chceme-li souvislý úsek horniny délky L posunout k jednomu jeho konci, musíme vynaložit $\frac{L^2}{2}$ práce.



Úloha 6. Řeka se skládá z n $(1 \leq n \leq 10^5)$ rovnoběžných a stejně širokých dopravních pruhů. V každém pruhu se lodě pohybují buď po proudu, nebo proti proudu. Všechny lodě plují stejnou konstantní rychlostí. Na vstupu jsou dány startovní pozice všech plavidel, jejich směry a délky. Celkový počet lodí je nejvýše 10^5. Z dané pozice jednoho břehu řeky bychom chtěli vypravit přívoz známé rychlosti, který by kolmo přeplul na druhou stranu tak, aby po cestě nenaboural do žádné lodě. Hledáme nejdelší souvislý úsek mezi časy t_1 a t_2, kdy je možné přívoz bezpečně vypravit.

Úloha 7. Je známá pravděpodobnost, že nějaký den bude slunečno, že bude oblačno, že bude pršet a že budou padat trakaře. Každý den nastane právě jedna z těchto možností. Předpokládáme, že počasí v jednotlivé dny je nezávislé na ostatních dnech. Z naší meteorologické stanice bychom chtěli výsledky za n $(1 \leq n \leq 20)$ dní posílat na centrálu pomocí posloupnosti nul a jedniček. Navíc bychom chtěli, aby žádná z možných reportáží nebyla prefixem jiné (neboli počátečním úsekem), aby bylo možné určit, že již reportáž skončila. Navrhněte protokol posílání reportů o počasí, který minimalizuje střední délky zprávy.

Odkazy

[1] *https://icpc.baylor.edu/* – oficiální stránky soutěže
[2] *https://icpc.baylor.edu/worldfinals/problems/icpc2015.pdf* – zadání úloh
[3] *https://en.wikipedia.org/wiki/ACM_ICPC* – podrobnosti o soutěži
[4] *http://codeforces.com/blog/entry/18016* – videa s řešeními úloh
[5] *http://www.csc.kth.se/~austrin/icpc/finals2015solutions.pdf* – řešení úloh

Kruhová inverze

Martin Hora

Abstrakt. Kruhová inverze je geometrické zobrazení, které umí měnit kružnice na přímky a naopak. Podíváme se, jaká „magie“ se za tím skrývá, a na příkladech si ukážeme, kdy a jakým způsobem je vhodné inverzi použít.

Úmluva. Rovinu rozšíříme o jediný bod ∞, o kterém tvrdíme, že leží na všech přímkách.

Definice. *Kruhová inverze* je geometrické zobrazení dané kružnicí k se středem O a poloměrem r, které bodu X přiřadí bod X' dle následujících pravidel:

(i) Když je $X = O$, potom $X' = \infty$.

(ii) Když je $X = \infty$, potom $X' = O$.

(iii) Jinak je X' bod polopřímky OX, pro který platí $|OX| \cdot |OX'| = r^2$.

Cvičení. Rozmyslete si následující pozorování o kruhové inverzi:

(i) Body kružnice k jsou samodružné.

(ii) Body, které ležely uvnitř kružnice, se zobrazí ven a naopak.

(iii) Dvakrát provedená kruhová inverze dle stejné kružnice je identita.

Tvrzení. (Konstrukce obrazu) *Je dána kružnice k a bod X vně této kružnice. Tečny ke kružnici k vedené bodem X se jí dotýkají v bodech T, U. Pak obraz X' bodu X v kruhové inverzi podle kružnice k je střed úsečky TU.*

Tvrzení. (Tětivové čtyřúhelníky) *Je dána kružnice k se středem O a body A, B takové, že neleží na jedné přímce s O. Označme A', B' obrazy bodů A, B v inverzi podle k. Pak body A, B, A', B' leží na jedné kružnici.*

Lemma. (Přepočítávací lemma) *Je dána kružnice $k(O, r)$ a body X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak*

(i) $|\sphericalangle OX'Y'| = |\sphericalangle XYO|$,

(ii) $|X'Y'| = |XY| \cdot \dfrac{r^2}{|OX| \cdot |OY|}$.

Tvrzení. (Stěžejní) *Uvažme kruhovou inverzi určenou kružnicí k se středem O. Pak*

(i) *obrazem přímky procházející bodem O je ona sama,*
(ii) *obrazem přímky* **ne***procházející bodem O je kružnice procházející bodem O,*
(iii) *obrazem kružnice procházející bodem O je přímka* **ne***procházející bodem O,*
(iv) *obrazem kružnice* **ne***procházející bodem O je kružnice* **ne***procházející bodem O.*

Cvičení. Jak vypadají kružnice, které kruhová inverze zobrazí na sebe samotné?

Příklady

Nyní zbývá dodat několik závěrečných rad a následujícím příkladům již nic nestojí v cestě.

(1) V celé řadě úloh nezávisí na poloměru kružnice, dle které se provádí inverze. Důležitý bývá hlavně její střed.
(2) Jako střed bývá zpravidla vhodné volit bod, jímž prochází podezřele velké množství kružnic.
(3) Často se vyplatí hledat inverzi, která převádí nějaký objekt ze zadání na jiný.

Příklad 1. Přímka p protne kružnici k v bodech A a B. Označme S střed jednoho z oblouků AB. Uvažme dvě přímky procházející S, které protnou kružnici k v bodech C a D a přímku p v bodech E a F. Dokažte, že body C, D, E a F leží na kružnici.

Příklad 2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Nechť D a E jsou body na úsečkách AC a BC. Dokažte, že paty kolmic vedené z bodu C na přímky AB, AE, BD a DE leží na jedné kružnici.

Příklad 3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Nechť X je bod uvnitř trojúhelníka ABC takový, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABX se dotýká jeho stran v bodech D, G a H. Dokažte, že body E, F, G, H leží na kružnici. (IMO shortlist 1995)

Příklad 4. Nechť ω je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Uvažme kružnici l, která se dotýká stran AB, AC a navíc kružnice ω v bodě T. Dále mějme kružnici připsanou trojúhelníku ABC proti vrcholu A, která se dotýká strany BC v bodě V. Dokažte, že $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle CAV|$.

Příklad 5. (Ptolemaiova věta) Pro čtyřúhelník se standardním značením délek stran a úhlopříček dokažte, že

$$ac + bd \geq ef,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je čtyřúhelník tětivový.

Příklad 6. Jsou dány dvě pevné kružnice k a l, které se protínají v bodech A a B. Nechť m a n jsou kružnice, které mají s k vnější dotyk, s l mají vnitřní dotyk, navíc se samy dotýkají v bodě X. Ukažte, že bod X leží na kružnici nezávislé na volbě m a n. (MKS)

Příklad 7. Nechť Ω je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Uvažme kružnici ω, která se dotýká stran AC, BC a navíc má vnitřní dotyk s Ω v bodě P. Přímka rovnoběžná s AB se dotýká ω uvnitř trojúhelníku ABC v bodě Q. Dokažte, že $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle QCB|$. (EGMO 2013)

Příklad 8. Nechť k_1, k_2, k_3 a k_4 jsou kružnice takové, že k_1 a k_3 mají vnější dotyk v P a k_2 a k_4 mají rovněž vnější dotyk v P. Označme A, B, C, D druhé průsečíky k_1 s k_2, k_2 s k_3, k_3 s k_4 a k_4 s k_1. Dokažte, že platí

$$\frac{|AB| \cdot |BC|}{|AD| \cdot |CD|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

(IMO shortlist 2003)

Příklad 9. Nechť k a l jsou dvě kružnice protínající se v bodech A a B. Tečna ke k vedená bodem A protne l podruhé v bodě C. Tečna k l vedená bodem A protne k podruhé v bodě D. Nechť E je bod na polopřímce AB takový, že $|AE| = 2|AB|$. Dokažte, že body A, C, E a D leží na kružnici.

Příklad 10. Kružnice k_1, k_2 a k_3 mají po dvou vnější dotyk. Kružnice l_1 má vnější dotyk s kružnicemi k_1, k_2 a k_3 v bodech K, L a M. Kružnice l_2 má s kružnicemi k_1, k_2 a k_3 vnitřní dotyk v bodech P, Q a R. Dokažte, že se přímky KP, LQ a MR protínají v jednom bodě.

Příklad 11. Kružnice k_1, k_2 a k_3 mají po dvou vnější dotyk. Navíc se všechny tři dotýkají přímky l. Kružnice k o poloměru jedna má vnější dotyk s k_1, s k_2 i s k_3, ale nemá žádný společný bod s přímkou l. Jaká je vzdálenost středu kružnice k od přímky l?

Literatura a zdroje:

Při tvorbě přednášky jsem čerpal ze starších příspěvků *Pepy Tkadlece* a *Pepy Svobody*, kterým bych tímto velmi rád poděkoval.

[1] Archiv MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/archive*
[2] *http://www.artofproblemsolving.com*
[3] *http://www.imomath.com/*
[4] *http://mathcircle.berkeley.edu/*

Počítání dvěma způsoby

Martin Hora

Abstrakt. Seznámíme se s technikou počítání dvěma způsoby. Tato metoda stojí na jednoduchém faktu, že počet prvků dané množiny, ať už je spočítáme jakkoliv, je stále stejný. Techniku si procvičíme na důkazech užitečných kombinatorických identit, spočítáme pomocí ní několik příkladů a nakonec ji použijeme k důkazu dvou zajímavých matematických vět.

Úmluva. Všechny použité proměnné $n, m, k, \ldots$ jsou celá nezáporná čísla, nebude-li řečeno jinak.

Příklad. Na večírku se sejde konečný počet lidí. Někteří z nich si na přivítanou potřesou pravicí. Dokažte, že počet hostů, kteří si podali ruku s lichým počtem lidí, je sudý.

Řešení. Označme P množinu lidí, kteří dorazili na večírek. Nechť R je množina uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x, y \in P$ a host x podal ruku na přivítanou hostu y. Dále označme p_x počet lidí, kterým podal ruku host x, a t celkový počet potřesení rukou.

Pak velikost množiny R je rovna z jedné strany $\sum_{x \in P} p_x$. Z druhé strany se pak mohutnost R rovná $2t$, jelikož když $(x, y) \in P$, pak i $(y, x) \in P$. Tedy

$$\sum_{x \in P} p_x = 2t.$$

Suma celých čísel je sudá právě tehdy, když obsahuje sudý počet lichých čísel. To znamená, že počet lidí, kteří si potřásli rukou s lichým počtem návštěvníků, musí být sudý.

Definice. *Kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet možností, kterými lze vybrat k objektů z n.

Kombinatorické identity

K počítání dvěma způsoby je ještě nutné osvojit si jednu důležitou schopnost. Pokud dostaneme počet možností, tak potřebujeme vymyslet příklad, jemuž tento počet možností odpovídá. Tímto způsobem se pokuste nahlédnout následující rovnosti.

Příklad 1. Dokažte
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Příklad 2. Dokažte
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Příklad 3. Dokažte
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Příklad 4. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Příklad 5. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n.$$

Příklad 6. Dokažte
$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

Příklad 7. (Vandermondova identita)
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Příklad 8. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Příklad 9. Dokažte
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Těžší příklady

Příklad 10. V tabulce $n \times n$ je v každém políčku napsáno číslo vyjadřující, v kolika pravoúhelnících se vyskytuje. Dokažte, že součet čísel v celé tabulce je roven druhé mocnině přirozeného čísla. (MKS 29–3–7)

Příklad 11. V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o n zákonech. (Poslanec může být buď *pro* schválení zákona, nebo *proti*, nebo se může *zdržet* hlasování.) Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom hlasoval pro a v jednom proti. Označme z_i počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o i-tém zákonu. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \leq 2^{200}.$$

(MKS 32–8–7)

Příklad 12. V obdélníkové tabulce $m \times n$ jsou napsaná nezáporná reálná čísla, přičemž každý sloupec a každý řádek obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Pokud se navíc řádek a sloupec protínají v políčku, kde je kladné číslo, tak je jejich součet stejný. Dokažte, že $m = n$. (Kanada 2006)

Příklad 13. (Erdős–Ko–Radova věta) Nechť k a n jsou přirozená čísla taková, že $2k \leq n$. Dále nechť $\mathcal{M}$ je množina k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro všechny množiny $C, D \in \mathcal{M}$ platí, že $C \cap D \neq \emptyset$. Dokažte, že $|\mathcal{M}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Příklad 14. (Cayleyho formule) Kolik koster má úplný graf na n vrcholech?

Návody

1. Vybírejme k lidí z n. Počet způsobů, kterými to můžeme udělat, lze vyjádřit pomocí lidí, které vybereme, nebo pomocí lidí, které nevybereme.

2. Vybíráme $k+1$ lidí z $n+1$. Prvního buď vybereme, anebo ne.

3. Vybírejme r lidí z n a z těchto r lidí ještě k-člennou komisi.

4. Kolika způsoby můžeme vybrat podmnožinu n-prvkové množiny?

5. Mějme n rytířů, ze kterých chceme vybrat trestnou výpravu proti loupežníkům, která bude mít svého velitele.

6. Tentokrát má trestná výprava d-členné velení.

7. Máme n děvčat a m hochů a chceme z nich vytvořit r-členný tým.

8. Nyní máme děvčat i chlapců n.

9. Namalujte si čtverec se stranou $\sum_{i=1}^{n} i$ a zkuste ho pokrýt pomocí čtverců z pravé strany. k^3 znamená, že máme k čtverců o straně k.

10. Součet čísel spočítejte přes všechny obdélníky, které se vejdou do mřížky. Každý obdélník započítejte tolikrát, kolik políček obsahuje.

11. Kolik nejvýše hlasování mohlo proběhnout, pokud by každý hlasoval pro, nebo proti? Kolika způsoby lze doplnit ta hlasování, kde se někdo zdržel, tak, aby každý hlasoval?

12. Uvažte podtabulku tvořenou řádky a sloupci takovými, že součet čísel v každém z nich je stejný. Jaké má tato podtabulka rozměry?

13. *Cyklickým intervalem* nazveme množinu k po sobě jdoucích čísel modulo n. (Například $\{n-2, n-1, 0, 1, \ldots, k-2, k-3\}$ je cyklický interval.) Dvěma způsoby počítejte počet uspořádaných dvojic (N, π), kde $N \in M$ a π je permutace, která převádí N na nějaký cyklický interval.

14. Počítejte dvěma způsoby, jak vytvořit postupným přidáváním hran zakořeněný orientovaný strom o n vrcholech takový, že všechny jeho hrany jsou orientovány směrem od kořene.

Literatura a zdroje

[1] Štěpán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, Sborník MKS, Horní Lysečiny, 2013.
[2] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Sborník MKS, Staré Město, 2009.

Diskriminant a Cauchy-Schwarzova nerovnost

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek vychází z kapitoly z knihy [1] věnované stejné dvojici témat. Poskytuje částečný úvod do problematiky algebraických nerovností (pořádným úvodem je pak [3]). Vychází ze základních vlastností kvadratické rovnice, které mimo jiné využívá k důkazu klasické Cauchy-Schwarzovy nerovnosti, jejíž aplikace v závěru uvádí.

Kvadratická (ne)rovnice

Ze školy všichni umíme vyřešit kvadratickou rovnici, ti z lepších rodin i kvadratickou nerovnici. Vychází se při tom ze známého

Tvrzení. *Grafem kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola s vrcholem o souřadnicích $\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right]$. Pro kladné a je vrchol minimem funkčních hodnot, pro záporné je maximem.*

Co byste ale řekli na následující úlohu?

Příklad 1. Dokažte, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Řešení. Je to sice nerovnost dvou proměnných, ale přesto nám znalosti o kvadratické rovnici (jedné proměnné) pomohou. Na nerovnost se podíváme jako na nerovnici s neznámou x a upravíme ji na tvar kvadratické rovnice

$$x^2 + x(-y - 1) + y^2 - y + 1 \geq 0.$$

Koeficient kvadratického členu je kladný, takže levá strana je záporná pouze pro hodnoty mezi kořeny. Chtěli bychom tedy dokázat, že (nezávisle na y) má nejvýše jeden (dvojný) kořen (z geometrického hlediska chceme dokázat, že graf naší funkce je celý nad osou x). Diskriminant je roven

$$D = (-y - 1)^2 - 4(y^2 - y + 1) = -3(y - 1)^2 \leq 0.$$

Nerovnost tedy platí pro všechna x a všechna y.

Uvedený postup nás zbavil jedné proměnné, což je jistě zjednodušení. Vyřešte následující příklady a u třetího z nich si uvědomte, že stačí, aby nerovnost byla kvadratická v jedné proměnné.

Příklad 2. Pro reálná x, y dokažte následující nerovnosti:

(i) $x^2 + y^2 + 4 \geq xy + 2x + 2y$,

(ii) $2x^2 + 2y^2 + 1 > x + y + 2xy$,

(iii) $x^2y^4 + 4x^2 + 1 \geq 4xy$.

Příklad 3. Dokažte, že čísla a, b, c jsou délkami stran trojúhelníka, právě když platí

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right).$$

Příklad 4. Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ nabývá výraz $S = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$ své nejmenší hodnoty.

Příklad 5. Pro kladná a, b, c dokažte nerovnost

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Dá se říct, že náš dosavadní postup byl ekvivalentní („parabola je nad osou x právě tehdy, když je jeho diskriminant záporný“), můžeme jej proto obrátit. Uvažme dvě n-tice reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$. Výraz

$$F(t) = (x_1t - y_1)^2 + \cdots + (x_nt - y_n)^2$$

je zřejmě nezáporný. Jelikož je zároveň kvadratický v proměnné t, je jeho diskriminant nekladný: $(2x_1y_1 + \cdots + 2x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \leq 0 \Rightarrow$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2.$$

Právě dokázaná nerovnost se nazývá Cauchy-Schwarzova a její využití (resp. její obecnější verze) výrazně přesahuje téma přednášky.

Příklad 6. Dokažte nerovnost $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ pro kladná a, b, c.

Příklad 7. Dokažte také obecnější verzi $(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 8. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte, že platí $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$.

Příklad 9. Pro x, y, z reálná dokažte $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

Příklad 10. Dokažte nerovnost pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost má dva obzvlášť užitečné tvary, s prvním z nich jsme se už v podstatě setkali u posledního příkladu.

CS zlomkobijec

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \dots a_n$ nezáporná a $b_1, b_2, \dots b_n$ kladná. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Poznámka. Všimněte si, že jsme podobně jako v nerovnostech „bez sudých mocnin na levé straně" museli přidat předpoklad o nezápornosti.

Příklad 11. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a+b+c+d=1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Příklad 12. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte následující nerovnost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbittova nerovnost)

Příklad 13. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Příklad 14. Nechť a, b, c jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

CS a odmocniny

Tvrzení. *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Příklad 15. Dokažte nerovnost $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \leq 12$, pro ta x, pro která má levá strana smysl.

Příklad 16. Dokažte následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$.

Literatura a zdroje

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, 1996.
[2] Alča Skálová: *Cauchy-Schwarzova nerovnost*, Oldřichov, 2012.
[3] M. Rolínek, P. Šalom: *Zdolávání nerovností*, PraSečí seriál, 29. ročník.

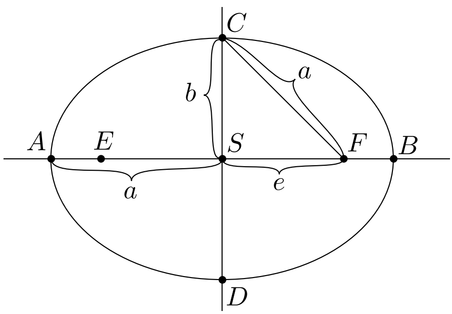
Kuželosečky

DAVID HRUŠKA

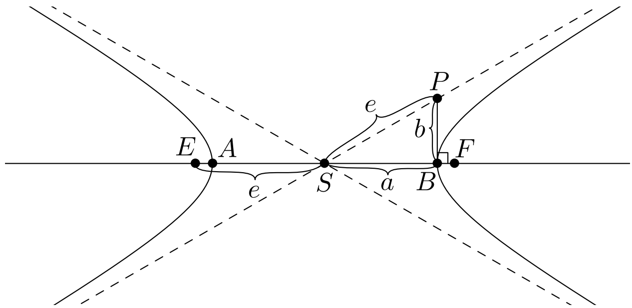
ABSTRAKT. Příspěvěk obsahuje tři ekvivalentní definice kuželoseček a jejich základní vlastnosti. Hlavní část je věnována syntetickému přístupu, který není rozšířený, ale je elementární a s použitím některých výsledků klasické planimetrie rychle vede k pokročilým vlastnostem kuželoseček.

Rovinné definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností $2a$ pro nějaké $a > 0$. Elipsa je zřejmě souměrná podle přímky EF a podle kolmice na ni vedené středem úsečky EF. Těmto přímkám říkáme *hlavní* a *vedlejší* poloosa. Elipsa protíná svoji hlavní poloosu v bodech vzdálených $2a$. *Velikostí hlavní poloosy* myslíme polovinu této vzdálenosti, tedy a, analogicky pro vedlejší poloosu.



Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností $2a$, kde $2a < |EF| = 2e$.



Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od pevně dané řídicí přímky d a ohniska F ($F \notin d$) stejnou vzdálenost. Vzdálenost $p = |Fd|$ se nazývá *parametr*. *Kružnici* lze považovat za speciální případ elipsy – pokud ohniska E, F splynou.

Poznámka. V obrázcích můžete vidět i další standardní parametr elipsy – tzv. *excentricitu*, kterou značíme e. My ji ale nebudeme potřebovat, čili se s ní ani nebudeme zdržovat.

Cvičení. Určete množinu středů všech kružnic dotýkajících se současně dvou daných kružnic, pokud tyto

(i) leží vně sebe,
(ii) jedna leží uvnitř druhé.

Přestože budeme pracovat s kuželosečkami výhradně synteticky, krátce si shrneme jejich souvislost s algebraickými křivkami.

Algebraická definice

Definice. *Křivkou druhého stupně* rozumíme množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňující rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty jsou reálná čísla.

Lze ukázat, že pokud levá strana není součinem dvou lineárních výrazů a rovnici (1) vyhovuje více než jeden bod, pak ji lze vhodnou transformací souřadnic převést na jeden z tvarů

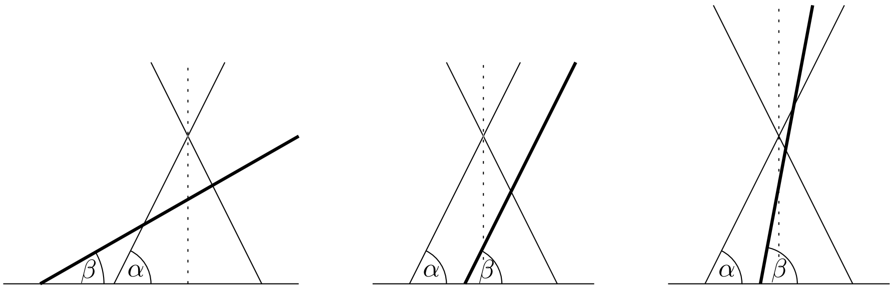
(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$ popisuje elipsu s délkami poloos a, b a ohnisky v bodech $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$,

(ii) $y^2 = 2px,\ p > 0$ popisuje parabolu s ohniskem v bodě $(p/2, 0)$ a řídicí přímkou danou rovnicí $x = -p/2$,

(iii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$ popisuje hyperbolu s ohnisky v bodech $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Kuželová definice

V tomto oddílu zkusíme zjistit, proč se našim oblíbeným křivkám říká právě kuželosečky. Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, obdržíme vždy elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Typ kuželosečky závisí na úhlu, pod kterým rovina kuželovou plochu protíná. Označme α úhel, který svírají povrchové přímky s rovinou kolmou na osu kuželové plochy, a β úhel řezné roviny a roviny kolmé na osu kuželové plochy (viz obrázek).



(i) (ii) (iii)

Uvažme první případ, čili $\alpha > \beta$. Do obou částí spodního kuželu vepíšeme sféry a body jejich dotyku s řeznou rovinou označme sugestivně F_1 a F_2. Příslušný řez kuželové plochy je potom elipsa s ohnisky F_1 a F_2. Toto tvrzení si na přednášce dokážeme.

Cvičení. Dokažte analogická tvrzení pro hyperbolu (analogické) a parabolu (mírně odlišné; uvažte navíc rovinu obsahující dotykovou kružnici).

Cvičení. Rozmyslete si, že degenerované případy průniku řezné roviny a kuželové plochy odpovídají těm zmíněným u algebraické definice.

Cvičení. Popište rovinný řez válcové plochy.

Geometrické vlastnosti

Následující tvrzení ukazuje možná nejzajímavější vlastnost kuželoseček, se kterou se člověk může potkat i v praxi[1] a dá se použít jako základ pro syntetický přístup ke kuželosečkám.

Úmluva. Ohniska elipsy a hyperboly budeme značit F_1 a F_2.

Věta. (The optical property)

(1) *Tečna k elipse, která se jí dotýká v bodě P, je osou* **vnějšího** *úhlu F_1PF_2.*

[1] Viz např. (eliptické) šeptající galerie, parabolické antény, reflektory, dalekohledy…

(2) *Tečna k hyperbole, která se jí dotýká v bodě P, je osou* **vnitřního** *úhlu F_1PF_2.*
(3) *Tečna k parabole, která se jí dotýká v bodě P, je osou úhlu F_1PP', kde P' je projekce P na řídicí přímku.*

Poznámka. Jak už jsme si mohli několikrát všimnout, elipsa a hyperbola mají mnoho podobných (v jistém smyslu spíše opačných) vlastností. Naproti tomu parabolu můžeme vnímat jako extrémní případ mezi nimi, nejlépe jako „elipsu s jedním ohniskem v nekonečnu“. S touto analogií je třeba zacházet opatrně, ale například na předchozí větě funguje dobře.

Pro elegantní důkaz věty pro elipsu a hyperbolu je užitečné řešení následující úlohy.

Cvičení. Je dána přímka p a body A, B mimo ni. Nalezněte na p bod P minimalizující součet, resp. maximalizující rozdíl jeho vzdáleností od bodů A a B.

Nyní už se můžeme vrhnout na pořádnou geometrii!

Tvrzení. *Průsečík tečen k elipse vedených krajními body P, Q její tětivy obsahující ohnisko F_1 je střed kružnice připsané trojúhelníku F_2PQ příslušející straně PQ. Navíc F_1 je bod dotyku této kružnice a strany PQ.*

Tvrzení. *Nechť P je průsečík tečen k elipse dotýkajících se jí v bodech X a Y. Pak platí $\sphericalangle XF_1P = \sphericalangle YF_1P$.*

Úlohy o elipse

Úloha 1. Dokažte, že množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.

Úloha 2. Daným bodem veďte tečny k elipse. Rozlište případy, kdy bod leží na elipse a mimo ni.

Úloha 3. Popište množinu středů tětiv elipsy daného směru.

Úloha 4. Pomocí pravítka a kružítka zkonstruujte ohniska dané elipsy a.

Úloha 5. Do $2n$-úhelníku je vepsána elipsa. Obarvěme strany mnohoúhelníku střídavě bíle a černě. Dokažte, že součet úhlů, pod kterými jsou z ohniska vidět bílé strany, je roven $180°$.

Úlohy o parabole

Úloha 6. Daným bodem veďte tečny k parabole (je dáno ohnisko a řídicí přímka). Rozlište případy, kdy bod leží na parabole a mimo ni.

Úloha 7. Urči množinu bodů, které mají od přímky q a bodu M stálý součet vzdáleností.

Následující úlohy je vhodné řešit v uvedeném pořadí.

Úloha 8. Dokažte, že obraz ohniska v osové souměrnosti podle tečny leží na řídicí přímce.

Úloha 9. Z bodu P jsou vedeny tečny k parabole dotýkající se jí v bodech X a Y. Jejich kolmé projekce na řídicí přímku označme X' a Y'. Dokažte, že P je opsiště trojúhelníku $FX'Y'$.

Úloha 10. Dokažte, že množina bodů, z kterých je parabola vidět pod pravým úhlem, je řídicí přímka. Navíc pro P na řídicí přímce je PF výška v trojúhelníku XPY, kde X a Y jsou body dotyku tečen z P.

Úloha 11. Dokažte, že ohnisko paraboly připsané trojúhelníku leží na jeho kružnici opsané.

Bonus. S využitím vlastností Simsonovy přímky dokažte

Tvrzení 12. *Řídicí přímka paraboly připsané trojúhelníku prochází jeho průsečíkem výšek.*

Úloha 13. Je dána parabola a její tečna t dotýkající se jí v bodě P. Dokažte, že průsečík kolmice na t procházející P s osou paraboly se nachází v konstantní vzdálenosti od projekce P na osu paraboly nezávisle na poloze bodu P.

Úloha 14. Jsou dány dvě různoběžné přímky a na každé z nich bod pohybující se po ní konstantní (ne nutně navzájem stejnou) rychlostí tak, že průsečíkem přímek neprojdou oba body najednou. Dokažte, že jejich spojnice během pohybu zůstává tečnou k pevné parabole.

Návody

1. Využijte Větu.

2. Pro bod na elipse použijte Větu, pro bod mimo vhodně přeneste celou délku $2a$ na polopřímku F_1T, kde T je hledaný bod dotyku.

3. Využijte toho, že elipsa je rovnoběžnou projekcí kružnice.

4. Využijte předchozí úlohu pro nalezení středu elipsy. Pak sestrojte hlavní a vedlejší poloosu. Využijte symetrie elipsy.

5. Využijte druhého Tvrzení.

6. Pomocí Věty najděte projekci bodu dotyku na řídicí přímku.

7. Vhodně posuňte q.

8. Využijte Větu.

9. Tečny jsou osy stran.

10. Využijte úlohu 8.

11. Využijte úlohu 8 a Simsonovu přímku.

13. Najděte podobné trojúhelníky.

14. Definujte parabolu třemi tečnami (dvě už máte) a využijte úlohu 10.

Literatura a zdroje

[1] A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky *Geometry of Conics*, AMS, 2007.
[2] Alča Skálová *Kuželosečky*, Mentaurov, 2013.

Kongruence

Karolína Kuchyňová

Abstrakt. Kongruence jsou jednou z oblastí studia teorie čísel, vychází z dělitelnosti a umožňují nám rozšířit pohled na ni. Přestože se na středních školách standardně neprobírají, dají se uplatnit v matematické olympiádě i jiných soutěžích. Na přednášce si představíme jejich základní vlastnosti a ukážeme jejich využití na různých typech příkladů.

Definice. Jestliže dvě celá čísla a, b dávají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r, kde $0 \leq r < m$, říkáme, že a a b jsou *kongruentní modulo* m, což zapisujeme takto:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Tvrzení. (Ekvivalentní podmínky) *Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $a \equiv b \pmod{m}$,
(2) $a = b + mt$ *pro vhodné* $t \in \mathbb{Z}$,
(3) $m \mid a - b$.

Tvrzení. *Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $k \in \mathbb{Z}$, platí:*

(1) $a + k \equiv b + k \pmod{m}$,
(2) $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m}$.

Tvrzení. *Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ a $n \in \mathbb{N}$, platí:*

(1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
(2) $ac \equiv bd \pmod{m}$,
(3) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Cvičení. Ukažte, že pokud $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$, tak obecně nemusí platit $a \equiv b \pmod{m}$.

Tvrzení. *Pokud $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$ a $(m, c) = 1$, tak $a \equiv b \pmod{m}$.*

Tvrzení. *Nechť $a \equiv b \pmod{m}$ a $m' \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(1) $a + k \cdot m \equiv b \pmod{m}$.
(2) *pokud $m' \mid m$, pak $a \equiv b \pmod{m'}$,*
(3) *pokud $ca \equiv cb \pmod{m}$, tak $a \equiv b \pmod{m/(m, c)}$.*

Příklady

Příklad 1. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

Příklad 2. Mějme číslo $N = 22 \cdot 31 + 11 \cdot 17 + 13 \cdot 19$. Určete:

(1) paritu čísla N,
(2) poslední číslici N,
(3) zbytek po dělení čísla N sedmi.

Příklad 3. Dokažte, že číslo n je dělitelné číslem m pro

(1) $n = 2^{60} + 7^{30}$ a $m = 13$,
(2) $n = (835^5 + 6)^{18} - 1$ a $m = 112$.

Příklad 4. Dokažte, že

(1) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi,
(2) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ dělitelné číslem 25,
(3) pro libovolné $k, m, n \in \mathbb{N}$ je číslo $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ dělitelné číslem 11.

Příklad 5. Dokažte, že žádné číslo tvaru $8k \pm 3$, $k \in \mathbb{N}$, není možné zapsat ve tvaru $x^2 - 2y^2$ pro žádná celá čísla x, y.

Příklad 6. Dokažte, že

(1) pokud $a, b \in \mathbb{Z}$ a $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$, pak $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$,
(2) pokud $a, b \in \mathbb{Z}$ a $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$, pak $a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$,
(3) existují celá čísla a, b taková, že ačkoli platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5$, přesto neplatí $a \equiv b \equiv 0 \pmod 5$.
(4) pokud $a, b, c \in \mathbb{Z}$ a $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 9$, pak $abc \equiv 0 \pmod 3$.

Příklad 7. Řešte v celých číslech rovnice:

(1) $5x + 7y = 8$,
(2) $91x - 28y = 35$,
(3) $18x + 20y + 15z = 1$,
(4) $15x - 12y + 48z - 51u = 1$.

Příklad 8. Najděte všechna celá čísla x, y taková, že $x^2 = 4y + 2$.

Příklad 9. Dokažte, že rovnice $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ nemá řešení v celých číslech.

Příklad 10. Řešte v přirozených číslech rovnici $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$.

Příklad 11. Ukažte, že jestliže jsou čísla p a $p + 2$ obě prvočísla, tak potom buď $p = 3$, nebo $6 \mid p + 1$. (Kanada 1973)

Příklad 12. Značme ciferný součet přirozeného čísla n jako $C(n)$. Najděte všechna n, pro která platí $n + C(n) + C(C(n)) = 2015$. (Brkos XXI–6–5)

Příklad 13. *Transformací* čísla budeme rozumět jeho nahrazení vlastním ciferným součtem. Začneme s 2007^{2007} a uděláme čtyři transformace. Jaký dostaneme výsledek?

Příklad 14. Ukažte, že napíšeme-li čísla $1, 2, \ldots, 1986$ bez mezer za sebe v libovolném pořadí, nedostaneme nikdy číslo, které by bylo třetí mocninou přirozeného čísla.

Příklad 15. Nechť n je přirozené číslo takové, že $n(n+1)/3$ je čtverec. Ukažte, že pak n je násobek tří a čísla $n+1$ a $n/3$ jsou také čtverce. (Brazílie 1989)

Příklad 16. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p + q = (p - q)^3$. (Ruská MO 2001)

Příklad 17. Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o jedna, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n. (MO 63–I–1)

Literatura a zdroje

[1] J.Herman, R.Kučera, J.Šimša: *Metody řešení matematických úloh I*, MU, 2001,
[2] Kuba Krásenský: *Dělitelnost pro začátečníky*, Domašov, 2012,
[3] Pavel Paták: *Využití dělitelnosti v praxi*, Ramzová, 2006,
[4] Franta Kopecký: *Lehká teorie čísel na brutalitách*, Hutisko-Solanec, 2007,
[5] Michal „Kenny“ Rolínek: *Důkazové metody v teorii čísel*, Domaslav, 2010,
[6] Seriál MKS: Teorie čísel, 33. ročník (2013/2014).

Mocnost bodu ke kružnici

ANH DUNG „TONDA“ LE

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje se základními vlastnostmi mocnosti bodu ke kružnici a ilustruje její použití v geometrických úlohách.

Trocha teorie na úvod

Definice. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r. *Mocností* bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.

Poznámka. Pokud bod M leží vně, resp. uvnitř kružnice k, je číslo $p(M,k)$ kladné, resp. záporné. Leží-li bod M na kružnici k, je $p(M,k) = 0$.

Poznámka. Nechť M a N jsou dva různé body. Pak $p(M,k) = p(N,k)$, právě když $|MO| = |NO|$.

Tvrzení. *Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B. Pak platí*

$$p(M,k) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ vně } k, \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ uvnitř } k. \end{cases}$$

Jestliže speciálně M leží vně k a označíme T bod dotyku tečny ke kružnici k vedené bodem M, pak $p(M,k) = |MT|^2$.

Tvrzení. *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $M = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový, právě když $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.*

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X,k) = p(X,l)$ nazýváme *chordálou* kružnic k, l.

Tvrzení. *Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Příklady

Příklad 1. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P.

Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad 2. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 3. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme bod D. Nyní sestrojme kružnici k_1, která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D. Dále též kružnici k_2, která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné. (Hradiště 2007)

Příklad 4. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Ukažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k, leží na jedné přímce. (MO 56–A–I–5)

Příklad 5. Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

Příklad 6. Kružnice k a l jsou soustředné, přičemž k leží uvnitř l. Bodem $A \in l$ vedeme tečnu AB ke k, kde $B \in k$, jejíž druhý průsečík s kružnicí l označíme C. Dále buď D střed AB. Přímka procházející bodem A protne kružnici k v bodech E a F tak, že osy úseček DE a CF se protínají v bodě M na AB. Určete poměr $|AM|/|MC|$. (USAMO 1998)

Příklad 7. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty příslušných výšek. Zvolme bod P tak, aby přímka PB byla tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAC_0$ a přímka PC tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAB_0$. Dokažte, že AP je kolmá na BC.
(MEMO 2011, MR&JT)

Příklad 8. Body P a Q leží na stranách CA a AB trojúhelníka ABC. Označme K, L a M postupně středy úseček BP, CQ a PQ. Dále předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KLM. Ukažte, že body P a Q jsou stejně vzdálené od středu kružnice opsané $\triangle ABC$. (IMO 2009)

Další příklady

Příklad 9. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (MKS 2005)

Příklad 10. Úhlopříčky nerovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Nechť A_1 je druhý průsečík kružnice opsané $\triangle BCD$ s přímkou AP, body B_1, C_1, D_1 definujeme obdobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je také lichoběžník.
(Turnaj měst 2008)

Příklad 11. V trojúhelníku ABC je $|BC| = 20$. Kružnice vepsaná dělí těžnici AD na tři stejné části. Určete obsah trojúhelníku ABC. (AIME 2005)

Příklad 12. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku platí $OI^2 = R^2 - 2rR$ (kružnice opsaná se středem O má poloměr R, kružnice vepsaná se středem I má poloměr r).

Návody

1. Uvažujte mocnost z bodu P.

2. Přímka OM prochází bodem A.

3. Přímka DE prochází středem úsečky AB, použijte úsekové úhly.

4. Všechny zmíněné kružnice procházejí pevným bodem ležícím na přímce OA.

5. Viètovy vztahy, uvažujte mocnost od počátku souřadnic.

6. Dokažte, že $CDEF$ je tětivový.

7. Bod P je vlastně průsečík výšky z vrcholu A a Thaletovy kružnice nad BC.

8. Ukažte, že trojúhelníky MKL a AQP jsou si podobné.

9. Dokažte, že MQ je tečnou ke kružnici opsané BDQ.

10. Kombinujte čtyři rovnosti získané z mocností.

11. Uvažujte mocnosti z bodů A a D.

12. Tvrzení vlastně hovoří o mocnosti bodu I ke kružnici opsané.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem z příspěvku Pepy Tkadlece, Martiny Vaváčkové a Alči Skálové, kterým velice děkuji.

Pražský orloj

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Orloj vznikl v době mistra Jana Husa kolem roku 1410. Jeho matematický model navrhl Jan Ondřejův, zvaný Šindel, který se zabýval matematikou a astronomií na pražské univerzitě. Na jeho počest byl zaveden pojem šindelovské posloupnosti. Na přednášce budeme zkoumat, jaká podivuhodná matematika se skrývá v bicím stroji pražského orloje a jak tento stroj souvisí s trojúhelníkovými čísly.

Bicí stroj obsahuje velké oběžné kolo s 24 zářezy na vnějším obvodu, jejichž vzdálenosti postupně narůstají. To umožňuje periodické opakování 1–24 úderů zvonu během každého dne. Součástí bicího stroje je i pomocné kolečko, jehož obvod je rozdělen šesti zářezy na segmenty o délkách oblouku

$$1, 2, 3, 4, 3, 2.$$

Tato čísla se periodicky opakují po každé otočce a jejich součet je

$$s = 15.$$

Na začátku každé hodiny se zvedne západka, obě kola se začnou otáčet a zvon odbíjí příslušný počet hodin. Kola se zastaví, jakmile západka zapadne současně do zářezů na obou kolech.

Definice. Součet k prvních přirozených čísel nazveme *k-té trojúhelníkové číslo* a značíme ho

$$T_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Definice. Periodickou posloupnost přirozených čísel (a_i) nazveme *šindelovskou*, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1}$$

Například periodická posloupnost sestavená z délek oblouku na pomocném kolečku $1, 2, 3, 4, 3, 2$ je potenciální šindelovská posloupnost, protože splňuje vztah (1) pro k od 1 do 24. Skutečnost, že se opravdu jedná o šindelovskou posloupnost, ověříme pomocí následujících vět.

Věta. *Periodická posloupnost* (a_i) *je pro liché* s *šindelovská, jestliže pro každé přirozené* $k < (s+1)/2$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že platí* (1)*, kde* s *je součet prvků jedné periody.*

Věta. *Periodická posloupnost* (a_i) *je pro sudé* s *šindelovská, jestliže pro každé přirozené* $k < s$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že platí* (1).

Věta. *Horní odhady* $k < (s+1)/2$ *a* $k < s$ *v předchozích větách nelze zlepšit.*

Definice. Nechť $n \geq 2$ a a jsou pevně daná celá čísla. Jestliže kvadratická kongruence

$$x^2 \equiv a \pmod{n}$$

má řešení x, pak se a nazývá *kvadratický zbytek* modulo n.

Věta. *Periodická posloupnost* (a_i) *je šindelovská právě tehdy, když pro každé* $n \in \{1, \dots, p\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, a_n - 1\}$*, pro něž* $a_n \geq 2$*, číslo*

$$w = 8 \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) - j \right) + 1$$

není kvadratickým zbytkem modulo s.

Definice. Šindelovská posloupnost (a_i) s minimální délkou periody $p+1$ se nazývá *složená*, jestliže existuje šindelovská posloupnost (a'_i) a $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\begin{aligned} a_i &= a'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ a_m &= a'_m + a'_{m+1}, \\ a_i &= a'_{i+1}, \quad i = m+1, \dots, p. \end{aligned}$$

Šindelovská posloupnost (a_i) se nazývá *primitivní*, jestliže není složená.

Věta. *Pro každé* $s \in \mathbb{N}$ *existuje jediná primitivní šindelovská posloupnost* (a_i) *tak, že platí* $s = \sum_{i=1}^{p} a_i$ *pro nějakou (ne nutně minimální) délku periody* p.

Věta. *Pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *existuje* $m \in \mathbb{N}$ *a šindelovská posloupnost* (a_i) *taková, že* $a_m = k$.

Literatura a zdroje

[1] Alena Šolcová: *Deset matematických vět o pražském orloji.*

Kreslení grafů na plochy

Tomáš Novotný

Abstrakt. V první části příspěvku si vysvětlíme základní pojmy týkající se ploch. Dále si ukážeme a procvičíme možné způsoby jejich zobrazování do roviny, abychom na ně následně v druhé části příspěvku mohli kreslit grafy, a ukážeme si, co takové grafy musí splňovat.

Úvod

Jistě jste se už v životě mnohokrát setkali s grafem, například odpovídajícím silniční síti. Pokud jste ovšem potřebovali nakreslit složitější graf, jistě jste si všimli, že ne vždy ho lze nakreslit tak, aby se jeho hrany nikde nekřížily – z tohoto důvodu je třeba stavět na silnicích různé tunely a mosty. Ukážeme si, že kdyby Země nebyla kulatá, ale například měla tvar toru, tak bychom na ní mohli postavit některé silniční sítě, které na kouli bez mostů postavit nelze.

Pro úplnost nejprve definujme, čím je graf ve smyslu teorie grafů:

Definice. *Graf* $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice množin vrcholů a hran

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, E \subseteq \binom{V}{2},$$

kde $\binom{V}{2}$ značí všechny dvojice navzájem různých vrcholů z V, neboli všechny možné hrany. Řekneme, že graf na $|V| = n$ vrcholech je *úplný* (značený K_n), pokud $E = \binom{V}{2}$.

Ukážeme si, že grafy na rovinu nenakreslitelné bez křížení hran lze mnohdy nakreslit na jiné plochy, například torus či Kleinovu láhev.

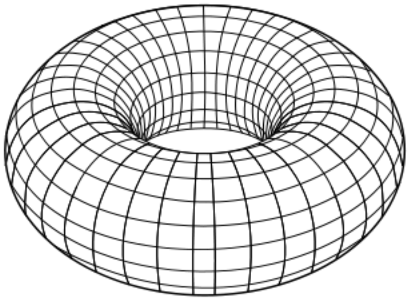
Co to vlastně je ta plocha?

Jelikož plochy mohou vypadat velmi různorodě (například povrch hrníčku, ale třeba i tohoto sborníčku), jejich matematický popis je poměrně složitý. Pro zajímavost, jedna z možných definic je následující:

Definice. *Plocha* Γ je souvislá kompaktní množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že pro každé $y \in X$ existuje otevřené okolí y takové, že jeho průnik s X je homeomorfní otevřenému kruhu v $\mathbb{R}^2$.

Definice ve skutečnosti pouze říká, že *plocha* vypadá „rozumně“, tj. je konečně velká, mezi každými jejími dvěma body vede cesta a neobsahuje žádné „díry“ či okraj. Pojem *homeomorfní* ještě později použijeme, v podstatě platí, že A je *homeomorfní* s B právě tehdy, když lze A zdeformovat tak, že vznikne B (a také B lze zdeformovat na A).

Mezi plochy řadíme například sféru či torus (na obrázku), ovšem rovina či uzavřený čtverec plochami nejsou (rovina není konečná, tudíž ani kompaktní, naopak bod na okraji čtverce nemá okolí homeomorfní otevřenému kruhu). Přesto jsme za pomoci malého triku schopni všechny plochy nakreslit na papír.



Zobrazování ploch do roviny

Nejprve si ukážeme, že platí následující tvrzení:

Tvrzení. *Každý graf, který lze nakreslit na sféru, lze nakreslit i do roviny.*

Důkaz. Stačí, když si zvolíme nějaký bod na sféře, který není vrcholem ani není na hraně grafu, sféru „položíme“ na rovinu s tímto bodem x_0 nahoře a poté každý bod $x \neq x_0$ sféry zobrazíme na takový bod roviny, kde ji protne přímka x_0x.

Cvičení. (motivační) Představte si, že na celé Zemi (předpokládejte, že má tvar dokonalé koule) se vyskytují právě tři domy a tři studny. Postavte cesty mezi každým domem a studnou tak, aby se vzájemně neprotínaly.

Ukážeme si (neformálně) dvě operace, jak kreslit různé plochy na papír, a také pro vzniklé plochy definujeme jejich tzv. Eulerovu charakteristiku χ.

Definice. *Přidání ucha* provedeme tak, že z papíru „vyřízneme“ dva kruhy a body na jejich okrajích v opačných orientacích ztotožníme. *Přidání křižítka* provedeme tak, že „vyřízneme“ pouze jeden kruh a ztotožníme protější body na jeho okraji.

Definice. *Eulerova charakteristika* χ plochy Γ vzniklé ze sféry přidáním u uší a k křižítek je

$$\chi = 2 - 2u - k.$$

Jako cvičení si můžete rozmyslet, že po přidání ucha či křižítka nám zůstane plocha. Ovšem platí dokonce následující věta:

Věta. *Každou plochu lze vytvořit ze sféry přidáním nějakého počtu u uší a k křižítek. Pokud $k = 0$, nazývá se tato plocha neorientovatelná a značí se Σ_u. Pokud $k > 0$, nazývá se tato plocha orientovatelná, je homeomorfní ploše vzniklé ze sféry přidáním právě $n = 2u + k$ křižítek a značí se Π_n.*

A kde vlastně jsou ty grafy?

Nyní máme připraveno vše, abychom mohli začít kreslit grafy na naše vytvořené plochy. Pro úplnost začněme definicí nakreslení grafu:

Definice. Nakreslení grafu $G = (V, E)$ na plochu Γ je takové zobrazení, kde všechny vrcholy z G jsou zobrazeny na různé body Γ a všechny hrany z G na neprotínající se křivky.

Pokud jste zkoušeli vyřešit motivační cvičení výše, nejspíše jste zjistili, že úloha bez použití „mostů“ vyřešit nelze. Nicméně nemusíme zoufat, neboť platí:

Tvrzení. *Každý graf lze nakreslit na sféru s přidáním dostatečného počtu uší.*

Důkaz. Důkaz je velmi snadný, stačí zadaný graf „skoronakreslit“ (povolíme protínání jeho hran) na sféru a poté na každé místo, kde se nějaké dvě hrany kříží, přidáme ucho jako „most“, přes který jednu z nich převedeme. Takto sice můžeme přidat velké množství uší, ale na vzniklou plochu již zadaný graf nakreslit lze. □

Cvičení. Ukažte, že každý graf lze nakreslit na sféru s přidáním dostatečného počtu křižítek.

Problémem předchozího tvrzení je fakt, že uší (či křižítek) je někdy třeba přidat mnoho. Pokud ovšem dostaneme zadanou plochu, tak si ukážeme, že grafy nakreslitelné na tuto plochu jsou poměrně omezené. Konkrétně si postupně dokážeme následující „magické“ tvrzení:

Tvrzení. (magické) *V každém grafu nakresleném na plochu charakteristiky χ různou od sféry existuje vrchol stupně nejvýše*

$$\left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor .$$

Byť toto tvrzení může vypadat velmi pokročile, uvidíme, že s využitím znalosti *Zobecněné Eulerovy formule* není její důkaz příliš obtížný.

Věta. (Eulerova formule) *Pro každý rovinný graf obsahující s stěn platí:*

$$|V| - |E| + s \geq 2,$$

přičemž pokud je graf souvislý, platí rovnost.

Můžete si zkusit tuto větu dokázat (Hint: uvědomte si, že věta platí pro stromy, a pak použijte indukci podle hran). Pro nás je ovšem důležitá její zobecněná verze:

Věta. (Zobecněná Eulerova formule) *Pro každý graf nakreslený na plochu s charakteristikou χ obsahující s stěn platí následující nerovnost:*

$$|V| - |E| + s \geq \chi.$$

Byť to tak na první pohled nevypadá, s touto znalostí už lze „magické“ tvrzení pomocí několika lehčích úvah dokázat. Nejprve si uvědomme, že každá stěna má na svém obvodu alespoň tři hrany a také každá hrana sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Tudíž

$$s \leq \frac{2|E|}{3}.$$

Když tuto nerovnost dosadíme do Zobecněné Eulerovy formule, dostaneme:

$$\begin{aligned} |V| - \frac{|E|}{3} &\geq \chi \\ \frac{6|V|}{|V|} - \frac{2|E|}{|V|} &\geq \frac{6\chi}{|V|} \\ \frac{2|E|}{|V|} &\leq 6 - \frac{6\chi}{|V|} \end{aligned}$$

Jelikož $\frac{2|E|}{|V|}$ je průměrný stupeň vrcholu grafu, víme, že existuje vrchol stupně nejvýše $6 - \frac{6\chi}{|V|}$. Tudíž pro každý graf na ploše s kladnou charakteristikou (tj. sféra a projektivní rovina) existuje vrchol stupně nejvýše pět, takže projektivní rovina splňuje *magické* tvrzení. Navíc pokud má graf n vrcholů, tak zřejmě všechny jeho vrcholy mají stupeň nejvýše $n - 1$.

Nyní si stačí všimnout, že pro $\chi \leq 0$ je funkce $f(x) = 6 - \frac{6\chi}{x}$ pro $x > 0$ nerostoucí, naopak $g(x) = x - 1$ je zjevně rostoucí. Tudíž pokud nalezneme průsečík těchto funkcí, zjistíme maximální možný průměrný stupeň grafu, který lze na odpovídající plochu nakreslit:

$$\begin{aligned} 6 - \frac{6\chi}{x} &= x - 1 \\ x^2 - 7x + 6\chi &= 0 \\ \left(x - \frac{7 - \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož je $\chi \leq 0$, tak $\sqrt{49 - 24\chi} \geq 7$, tudíž první závorka součinu nesplňuje $x > 0$. Ovšem z druhé závorky přímo plyne, že pro průměrný stupeň p libovolného grafu platí

$$p \leq \left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor,$$

což je ovšem přesně naše „magické“ tvrzení!

Cvičení.

(1) Zkuste nakreslit co největší úplný graf na torus.
(2) Zkuste nakreslit co největší úplný graf na Kleinovu láhev.

Ve skutečnosti lze na každou plochu nakreslit úplný graf s právě $\left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor + 1$ vrcholy, ovšem s výjimkou Kleinovy láhve. Předchozí cvičení byl tedy trochu chyták, neboť byť mají torus i Kleinova láhev stejnou charakteristiku, na torus lze nakreslit K_7, ovšem na Kleinovu láhev bohužel ne.

Barevný závěr

Když už víme, jak mohou (a nemohou) vypadat grafy nakreslené na různé plochy, můžeme se ptát, kolik různých barev musíme použít na obarvení jejich vrcholů tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Ukážeme, že platí následující věta.

Věta. (Heawoodova formule) *Každý graf nakreslený na plochu s charakteristikou χ lze obarvit pomocí*

$$k = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor \qquad \textit{barev.}$$

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje graf, který pomocí tohoto počtu barev obarvit nelze, a vyberme takový, který má co nejméně vrcholů. Označme ho G. Využijeme naše magické tvrzení – víme, že v libovolném grafu nakresleném na této ploše najdeme vrchol stupně nejvýše

$$\left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor = k-1,$$

tudíž pokud tento vrchol z G „odtrhneme“, dostaneme opět graf nakreslený na této ploše. Ovšem ten má méně vrcholů, tudíž ho lze tímto počtem barev obarvit.

Vezměme tedy nějaké jeho obarvení a vraťme zpět „odtrhnutý“ vrchol. Ten má ale nejvýše $k-1$ sousedů, tudíž na něj zbyla alespoň 1 barva, kterou ho můžeme obarvit, čímž dostaneme korektní obarvení G, což je spor s předpokladem. $\square$

Tento odhad je navíc těsný pro všechny plochy kromě Kleinovy láhve, u které nám na obarvení libovolného grafu stačí 6 barev. Když se tedy podíváme na sféru, tak po dosazení dostaneme, že každý graf na ní lze obarvit

$$\frac{7+\sqrt{49-24\cdot 2}}{2} = 4$$

barvami. Ale jelikož každý graf je rovinný právě tehdy, když lze nakreslit na sféru, tak jsme takto dokázali, že každý rovinný graf lze obarvit pomocí čtyř barev!

Tedy skoro…

Literatura a zdroje

[1] Zápisky z předmětu *Kombinatorika a grafy II* na MFF UK,
[2] Peter Korcsok, *Grafity v metre*, Sborník MKS, Mentaurov, 2013.

Kombinatorická geometrie

Kuba Svoboda

Abstrakt. Příspěvek pojednává o základních větách v kombinatorické geometrii a jejich různém použití v příkladech.

Kombinatorická geometrie je hezká v tom, že ačkoliv jsou v ní složité problémy, jejich formulace je obvykle jednoduchá a přirozená. Přesto je pro důkazy potřeba zavést formální definice.

Definice. *Bod* v $\mathbb{R}^n$ (n-dimenzionálním prostoru) je uspořádaná n-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud pro každou dvojici bodů $x, y \in C$ celá úsečka xy leží v C, tedy pro každé $t \in [0,1]$ bod $t \cdot x + (1-t) \cdot y$ leží v C. Pro množinu bodů $X \subset \mathbb{R}^n$ je $\mathrm{conv}(X)$ nejmenší množina bodů obsahující X taková, že je konvexní. Tuto množinu nazýváme *konvexní obal*.

Věta. (Radonovo lemma) *Nechť A je množina alespoň $d+2$ bodů v $\mathbb{R}^d$. Potom existují dvě disjunktní podmnožiny $A_1, A_2 \subset A$, takové, že*

$$\mathrm{conv}(A_1) \cap \mathrm{conv}(A_2) \neq \emptyset.$$

Věta. (Helly) *Nechť C_1, C_2, $\ldots$, C_n jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$ a $n \geq d+1$. Pokud je průnik každé $(d+1)$-tice těchto množin neprázdný, potom je průnik všech n množin neprázdný.*

Věta. *(Minkowski) Nechť Λ je mřížka v $\mathbb{R}^d$ a nechť $C \subset \mathbb{R}^d$ je symetrická konvexní množina s $\mathrm{Vol}(C) > 2^d \det(\Lambda)$. Potom C obsahuje bod z Λ jiný než 0.*

Hellyho věta

Úloha 1. Mějme množinu bodů v rovině takovou, že každá trojice těchto bodů je obsažena v kruhu o poloměru jedna. Dokažte, že potom všechny body jsou obsaženy v kruhu o poloměru jedna.

Úloha 2. V rovině je množina obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami a každé dva se protínají. Dokažte, že potom mají všechny společný bod.

Úloha 3. Najděte množinu konvexních útvarů v rovině, kde se každé dva protínají, ale zároveň neexistuje bod, který je ve všech útvarech.

Úloha 4. Existuje nekonečná množina 2016-úhelníků (ne nutně konvexních) v rovině taková, že každá trojice má společný bod, ale žádný bod nenáleží všem?

Úloha 5. V rovině leží $n \geq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Pokud pro každé tři existuje přímka, která je protíná, dokažte, že existuje přímka, která protíná všechny úsečky.

Úloha 6. Nechť $C_1, \ldots, C_n$ je soubor alespoň tří konvexních množin v rovině a nechť K je podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K.

Úloha 7. Řekneme, že soubor $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q)-*vlastnost*, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z C lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. *Špendlíkovost* $s(C)$ souboru množin C je velikost nejmenší množiny $X \subset \mathbb{R}^2$ takové, že každé $C_i \in C$ obsahuje alespoň jeden bod z X.

(1) Dokažte, že je-li C konečný soubor osových obdélníků s $(4, 3)$-vlastností, pak $s(C) \leq 2$.
(2) Najděte soubor C několika osových obdélníků s $(3, 2)$-vlastností, pro který $s(C) = 3$.

Minkowského věta

Úloha 8. Nechť K je kruh se středem v počátku o poloměru 26 metrů. Na každém bodě s celočíselnými souřadnicemi uvnitř K (krom počátku) roste strom o poloměru 16 centimetrů. Dokažte, že pokud stojíme uprostřed, nemůžeme vidět mimo prales.

Úloha 9. Pro α iracionální a $Q \in \mathbb{N}$ dokažte, že existují $p, q \in \mathbb{Z}$, kde $q \leq Q$, takové, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

(Dirichlet)

Úloha 10. Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, taková, že

$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, i = 1, 2.$$

Úloha 11. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ existují celá čísla x_1, x_2, x_3 a x_4, taková, že

$$x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

(Lagrange)

Tak všechno

Úloha 12. Do mnohoúhelníku o obsahu pět jsme nakreslili devět útvarů velikosti jedna. Dokažte, že můžeme najít dva útvary, jejichž průnik je alespoň $1/9$.

(MKS 28–4–2)

Úloha 13. Na přímce je 50 úseček. Dokažte, že existuje bod, který je společný osmi úsečkám, nebo existuje osm úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

Úloha 14. Dokažte, že každý mnohoúhelník obsahuje alespoň jednu svoji diagonálu.

Úloha 15. Vnitřní prostory muzea tvoří (nekonvexní) mnohoúhelník s n vrcholy. Dokažte, že stačí do muzea umístit nanejvýš $n/3$ hlídačů tak, aby ohlídali celý prostor. Dokažte, že méně jich pro některá muzea být nemůže.

Úloha 16. Uvnitř $2n$-úhelníku se nachází liška. Ze všech vrcholů najednou po této lišce vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá hrana musela být zasažena alespoň dvakrát. (MKS 28–4–6)

Úloha 17. Máme šest bodů v obdélníku 4×3. Dokažte, že existují takové dva body, které mají mezi sebou vzdálenost alespoň $\sqrt{5}$.

Úloha 18. Najděte dvě konvexní množiny bodů v rovině takové, že po jejich odebrání se rovina rozpadne na pět nesouvislých částí.

Úloha 19. Dokažte, že pro šest bodů v obecné poloze platí, že v nich existuje trojice bodů tvořící trojúhelník s jedním úhlem velikosti alespoň $120°$.

Úloha 20. Rozhodněte, zda je možné do roviny umístit 13 bodů tak, aby žádné tři neležely na přímce a aby každý úhel tvořený trojicí těchto bodů byl nejvýše $150°$.

(MKS 22–2–7)

Úloha 21. V rovině leží deset bodů s následující vlastností: mezi každými pěti z nich lze najít čtyři, které tvoří tětivový čtyřúhelník. Kolik nejméně z těchto bodů musí ležet na jedné kružnici?

Úloha 22. V rovině máme 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že mezi všemi trojúhelníky tvořenými těmito body není více než 70% ostroúhlých.

(IMO 1970, 6)

Úloha 23. Množina bodů P *propichuje trojúhelníky* množiny bodů M, pokud každý trojúhelník určený trojicí bodů z M obsahuje ve svém vnitřku aspoň jeden bod z P. Dokažte, že pro každou n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze lze najít množinu P s $2n - 5$ body propichující trojúhelníky M.

Zdroje

[1] Předmět Kombinatorická a výpočetní geometrie I, skripta:
http://kam.mff.cuni.cz/kvgII.html

Aritmetické funkce

Pepa Svoboda

Abstrakt. V přednášce se seznámíme s aritmetickými funkcemi jako je Eulerova funkce nebo součet dělitelů. Ukážeme si jejich vlastnosti a spočítáme nějaké příklady. Ve druhé přednášce se budeme zabývat nekonečnými Dirichletovými řadami a dostaneme se až k prvočíselné větě.

Definice. *Aritmetická funkce* je funkce z přirozených čísel do reálných čísel.

Příkladem aritmetických funkcí jsou funkce $f(n) = n^3$, $f(n) = \log(n)$ nebo třeba $\pi(n) =$ počet prvočísel menších nebo rovných n. Obvykle nás zajímají aritmetické funkce, které nesou nějakou informaci o přirozených číslech, například když vezmeme všelijaké vlastnosti čísla n týkající se dělitelnosti.

Definice. *Eulerova funkce* $\varphi(n)$ je počet přirozených čísel nesoudělných s n, která jsou menší rovna n.

Definice. Aritmetickou funkcí $\tau(n)$ myslíme počet všech kladných dělitelů čísla n. Součet všech kladných dělitelů čísla n označujeme jako $\sigma(n)$.

Tvrzení. *Nechť $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ je rozklad čísla n na prvočísla. Pak platí*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že každý dělitel obsahuje ve svém rozkladu pouze prvočísla $p_1, \ldots, p_r$, přičemž prvočíslo p_i v mocnině 0 až α_i. To je tedy $(\alpha_i + 1)$ možností pro prvočíslo p_i. Jelikož můžeme exponenty u různých prvočísel volit nezávisle na sobě, zjistíme počet všech dělitelů jako součin těchto výrazů. □

Tvrzení. *Pro součet dělitelů mocniny prvočísla platí* $\sigma(p^k) = \dfrac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

Klíčovou roli hraje Möbiova funkce μ.

Definice. *Möbiova funkce* μ je

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{je-li } n \textit{ čtvercové}, \text{ tedy existuje-li } a > 1 \text{ takové, že } a^2 \mid n, \\ (-1)^r, & \text{je-li } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \text{ kde } p_i \text{ jsou navzájem různá prvočísla.} \end{cases}$$

Například $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$.

Dirichletova konvoluce

V teorii čísel se často objevují výrazy typu $\sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$, kde f a g jsou aritmetické funkce. Prozkoumáme jejich obecné vlastnosti. K tomu potřebujeme tři jednoduché aritmetické funkce:

Definice.

(i) *Jednotka* je aritmetická funkce u definovaná jako $u(n) = 1$ pro každé n.

(ii) Aritmetická funkce N je definovaná vztahem $N(n) = n$ pro každé n.

(iii) *Identita* je aritmetická funkce I definovaná jako

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Definice. *Dirichletova konvoluce* aritmetických funkcí f a g je aritmetická funkce

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Konvoluci funkcí f a g značíme $f * g$.

Úloha.

(i) $\mu * u = I$,
(ii) $\varphi * u = N$,
(iii) $\mu * N = \varphi$.

Úloha. (Dirichletova inverzní formule) Nechť $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Potom platí rovnost $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Tvrzení. (vlastnosti konvoluce) *Nechť f, g, h jsou libovolné aritmetické funkce. Pak platí:*

(i) $f * g = g * f$ *(komutativita),*
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(asociativita),*
(iii) $f * I = I * f = f$ *(identita nedělá nic).*

Multiplikativita funkcí

Většina aritmetických funkcí, se kterými jsme se dosud setkali a se kterými se zde ještě setkáme, má významnou vlastnost, které se říká multiplikativita.

Definice. O aritmetické funkci f řekneme, že je *multiplikativní*, pokud $f(1) \neq 0$ a pro každou dvojici a, b přirozených navzájem nesoudělných čísel platí $f(ab) = f(a)f(b)$. Funkce je *úplně multiplikativní*, pokud $f(ab) = f(a)f(b)$ platí pro každou dvojici přirozených čísel.

Poznámka.

$$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r}).$$

Cvičení. Uvědom si, že funkce I, u, N a μ jsou multiplikativní. Které z nich jsou multiplikativní úplně?

Cvičení. Dokaž, že pokud je f multiplikativní funkce, tak $f(1) = 1$.

Tvrzení. (Konvoluce zachovává multiplikativitu) *Pokud jsou f a g multiplikativní, pak je multiplikativní i $f * g$. Totéž obecně neplatí pro úplnou multiplikativitu.*

Příklad. Funkce τ (počet dělitelů) a σ (součet dělitelů) jsou multiplikativní.

Úloha. $\sigma = \tau * \varphi$.

Definice. Nechť f je aritmetická funkce taková, že $f(1) \neq 0$. Potom funkci g nazveme *Dirichletovou inverzí* k f, pokud $f * g = g * f = I$. Obvykle ji značíme f^{-1}.

Tvrzení. *Dirichletova inverze existuje pro každou funkci f splňující $f(1) \neq 0$.*

Tvrzení. *Nechť f je multiplikativní. Pak f je úplně multiplikativní, právě když*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \quad \textit{pro každé přirozené } n.$$

Definice. Funkce $\pi(n)$ označuje počet prvočísel menších nebo rovných číslu n.

Dirichletovy řady

Definice. *Riemannova ζ funkce* je definovaná předpisem $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Obecněji, *Dirichletovou řadou* aritmetické funkce $f(n)$ myslíme řadu[1]

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Dirichletovy řady dávají pravý smysl Dirichletovu násobení, jak ukazuje následující tvrzení.

[1] Otázkou konvergence Dirichletových řad se nezabýváme.

Tvrzení. *Nechť f a g jsou dvě aritmetické funkce a $h = f * g$. Pak pro jejich Dirichletovy řady platí $F(s)G(s) = H(s)$.*

Příklad.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Příklad.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Příklad.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Tvrzení. (Basilejský problém) $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Tvrzení. (Eulerova formule) *Nechť f je úplně multiplikativní. Pak*
$$F(s) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Úloha. Dokaž, že
$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6}\frac{\sigma(n)}{n}.$$

Prvočísla

Na závěr si ukážeme, co můžou říct aritmetické funkce a Dirichletovy řady k otázce rozložení prvočísel. Pokud ještě přidáme výsledky matematické analýzy, dostaneme slavnou prvočíselnou větu[2].

Definice. *Von Mangoldtova* funkce Λ je definovaná předpisem
$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{je-li } n = p^k \text{ pro prvočíslo } p \text{ a } k \geq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad. $\log = \Lambda * u$.

Příklad.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

[2] dokázali ji současné pánové Jacques Hadamard a Charles Jean de la Vallée-Poussin

Úloha. Zobecni minulý příklad pro Dirichletovu řadu úplně multiplikativní funkce.

Definice. *Čebyševova funkce* je definovaná jako $\psi(n) = \sum_{p^k \leq n} \log(p)$.

Příklad. Dokaž, že $\psi(n) = \sum_{i \leq n} \Lambda(i)$. Pomocí tohoto vzorce můžeme definovat $\psi(x)$ pro reálné x.

Věta. (Prvočíselná věta)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1$$

Tvrzení. *Riemannova funkce nemá žádné kořeny v polorovině* $\Re(s) \geq 1$.

Lemma. *Prvočíselná věta je ekvivalentní limitě* $\dfrac{\psi(x)}{x} = 1$.

Úloha. Nechť p_n značí n-té prvočíslo. Dokaž, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \log(n)} = 1.$$

Literatura a zdroje

[1] Tom M. Apostol: *Introduction to analytic number theory*, Springer 1998.
[2] Hua Loo Keng: *Introduction to number theory*, Springer-Verlag 1982.
[3] Josef Svoboda, Štěpán Šimsa: *Seriál z teorie čísel, 3. díl*, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf*.

Polynomy bez Viètových vztahů

Martin „E.T“ Sýkora

Abstrakt. Příspěvek obsahuje důležité věty a tvrzení o polynomech a úlohy, které lze vyřešit za pomoci daných vět nebo nějakým chytrým trikem.

Polynomy jsou skutečně široké téma, a proto se při jejich zkoumání omezíme a nebudeme si povídat o Viètových vztazích. Ty jsou sice velmi užitečné, jak ale uvidíme, i bez nich dokážeme silné věty a s lehkostí vyřešíme obtížné příklady.

Definice 1. *Polynomem stupně n* rozumíme výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Čísla $a_i \in \mathbb{R}$ nazýváme *koeficienty polynomu* a *x proměnnou*. Stupeň nulového polynomu většinou klademe roven -1.

Poznámka 2. Můžeme upustit od podmínky $a_i \in \mathbb{R}$. Obecněji totiž lze definovat polynomy nad libovolným komutativním okruhem. (Typicky mohou být koeficienty celá nebo komplexní čísla.)

Definice 3. *Kořen* polynomu P je takové číslo t, že $P(t) = 0$.

Tvrzení 4. *Je-li P polynom stupně $n \geq 1$ a t jeho kořen, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $P(x) = (x - t)Q(x)$, kde Q je jednoznačně určený polynom stupně $n - 1$.*

Takzvaná *základní věta algebry* říká, že každý polynom nad komplexními čísly (s komplexními koeficienty) má alespoň jeden (komplexní) kořen. S využitím předchozího tvrzení se pak snadno ukáže, že každý komplexní polynom stupně n lze zapsat ve tvaru $a_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$, kde jednotlivá a_i jsou komplexní čísla. Důkaz této věty je složitý a přesahuje rámec přednášky. Platí ale, že každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Navíc má předchozí tvrzení tři zajímavé důsledky, které si na přednášce dokážeme.

Důsledek 5. *Nenulový polynom stupně n, kde $n > 0$, má nejvýše n kořenů.*

Důsledek 6. *Pokud se dva polynomy stupně nejvýše n shodují v alespoň $n + 1$ bodech, jsou identické.*

Důsledek 7. *Každými $n + 1$ body lze proložit unikátní polynom stupně nejvýše n.*

Věta 8. *Má-li polynom P celočíselné koeficienty a $a, b \in \mathbb{Z}$, pak $a-b \mid P(a)-P(b)$.*

Věta 9. *Má-li polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen r/s (v základním tvaru), pak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Lehčí ukázkové příklady

Příklad 10. Najděte všechny polynomy P splňující

$$P(0) = 0 \quad \text{a} \quad P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$$

pro všechna reálná x.

Příklad 11. Najděte všechny polynomy P splňující $P(2) = 6$ a $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ pro všechna reálná x.

Příklad 12. Ať P je polynom s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že je-li $P(n)$ dělitelné třemi pro tři po sobě jdoucí přirozená čísla, pak je dělitelné třemi pro všechna přirozená čísla.

Příklad 13. Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen? (MKS 34–6–4)

Další příklady

Příklad 14. Polynom P s celočíselnými koeficienty splňuje $P(0) = 1$. V kolika nejvíce různých celých číslech může nabývat hodnoty 2008? (MKS 28–3–5)

Příklad 15. Ať P je polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(0) = P(1) = 2011$. Ukažte, že $P(x)$ nemá celočíselný kořen.

Příklad 16. Polynom $P(x)$ stupně 2015 pro $k = 1, \ldots, 2016$ splňuje $P(k) = \frac{1}{k}$. Určete $P(2017)$. (MKS 29–1–8)

Příklad 17. Koeficienty polynomu P jsou přirozená čísla. Pro každé přirozené číslo n označme a_n součet cifer v desítkovém zápisu čísla $P(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ vyskytuje nekonečněkrát.

(MKS 21–6–6)

Příklad 18. Dokažte, že polynom $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) - 1$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ jsou po dvou různá, nelze zapsat jako součin dvou polynomů stupně alespoň jedna s celočíselnými koeficienty. (MKS 28–3–8)

Příklad 19. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou monické polynomy stupně 10 (tj. koeficient u x^{10} je 1). Dokažte, že pokud rovnice $P(x) = Q(x)$ nemá žádné reálné řešení, pak rovnice $P(x+1) = Q(x-1)$ reálné řešení má.

Návody

10. Postupně dosazujte za x hodnoty $0, 1, 2, \ldots$ a použijte důsledek 6.

11. Z druhé rovnosti určete stupeň polynomu P, najděte jeho kořeny a rozložte jej. Možná se bude hodit pozorování, že P je sudý.

12. Z věty 8 plyne, že pokud je $a-b$ dělitelné třemi, pak i $P(a)-P(b)$ je dělitelné třemi.

13. Jedná se o ukázkový příklad. Jaká věta by se na něj asi mohla použít?

14. Uvažte $Q(x) = P(x) - 2008$. Hledejte maximální počet kořenů Q. Pro kořeny t_i platí $-2007 = at_1t_2 \ldots t_n$, tedy $n \leq 5$. Vhodný polynom s pěti kořeny jistě najdete.

15. Kdyby a bylo celočíselným kořenem P, muselo by z věty platit $a \mid 2011$ i $a \pm 1 \mid 2011$, což není možné.

16. Zkoumejte kořeny polynomu $Q(x) = xP(x) - 1$.

17. Dosaďte „vysokou“ mocninu 10.

18. Sporem! Polynomy z předpokládaného rozkladu sečtěte a něco vhodného do nich dosaďte, čímž zjistíte, jaké stupně mohou mít. Rozebráním případů dojděte ke sporu.

19. Studujte stupně polynomů $P(x) - Q(x)$ a $P(x+1) - Q(x-1)$.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Tkadlec: *První setkání s polynomy*, Sborník MKS, Hojsova Stráž, 2011.
[2] David Hruška: *Polynomy kvadratické a jiné*, Sborník MKS, Horní Lysečiny, 2013.

Dokreslování

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek obsahuje přes čtyřicet geometrických úloh, v jejichž řešení se dokreslují body nebo přímky, které v zadání původně nebyly. Úlohy jsou seskupeny podle myšlenek, které dotyčná dokreslení motivují. Na konci příspěvku jsou k úlohám uvedeny návody.

Při řešení geometrických úloh se zpravidla snažíme obrázek zjednodušovat, jak jen je to možné (typicky tím, že úlohu přeformulujeme na ekvivalentní úlohu na méně bodech). Občas ale stojí za to naopak nějaké body nebo přímky dokreslit. Poznat, kdy je k tomu vhodná příležitost, vyžaduje notnou dávku intuice. Ta se ale dá získat :).

Protahujeme čáry

Přímka je přirozenějším geometrickým objektem než úsečka či polopřímka. Pokud tedy narazíme na jednu z posledních dvou jmenovaných, její protažení stojí za zvážení. Obzvláště tehdy, získáme-li tím druhý průsečík s kružnicí. Jindy protahujeme čáry proto, abychom na ně mohli nanést úsečky a tím „narovnat“ lomenou čáru.

Příklad 1. Pětiúhelník $ABCDE$ má všechny vnitřní úhly stejné velikosti. Dokažte, že osa strany AB, osa strany CD a osa úhlu DEA procházejí jedním bodem. (Polsko 2010)

Příklad 2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|CD| = 3$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 135°$. Určete $|AD|$. (MKS 31–6–3)

Příklad 3. Na průměru AB půlkružnice τ jsou dány body X, Y tak, že $|AX| = |BY|$. Rovnoběžné paprsky vedoucí z X a Y zasáhnou τ v P a Q. Dokažte, že hodnota součinu $|XP| \cdot |YQ|$ nezávisí na volbě směru paprsků.

Příklad 4. V trojúhelníku ABC s vepsištěm I platí $|BC| = |AC| + |AI|$. Dokažte, že $\alpha = 2\beta$. (TR*i*KS 2013)

Příklad 5. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle PCA| = \frac{1}{3}(\beta + \gamma).$$

Ukažte, že

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC| + |PB|}{|AB| + |PC|}.$$

(Polsko 1997)

Příklad 6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$. (IMO 2012, 5)

Příklad 7. Je dán trojúhelník ABC. Osy vnitřních úhlů u vrcholů A, B protnou protější strany v bodech P, Q. Platí-li $\alpha = 60°$ a $|AB|+|BP| = |AQ|+|QB|$, určete velikosti zbylých vnitřních úhlů v $\triangle ABC$. (IMO 2001, 5)

Poznáváme známou konfiguraci

Často dokreslujeme body tak, aby vznikla známá konfigurace – například trojúhelník s kolmištěm a kružnicí devíti bodů, nebo třeba trojúhelník se Švrčkovými body či připsišti. Nezřídka se totiž úloha jen snaží maskovat známé tvrzení ze známého obrázku.

Příklad 8. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že $AP \perp BC$.

(MKS 32–8–4a)

Příklad 9. V rovině jsou dány body A, B, C, D tak, že platí $|\sphericalangle ACB| = 20°$, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABC| = 40°$ a $|\sphericalangle ADC| = 80°$. Určete $|\sphericalangle ABD|$. (KMS 2008)

Příklad 10. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny k půlkružnici vedené body C, D se protnou v E a úhlopříčky AC, BD v bodě F. Označme M průsečík EF a AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici.

(China West 2010)

Příklad 11. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme I, J postupně vepsiště trojúhelníků ABD, ABC. Dále označme K průsečík kolmic vedených z bodů I, J po řadě na přímky BD, AC. Dokažte, že trojúhelník IJK je rovnoramenný.

(MO 56–A–III–2)

Příklad 12. V ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme P patu A-výšky, H kolmiště, O opsiště, D průsečík AO a BC a konečně M střed úsečky AD. Dokažte, že přímka PM prochází středem úsečky OH. (MO 60–A–III–5)

Příklad 13. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, I vepsiště a N střed oblouku BC kružnice opsané obsahujícího bod A. Dokažte, že $|\sphericalangle INA| = |\sphericalangle IMB|$. (ARO 2005)

Středy a body v poměru

Samostatnou přednášku by zasloužilo zacházení se středy úseček. Obecně lze říci, že máme-li v obrázku středy alespoň dva, snažíme se dokreslit další, abychom využili vlastností středních příček. Je-li přítomen střed jeden, můžeme s výhodou použít středovou souměrnost (dokreslit rovnoběžník). Na závěr ještě zmiňme, že ačkoliv středy obecně nemají dobré úhlové vlastnosti, středy přepon pravoúhlých trojúhelníků jsou (jakožto středy opsaných kružnic) „úhlově“ příjemné.

Příklad 14. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ svírá spojnice středů stran BC a AD stejné úhly s oběma úhlopříčkami. Dokažte, že tyto úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
(ARO 1990)

Příklad 15. Uvnitř trojúhelníka ABC na jeho těžnici AM je dán bod K tak, že $|CK| = |AB|$. Označme L průsečík přímek CK a AB. Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný.

Příklad 16. Je dán trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k. Tečna k vedená bodem A protne přímku BC v bodě P. Označme M střed AP a Q druhý průsečík MB a k. Ukažte, že $|\sphericalangle PQA| = |\sphericalangle AQC|$. (Alex Zhai)

Příklad 17. Na straně BC ostroúhlého trojúhelníka ABC s kolmištěm H je dán bod D. Kolmice na DH vedená bodem H protne strany AB, AC v bodech F, E. Dokažte, že

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|FH|}{|HE|}.$$

(Polsko)

Příklad 18. Na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC jsou dány body P, Q, R tak, že

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|AR|}{|RB|}.$$

Navíc platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle PRQ|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a PRQ jsou podobné. (ARO 1989)

Příklad 19. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě P. Označme K, L paty kolmic z P na AB, CD a dále buď M střed strany AD. Dokažte, že $|MK| = |ML|$. (USA TST 2000)

Stříhání a přelepování

Dokreslování hojně využíváme tehdy, je-li obrázek svázaný nezvyklými podmínkami. V takovém případě se ho snažíme přeorganizovat tak, aby podmínky začaly dávat lepší geometrický smysl.

Příklad 20. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle DBC| + 2 \cdot |\sphericalangle DBA| = 180°$. Navíc $|AD| = 6$ a $|DB| + |BC| = 10$. Určete $|AC|$.
(MKS 26–6–7)

Příklad 21. V obdélníku $ABCD$ jsou dány body E, F tak, že $EF \parallel AB$, $AE \parallel FC$ a AE protíná stranu CD. Navíc $|AB| = 9$, $|BC| = 8$, $|AE| = 4$ a $|FC| = 6$. Určete $|EF|$.
(AIME 2011)

Příklad 22. Uvnitř úhlu BAC je dán bod P. Na ramenech AB, AC najdeme body X, Y tak, aby $|AX| = |AY|$ a délka lomené čáry XPY byla nejkratší možná, Dokažte, že $|\sphericalangle APX| = |\sphericalangle APY|$.
(Polsko 2008)

Příklad 23. V rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod P tak, že $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$. Dokažte, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ADP|$.
(ruský folklór)

Příklad 24. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC s opsištěm O jsou dány body M, N tak, že $|\sphericalangle MON| = \alpha$. Dokažte, že obvod trojúhelníka MAN není menší než $|BC|$.
(ARO 2002)

Příklad 25. Bod M uvnitř konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ splňuje $|MA| = |MC|$,

$$|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle MAD| + |\sphericalangle MCD| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle MCB| + |\sphericalangle MAB|.$$

Dokažte, že $|AB| \cdot |CM| = |BC| \cdot |MD|$ a $|BM| \cdot |AD| = |MA| \cdot |CD|$.
(IMO shortlist 1999, G7)

Vždy rovnostranný trojúhelník!

V úlohách s konkrétně zadanými velikostmi úhlů se snad vždy snažíme vyrobit rovnostranný trojúhelník – tím namnožíme úsečky jedné pevné délky a získáme rovnoramenné trojúhelníky či dokonce kružnice. Dalším opakujícím se motivem je používání opsiště střídavě jako bodu stejně vzdáleného od tří jiných a bodu, u nějž jsou dvojnásobné (totiž středové) úhly.

Příklad 26. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Dále $|\sphericalangle ABC| = 150°$ a $|\sphericalangle BCD| = 90°$. Určete $|\sphericalangle ADB|$.

Příklad 27. Uvnitř rovnoramenného trojúhelníka ABC splňujícího $|AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 99{,}4°$ je dán bod D tak, že $|AD| = |DB|$ a $|\sphericalangle BAD| = 19{,}7°$. Určete $|\sphericalangle ACD|$.
(Náboj 2013, 54)

Příklad 28. V A-rovnoramenném trojúhelníku ABC s vnitřním úhlem $\alpha = 80°$ je dán bod P tak, že $|\sphericalangle PAC| = 10°$ a $|\sphericalangle PCA| = 20°$. Určete $|\sphericalangle PBC|$.

Příklad 29. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |AC|$, $|AD| = |CD|$, $|\sphericalangle BAC| = 20°$ a $|\sphericalangle ADC| = 100°$. Dokažte, že $|AB| = |BC| + |CD|$.

Příklad 30. Uvnitř trojúhelníka ABC splňujícího $\beta = 2\gamma$ je dán bod P tak, že $|PB| = |PC|$ a $|AB| = |AP|$. Dokažte, že $|\sphericalangle PAC| = 2 \cdot |\sphericalangle PAB|$.

Příklad 31. Je dán trojúhelník ABC splňující $\beta = \gamma = 50°$. Na jeho stranách BC, CA jsou dány body P, Q tak, že $|\sphericalangle BAP| = 50°$ a $|\sphericalangle QBA| = 30°$. Určete $|\sphericalangle BQP|$.

Příklad 32. Je dán trojúhelník ABC splňující $\beta = \gamma = 80°$. Na straně AB najdeme bod P tak, aby $|AP| = |BC|$. Určete $|\sphericalangle ACP|$.

Příklad 33. Na straně AD kosočtverce $ABCD$ splňujícího $|\sphericalangle DAB| = 40°$ je dán bod M tak, že $|\sphericalangle DBM| = 30°$. Určete $|\sphericalangle DCM|$.

Magie

Ať se nám to líbí, či ne, je potřeba se smířit s tím, že stále budou existovat úlohy, které tak úplně nespadají do žádné z výše uvedených kategorií. Pak je potřeba vhodné dokreslení prostě vymyslet :). Nebojte se experimentovat!

Příklad 34. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ splňující $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ a $|EF| = |FA|$. Dokažte, že osy úhlů ABC, CDE a EFA procházejí jedním bodem.

Příklad 35. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z D na BM. Dokažte, že $|\sphericalangle APC| = 90°$.
(Rumunsko 2006)

Příklad 36. Body X, Y, Z jsou dány na výškách AD, BE, CF trojúhelníka ABC tak, že

$$[ABZ] + [BCX] + [CAY] = [ABC]$$

(kde symbolem $[PQR]$ značíme obsah trojúhelníka PQR). Označme H kolmiště trojúhelníka ABC. Dokažte, že body X, Y, Z, H leží na jedné kružnici.

Příklad 37. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k se středem O. Ať AA' je její průměr. Tečna ke k vedená bodem A' protne přímku BC v bodě P. Přímka PO vytne na trojúhelníku ABC úsečku. Dokažte, že O je jejím středem.
(Výběrko 2007)

Příklad 38. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ splňující $a + c = b + d$. Nad všemi jeho stranami jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice. Dokažte, že existuje kružnice, která se jich všech dotýká. (Polsko 2013)

Příklad 39. Je dán konvexní čtyřúhelník $PIVO$. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. Bod X uvnitř $PIVO$ splňuje

$$|\sphericalangle XVI| = |\sphericalangle XOP| < 90° \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°.$$

Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2 \cdot |\sphericalangle XIV|$. (IMO shortlist 2000, G6)

Příklad 40. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, AC v bodech Z, Y. Zkonstruujme body R, S tak, aby $BCYR$ a $BCSZ$ byly rovnoběžníky, a označme G průsečík přímek BY a CZ. Dokažte $|GR| = |GS|$.
(IMO shortlist 2009, G3)

Příklad 41. (Brianchonova věta) Lze-li šestiúhelníku $ABCDEF$ vepsat kružnici, pak úhlopříčky AD, BE, CF procházejí jedním bodem.

Návody

1. V rovnoramenném trojúhelníku splývá osa strany s osou úhlu.

2. Je to pravoúhlý trojúhelník s ustřihnutým rohem.

3. Dokreslete druhou polovinu obrázku a využijte středové souměrnosti.

4. Překlopte A podle osy úhlu u C (nebo narovnejte AI na CA) a najděte tětivový čtyřúhelník.

5. Po protažení úseček najděte podobné trojúhelníky.

6. Nakreslete vhodné kružnice se středy A, B, protněte je podruhé, protáhněte úsečky a najděte tětivový čtyřúhelník.

7. „Narovnejte“ lomené čáry na přímky AB, AC. Poúhlete a dokažte, že jelikož P není A-připsiště v $\triangle ABQ$, musí být $|QB| = |QT|$.

8. Poznejte kolmiště.

9. Dokažte, že bod D je opsiště $\triangle ABC$.

10. Protáhněte ramena a poznejte obrázek s kolmištěm a kružnicí devíti bodů.

11. Dokreslete tzv. „Švrčkův bod“ – střed oblouku AB kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$.

12. Obraz H podle strany BC padne na kružnici opsanou.

13. Dokreslete B- a C-připsiště a uvědomte si, že N je jejich středem.

14. Dokreslete střed AB.

15. „Navažte“ na sebe shodné úsečky dokreslením rovnoběžníka $BKCX$.

16. Dokreslete současně rovnoběžník $PBAX$ a tětivový čtyřúhelník $PQAX$.

17. Na polopřímku BH naneste X, aby $|BH|/|HX| = |BD|/|DC|$, a odhalte kolmiště.

18. Dokreslete průsečík BC a rovnoběžky s AB skrz Q.

19. Středy PA a PD, jakožto středy přepon pravoúhlých trojúhelníků, vůbec nejsou špatné body.

20. Obrázek vznikl přehnutím podle AB (proto v něm není CD). Narovnejte ho.

21. Vystřihněte pásek skrz E a F.

22. Rozstřihněte $AXPY$ podle AP a přelepte.

23. Přelepte $\triangle ABP$ na $\triangle DCX$, aby vznikl tětivový čtyřúhelník.

24. Využijte toho, že $|OA| = |OB| = |OC|$, a přerovnejte obvod $\triangle MAN$ do lomené čáry s konci B a C.

25. Rozstříhejte $ABCD$ podle M na 4 trojúhelníky a přeskládejte je (po případném nafukování) na rovnoběžník.

26. Dokreslete současně čtverec $BCDE$ a rovnostranný trojúhelník ABE.

27. Dokreslete obraz bodu B podle osy AD.

28. Zobrazte P podle BC.

29. Naneste na AB úsečku délky $|AD|$ nebo přelepte BCD na DEC.

30. Dokreslete rovnoramenný lichoběžník.

31. Zobrazte P podle AC na P' a uvědomte si, že P' leží na BQ (kružnice se středem P).

32. Překlopte C přes AB do X a B přes AC do Y. Najděte tvar ACP na bodech B, C, X, Y.

33. Zobrazte M podle BD na N a všimněte si, že N je opsiště $\triangle MBC$.

34. Dokreslete trojúhelník ACE.

35. Dokreslete obdélník $ADMX$.

36. Veďte body X, Y, Z rovnoběžky s příslušnými stranami.

37. Ať M je střed BC.

38. Střed úhlopříčky!

39. Na osu VO dokreslete body K, L tak, aby $\triangle VKL \sim \triangle VXI$ a $\triangle OKL \sim \triangle OXP$. Vyjde $|LP| = |LI|$.

40. Dokažte, že B a Y leží na chordále R a A-připsané.

41. Dokreslete tři kružnice tak, aby úhlopříčky AD, BE, CF byly jejich chordálami.

Literatura

Tento příspěvek je kopií stejnojmenného příspěvku od *Josefa Tkadlece*, jemuž tímto děkuji.

[1] Josef Tkadlec: *Dokreslování*, Horní Lysečiny, 2013.
[2] Andreescu, Rolínek, Tkadlec, *107 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013.
[3] Archivy olympiád na *mathlinks.ro*.

Lineární programování a aproximační algoritmy

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek se věnuje dvěma informatickým tématům, lineárnímu programování a aproximačním algoritmům, jejichž výsledky se často používají v praxi. Přestože je lineární programování důležité především pro informatiky, jedná se o matematický problém. Aproximační algoritmy jsou často založené právě na lineárním programování, a proto na sebe tato dvě témata navazují. Přestože aproximační algoritmy jsou tématem nesporně informatickým, často bývá obtížnější dokázat, že daný algoritmus je skutečně aproximační, než algoritmus vymyslet.

Lineární programování

Definice. *Úlohou lineárního programování* je maximalizovat jistou účelovou funkci na základě daných lineárních podmínek. Formálně mějme reálné proměnné $x_1, \ldots, x_n$ a konstanty $c_1, \ldots, c_n, a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$. Pak chceme najít maximum funkce $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ přes všechny možné hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ splňující podmínky $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Cvičení. Ukaž, že se tato úloha také dá vyjádřit lineárním programem:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimalizovat} & x_1 - 3x_2 + \pi x_3 \\
\text{mezi všemi vektory } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 & \\
\text{za podmínek} & x_1 + 2x_2 = x_3 \\
 & x_2 - x_3 \leq 0 \\
 & x_3 \geq 1.
\end{array}
$$

Předchozí cvičení ukazuje, že si můžeme v lineárních podmínkách povolit i opačné nerovnosti, nebo dokonce i rovnosti, a podobně že můžeme účelovou funkci minimalizovat místo maximalizovat.

Příklad 1. Najdi optimální řešení následujícího lineárního programu:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximalizovat} & x_1 + x_2 \\
\text{mezi všemi vektory } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 & \\
\text{za podmínek} & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_2 - x_1 \leq 1 \\
 & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
 & 4x_1 - x_2 \leq 10.
\end{array}
$$

Definice. *Přípustné řešení* lineárního programu je libovolné řešení, které splňuje všechny zadané podmínky. *Optimální řešení* je takové přípustné řešení, jehož účelová funkce je největší, resp. nejmenší (pro maximalizační, resp. minimalizační problém).

Poznámka. Všimni si, že úloha nemusí mít žádné, jedno nebo i více přípustných řešení. To samé platí i pro optimální řešení úlohy.

Definice. Úloha je *nepřípustná*, pokud nemá žádné přípustné řešení, a *neomezená*, nabývá-li účelová funkce mezi přípustnými řešeními libovolně velkých (resp. malých) hodnot.

Na úlohu lineárního programování se také můžeme dívat geometricky. Máme-li n proměnných, tak nám každá podmínka určuje poloprostor v n-dimenzionálním prostoru. Přípustná řešení jsou pak ty body, které leží v průniku všech těchto poloprostorů, což je nějaký konvexní mnohostěn. Optimalizační funkce určuje směr a optimální řešení jsou ty body tohoto mnohostěnu, které jsou nejdále v tomto směru.

Cvičení. Rozmysli si, že má-li lineární program optimální řešení, pak je i nějaký z vrcholů příslušného mnohostěnu přípustných řešení optimálním řešením.

Předchozí cvičení naznačuje jeden možný způsob řešení lineárních programů. Nalezneme všechny vrcholy a vezmeme ten nejlepší.

Příklad 2. Najdi takový lineární program s n proměnnými a $2n$ podmínkami, aby konvexní mnohostěn představující přípustná řešení této úlohy měl 2^n vrcholů.

Příklad 3. Máme dán konvexní n-úhelník P v rovině a chceme najít největší kruh v něm obsažený.

Příklad 4. Máme daných několik modrých a červených bodů v rovině. Nalezni takovou přímku, že všechny modré, resp. červené body leží na jedné, resp. druhé straně přímky (žádný bod nesmí ležet na přímce samotné).

Poznámka. Úlohy lineárního programování se dají řešit v polynomiálním čase, například **elipsoidovou metodou**.

Duální program

Definice. *Duální program* k lineárnímu programu ve tvaru:

$$\begin{array}{lll} \text{maximalizovat} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j & \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \\ & x_i \geq 0 & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \qquad \text{(P)}$$

je lineární program:

$$\begin{array}{lll} \text{minimalizovat} & \sum_{i=1}^{m} c_i y_i & \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ & y_i \geq 0 & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \end{array} \qquad \text{(D)}$$

Věta. (Slabá věta o dualitě) *Pro každé přípustné řešení x primární úlohy* (P) *a každé přípustné řešení y duální úlohy* (D) *platí*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Speciálně, je-li (P) *neomezená, musí* (D) *být nepřípustná, a je-li* (D) *neomezená, pak je nepřípustná* (P).

Věta. (Silná věta o dualitě) *Pro úlohy* (P) a (D) *nastane právě jedna z následujících možností:*

1. *Ani* (P), *ani* (D) *nemá přípustné řešení.*
2. (P) *je neomezená a* (D) *nemá přípustné řešení.*
3. (P) *nemá přípustné řešení a* (D) *je neomezená.*
4. *Jak* (P), *tak* (D) *mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení x^* úlohy* (P) *a optimální řešení y^* úlohy* (D) *a platí*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y^* k_i.$$

Těžké problémy

Zde následuje několik problémů, kterým říkejme *těžké*. Za předpokladu, že $P \neq NP$ (což se považuje za rozumný předpoklad) pro tyto algoritmy neexistuje žádný polynomiální algoritmus.

Problém. (Minimální vrcholové pokrytí) Úlohou je nalézt co nejmenší podmnožinu vrcholů takovou, že každá hrana má alespoň jeden ze svých krajních vrcholů v této množině.

Problém. (Set cover problem) Mějme množinu $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ a její podmnožiny $S_1, \ldots, S_m$, jejichž sjednocením je U. Cílem je najít co nejmenší indexovou množinu $I \subset U$, že sjednocení přes příslušné podmnožiny $S_i, i \in I$, je celá množina U, tedy:

$$\bigcup_{i \in I} S_i = U.$$

Problém. (Největší nezávislá množina) Úlohou je najít největší *nezávislou množinu* v grafu, tedy podmnožinu vrcholů takovou, že mezi nimi nevede žádná hrana.

Problém. (Problém obchodního cestujícího) Máme daná města a vzdálenost mezi každými dvěma těmito městy. Cílem je najít nejkratší možnou trasu, která projde přes všechna tato města a vrátí se zpět do původního města.

Všimněme si, že je-li nějaký problém těžký a povede se nám ho vyřešit převedením na jiný problém (aniž bychom tím příliš zvýšili velikost vstupu), tak i tento problém je těžký.

Celočíselné programování

Definice. *Úlohou celočíselného programování* je úloha lineárního programování, kde navíc přidáme podmínky na celočíselnost proměnných.

Příklad 5. Napiš celočíselný program, který řeší *set cover problem.*

Důsledek. *Za předpokladu $P \neq NP$ se úloha celočíselného programování nedá řešit v polynomiálním čase.*

Definice. *Relaxace* celočíselného lineárního programu je lineární program, ve kterém se vynechají podmínky na celočíselnost. Řešení této úlohy lze pak často upravit na řešení původní celočíselné úlohy.

Příklad 6. (Párování maximální váhy, těžký) Navrhni algoritmus pro následující problém. Máme daný bipartitní graf se stejně velkými komponentami a s ohodnocenými hranami. Chceme nalézt perfektní párování (každý vrchol bude spojen s právě jedním ze svých sousedů), aby součet vah na hranách v párování byl co největší.

Aproximační algoritmy

Definice. Algoritmus je α*-aproximační*, pokud pro všechny možné vstupy vydá v polynomiálním čase výstup, jehož hodnota je alespoň $1/\alpha$-násobek pro maximalizační problém, resp. nejvýše α-násobek pro minimalizační problém.

Příklad 7. (Minimální vrcholové pokrytí) Nalezni 2-aproximační algoritmus pro problém *minimální vrcholové pokrytí.*

Příklad 8. (Set cover problem) Nalezni nějaký aproximační algoritmus na *set cover problem.*

Příklad 9. (Balancování grafu) Navrhni 2-aproximační algoritmus pro následující problém. Na vstupu je neorientovaný graf s kladnými váhami na hranách. Cílem je zorientovat všechny hrany, aby ten nejtěžší vrchol (vrchol s nějvětší součtem vah hran orientovaných k němu) měl co nejmenší možnou váhu.

Příklad 10. (Problém batohu) Najdi 2-aproximační algoritmus pro problém batohu, který je zadán následovně. Máme batoh s danou nosností a několik předmětů, každý se svojí váhou a cenou. Cílem je najít takovou podmnožinu předmětů, které se vejdou do batohu a jejichž součet cen je největší možný.

Příklad 11. (Metrické TSP) Nalezni aproximační algoritmus pro *problém obchodního cestujícího*, kde navíc jednotlivé vzdálenosti splňují trojúhelníkovou nerovnost.

Příklad 12. (Plánování) Nalezni 2-aproximační algoritmus pro následující plánovací problém. Máme několik počítačů a několik úkolů. Každý úkol má svoji délku a může být závislý na jiných úkolech, což znamená, že ho může počítač začít provádět, až když jsou všechny předchozí úkoly (na libovolném počítači) dokončené. Cílem je minimalizovat čas, kdy se dokončí všechny úkoly.

Příklad 13. (Problém k dodavatelů) Nalezni 3-aproximační algoritmus pro následující problém. Na vstupu máme $m+n$ bodů v rovině, kde m z nich jsou dodavatelé a zbylí jsou zákazníci. Úkolem je vybrat k dodavatelů tak, že minimalizujeme nejdelší vzdálenost mezi zákazníkem a jeho nejbližším vybraným dodavatelem.

Návody

1. Nakresli si příklad do roviny.

2. Zobecni krychli do více dimenzí.

3. Jako proměnné zvol poloměr, který se bude maximalizovat, a souřadnice středu. Využij vzoreček pro vzdálenost bodu od přímky.

4. Zvlášť vyřeš svislou přímku. Poté napiš program s ostrými nerovnostmi, kterých se následně zbav zavedením nové proměnné.

5. Vezmi proměnnou pro každou množinu a dej jí hodnotu 1 nebo 0 podle toho, jestli je mezi vybranými, nebo ne.

6. Napiš celočíselný program, který tuto úlohu řeší, a uvaž jeho relaxaci. Pak najdi způsob, jak zachovat optimalitu, ale z neceločíselných proměnných udělat celočíselné.

7. Sestav lineární program řešící tuto úlohu, uvaž jeho relaxaci a optimální řešení vhodně zaokrouhli.

8. Sestav celočíselný lineární program, který tuto úlohu řeší, a vezmi jeho relaxaci. Také můžeš uvážit relaxaci duálního programu. Pro důkaz, že jde o aproximační algoritmus, uvaž číslo odpovídající největšímu počtu množin, ve kterých se některý prvek vyskytuje.

9. Napiš lineární program, kde proměnná odpovídá každé orientované hraně (hodnota 1/0 znamená, že hrana je/není orientovaná tímto směrem), uvaž relaxaci a řešení zaokrouhli.

10. Setřiď předměty podle „hustoty" (poměr cena/hmotnost).

11. Pro 2-aproximační algoritmus obejdi dvakrát minimální kostru grafu. Pro $1,5$-aproximační algoritmus nejprve sestav minimální kostru a pak na vrcholech s lichým stupněm nalezni minimální perfektní párování.

12. Posouvej se v čase a vždy umísti všechny možné úkoly. Využij toho, že optimum je alespoň součet všech délek úkolů podělený počtem počítačů a také alespoň tolik jako součet délek úkolů na libovolné cestě v závislostním grafu.

13. Vždy vezmi zákazníka, který je na tom nejhůře, a přidej jeho nejbližšího dodavatele.

Literatura a zdroje

[1] Jiří Matoušek: *Lineární programování a lineární algebra pro informatiky*, ITI Series 2006-311.

[2] D. P. Williamson, D. B. Shmoys: *The Design of Approximation Algorithms*, Cambridge University Press, 2011.

[3] Martin Böhm: *cvičení k Úvodu do aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů, http://iuuk.mff.cuni.cz/ bohm/15-16/apxintro/.*

Dvě neobvyklé existenční techniky

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. Příspěvek popisuje dvě jednoduché, ovšem nepříliš známé techniky využívané (zpravidla) pro důkazy existence.

Diskrétní spojitost

Přes svůj zvláštní, poněkud oxymorický název je diskrétní spojitost velmi jednoduchý a intuitivní přístup. Ilustrujme na příkladu:

Příklad 1. Na rovinné louce se pase 2016 bodových prasátek. Pastevec Rado se doslechl, že se k louce blíží vlk, který chce prasátka sežrat. Samozřejmě chce prasátka zachránit, a proto by kolem nich rád postavil kruhovou ohradu (jiné tvary neuznává). Zároveň by si ovšem rád naklonil Štěstěnu na svoji stranu, proto by chtěl nechat právě 42 prasátek mimo ohrádku, a tím učinit krvavou oběť svému Pánu a Spasiteli Belzebubu. Ukažte, že takovou ohrádku skutečně umí postavit.

Řešení. Nejprve ukážeme, že existuje bod B, na kterém nestojí žádné prasátko a který zároveň nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost. To plyne z toho, že pokud má bod ke dvěma prasátkům stejnou vzdálenost, potom leží na ose úsečky, která je spojuje. Tím máme ale zakázaný jen konečný počet (konkrétně $\binom{2016}{2}$) přímek a konečný počet bodů, což nám určitě nepokryje celou rovinu. Proto bod B s požadovanými vlastnostmi vskutku existuje.

Nyní, když jsme hotovi s technikáliemi, přejdeme na skutečné použití diskrétní spojitosti. Uvažujme kružnici k_1 se středem v B, která neobsahuje žádné prasátko (ta existuje – prostě zvolme poloměr menší, než je vzdálenost B k nejbližšímu prasátku). Postupně ji nafukujme, dokud všechna prasátka neleží uvnitř kružnice. Na začátku se mimo kružnici páslo $2016 > 42$ prasátek, na konci je to $0 < 42$. Protože při nafukování najednou přidáme vždy jen jedno prasátko (protože B nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost), musí jednou určitě nastat taková situace, kdy se právě 42 prasátek nachází mimo ohrádku.

Příklad 2. E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T.

i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

(MKS 33–5–5)

Příklad 3. Ukažte, že existuje 1000 za sebou jdoucích přirozených čísel, mezi kterými se nachází právě 5 prvočísel. (MKS 30–1–4)

Příklad 4. V (na obě strany nekonečné) řadě stojí iKSaři a chudáci (každý člověk je buď iKSař, nebo chudák). Je známo, že pokud vezmeme libovolný konečný podúsek této řady, bude se v něm počet iKSařů a chudáků lišit maximálně o 1000. Ukažte, že existuje podúsek řady délky 2000, ve kterém je právě 1000 iKSařů.

(ITAMO 2013)

Příklad 5. Nechť n je přirozené číslo větší než jedna. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční přímkou* nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

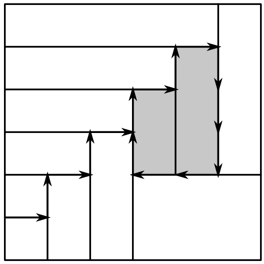
Příklad 6. Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. Větrným mlýnem rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P, dokud „nenarazí“ na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku ℓ procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011)

Procházení stavového prostoru

Druhá idea této přednášky zní taktéž vcelku krypticky, ovšem neznamená nic jiného, než „když chodíme mezi konečným počtem možností pomocí rozumného pravidla, musíme se buď zacyklit, nebo skončit“. Opět budeme ilustrovat na příkladu:

Příklad 7. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedna hlavní ulice. Dokažte, že město má centrum. (MKS 34–5–6, ISL 2007)

Řešení. Projedeme se po městě. Vjedeme do něj některou hlavní ulicí a dojedeme až na konec této ulice (kde už nejde pokračovat rovně). Tento konec je kvůli vyhlášce uvnitř města, a protože jsou všechny čtvrti obdélníkové, jedná se o křižovatku tvaru T. Díky vyhlášce je alespoň jeden konec ulice, na kterou jsme narazili, opět uvnitř města. Vydáme se tedy na něj. Opět dojedeme na konec a proces opakujeme. Takto projíždíme městem tak dlouho, než dojedeme na místo, na kterém už jsme jednou byli. Mezi okamžikem, kdy jsme na tomto místě byli poprvé, a kdy jsme na něj dojeli podruhé, jsme objeli neprázdnou oblast, v níž je každá čtvrť centrem.



Příklad 8. Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

(MKS 34–5–7, IMO 1986)

Příklad 9. Mějme libovolné prvočíslo $p \geq 7$. Dokažte, že pak existuje přirozené číslo n a celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ nesoudělná s p taková, že

$$\begin{gathered} x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p} \\ x_2^2 + y_2^2 \equiv x_3^2 \pmod{p} \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \equiv x_1^2 \pmod{p}. \end{gathered}$$

(MKS 34–3–8)

Příklad 10. Romeo a Julius jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce (je to lomená čára). Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Romea a Julia. Dokažte, že se mohou setkat. (MKS 24–1–7)

Zdánlivě neexistenční úlohy

Myšlenka procházení stavových prostorů se vyskytuje i v úlohách, které na první pohled nevypadají příliš „existenčně“. Pomocí stavových prostorů v nich však (často při důkazu sporem) jako pomocné tvrzení ukážeme existenci něčeho, co zadání nepožaduje, ale co nám pomůže vyřešit úlohu.

Příklad 11. Máme n karet očíslovaných 1 až n zamíchaných v balíčku. V každém kroku se podíváme na horní kartu. Pokud na ní je číslo k, obrátíme pořadí horních k

karet. Tj. z pořadí $3,5,2,4,1,7,6$ dostaneme $2,5,3,4,1,7,6$, z toho $5,2,3,4,1,7,6$ a z toho $1,4,3,2,5,7,6$. Ukažte, že časem se nahoru dostane jednička. (TRiKS 35)

Příklad 12. David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. (MKS 34–1–7)

Příklad 13. Bludiště sestává z místností tvaru čtverce spojených jednotkovými zdmi (prostě políčka ve čtverečkované síti). Pokud jsou dvě místnosti spojené zdí, vedou mezi nimi i dveře. PraSátko se snaží dostat ven z labyrintu, do kterého jej uvrhl Děd Vševěd. V každé místnosti je na zemi šipka, která ukazuje na některé dveře. Poté, co Prasátko vstoupí do místnosti, se šipka začne otáčet proti směru hodinových ručiček, a když poprvé ukáže na dveře, zastaví se. Následně se tyto dveře otevřou a do místnosti je vpuštěn jedovatý plyn, takže PraSátko musí dveřmi utéct. Poté, co PraSátko projde, se dveře zavřou a proces se opakuje znovu v nové místnosti. (Jedovatý plyn bude mezitím opět odsátý, takže pokud PraSátko vstoupí do některé místnosti znovu, nic se mu nestane.) Děd vševěd chtěl PraSátku dát šanci, a proto do právě jedné místnosti přidal dveře, které vedou ven (když se otevřou). PraSátko začíná v místnosti, která je nějakou posloupností dveří spojená s místností s východem. Je Děd Vševěd schopný nastavit tvar bludiště, pozici východu, počáteční pozici PraSátka a počáteční orientaci šipek tak, aby se PraSátko nikdy nedostalo ven?

Příklad 14. Do každého políčka tabulky $n \times n$ napíšeme kladné reálné číslo tak, že součet čísel v každém řádku je roven 1 a platí, že kdykoliv vybereme n políček tak, že z každého řádku i sloupce vezmeme právě jedno, je součin čísel těchto políček menší nebo rovný součinu čísel na diagonále. Dokažte, že součet čísel na diagonále je alespoň 1. (iKS 4–5, St. Petersburg 2000)

Monskyho věta

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s Monskyho větou. V první části budeme budovat zdánlivě nesouvisející teorii. Ve druhé pak tuto teorii využijeme k důkazu věty.

Zamysleme se nad následující otázkou – pro jaká přirozená n umíme rozřezat čtverec na n trojúhelníků o stejném obsahu? Je jednoduché ukázat, že pro sudá n je to vždy možné. Jak je to ale s lichými?

Zdánlivě nesouvisející teorie

Definice. Nechť p je prvočíslo. Potom jako *p-valuaci* nazveme funkci $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takovou, že $v_p(0) = 0$ a pokud $r \neq 0$ je racionální číslo, pro které platí $r = p^k \frac{a}{b}$, kde k je celé číslo a a a b jsou celá čísla nedělitelná p, pak $v_p(r) = p^{-k}$.

Například $v_2(\frac{3}{4}) = 4$, $v_3(15) = \frac{1}{3}$ a $v_5(1) = 1$.

Definice. Funkci $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ nazveme *nearchimédovskou valuací*, pokud platí

(1) $(v(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,
(2) $v(xy) = v(x)v(y)$,
(3) $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$,

pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$.

Tvrzení. *Pokud v je nearchimédovská valuace a $v(x) \neq v(y)$, pak $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$.*

Rozšiřování p-valuace

Povšimněme si, že $v_p(x)$ naši definici nearchimédovské valuace téměř splňuje, pouze není definovaná v iracionálních číslech. Je možné tuto funkci vhodně na iracionálních číslech dodefinovat tak, že v_p zůstane nearchimédovskou valuací, ale my to dělat nebudeme. Vystačíme si se slabším tvrzením. Stále usilujeme o to, roztáhnout definiční obor na celé $\mathbb{R}$, ale místo $\mathbb{R}_0^+$ budeme za obor hodnot naší valuace požadovat jen nějakou množinu M, pro kterou platí $M = \{0\} \cup G$, kde G je uspořádaná abelovská grupa (tj. množina s násobením a dělením, u které umíme určit, co je větší a co je menší) a kde pro každé $a \in G$ platí $0 \cdot a = 0$ a $0 < a$.

Tvrzení. *Existuje nearchimédovská valuace $w : \mathbb{R} \to M$ taková, že $w\left(\frac{1}{2}\right) > 1$.*

Lemma. (Zornovo) *Mějme množinu X. O množině R, jejíž prvky jsou podmnožiny X, řekneme, že se jedná o řetězec, pokud pro každé dvě množiny $A, B \in R$ platí $A \subset B$ nebo $B \subset A$.*

Nechť S, jejíž prvky jsou podmnožiny X, je neprázdná množina splňující následující podmínku: Pro každý řetězec $R \subset S$ platí $\bigcup R \in S$. Pak existuje maximální množina $M \in S$. (Maximální množinou rozumíme takovou, že pro žádnou jinou množinu $A \in S$ neplatí $M \subset A$.)

A jdeme na to!

Věta. (Monskyho) *Není možné rozřezat čtverec na lichý počet trojúhelníků se stejným obsahem.*

Budeme pro spor předpokládat, že takové rozřezání je možné a budeme pracovat s takovýmto rozřezáním čtverce $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

Definice. Řekneme, že bod se souřadnicemi $[x, y]$ je obarven

(1) *modře*, pokud $w(x) \geq w(y), w(x) \geq w(1)$,

(2) *zeleně* , pokud $w(x) < w(y), w(y) \geq w(1)$,

(3) *červeně*, pokud $w(x) < w(1), w(y) < w(1)$.

Definice. Výraz

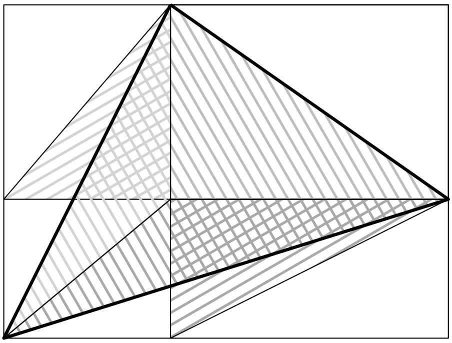
$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

budeme zkráceně značit jako

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Lemma. *Trojúhelník se souřadnicemi $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$ má obsah rovný*

$$\frac{1}{2}\big|(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)\big| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Definice. Jako *duhový trojúhelník* nazveme takový trojúhelník, jehož každý vrchol má jinou barvu.

Lemma. *Nechť* $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$ *jsou vrcholy duhového trojúhelníku. Potom*

$$w\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right) \geq 1.$$

Lemma. *V libovolném rozřezání čtverce se vyskytuje alespoň jeden duhový trojúhelník.*

Literatura a zdroje

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2010.

Jensenova nerovnost

Martin Töpfer

Abstrakt. Jensenova nerovnost je překvapivě silná a může pomoct, když klasické AG nebo CS selžou. Obecně si rozumí i se složitějšími funkcemi a díky tomu ji budete pravidelně potkávat i na vysoké škole.

Konvexní kombinace

Definice. Nechť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ a navíc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak číslo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ nazýváme *konvexní kombinací* čísel $x_1, \ldots, x_n$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší a x_n největší z čísel $x_1, \ldots, x_n$, leží každá konvexní kombinace těchto čísel v intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$.

Pro práci s Jensenovou nerovností je klíčové porozumět konvexním kombinacím (bodů) v rovině.

Definice. Nechť $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ jsou souřadnice n bodů v rovině, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak bod o souřadnicích

$$[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$.

Cvičení. Co je množinou všech konvexních kombinací daných dvou (tří, čtyř, atd.) bodů v rovině? A co v prostoru?

Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y),$$

řekneme, že f je *konvexní* na I.

Duálně (s opačnou nerovností) definujeme *konkávní* funkci. Pokud pro $\lambda \in (0, 1)$ platí ostrá varianta uvedené nerovnosti, mluvíme o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci.

Cvičení. Rozmyslete si, co nerovnost definující konvexitu (resp. konkavitu) znamená geometricky.

Cvičení. Zjistěte, které z elementárních funkcí jsou na nějakých intervalech konvexní (resp. konkávní).

Jensenova nerovnost

Věta. *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Často nám bude stačit jednodušší tvar nerovnosti, kdy jsou všechny $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \ldots x_n}{n}\right).$$

Cvičení. Interpretujte obě strany rovnosti geometricky pomocí konvexních kombinací bodů a uvědomte si, že tvrzení se tím stává téměř triviálním.

Cvičení. Rozmyslete si, kdy v Jensenově nerovnosti nastává rovnost.

Nyní si můžeme blahopřát, neboť jsme téměř zadarmo získali velmi obecně vyhlížející nerovnost, která se ukáže být silnou zbraní. Ke správnému použití Jensenovy nerovnosti je třeba umět rozhodnout, zda je daná funkce konvexní (resp. konkávní). K tomu se v praxi používá následující lemma.

Lemma. *Má-li funkce f na intervalu I nezápornou (resp. nekladnou) druhou derivaci, je f na I konvexní (resp. konkávní).*

Pokud jste o derivaci (natož nějaké druhé derivaci) neslyšeli, nezoufejte. U jednoduchých funkcí se dá konvexita/konkavita dobře odhadnout z grafu, případně lze použít vhodný matematický software. Přísně korektní zdůvodnění se v tomto případě nevyžaduje ani v MO, o jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní či konkávní. Konvexní jsou například $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $\mathbb{R}^+$ nebo sudé mocniny x na $\mathbb{R}$. Typické konkávní funkce jsou $\sqrt{x}$ nebo $\log(x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Logaritmus

Občas se při používání Jensenovy nerovnosti setkáme s logaritmem. Užitečný pro nás bude, protože svým způsobem převádí násobení na sčítání a mocnění na násobení. Přesněji o tom hovoří následující poznámka.

Poznámka. Nechť $a > 1$. Funkce $f(x) = \log_a(x)$ definovaná na $\mathbb{R}^+$ jako inverzní funkce k $g(x) = a^x$ má následující vlastnosti:

(i) f je rostoucí ryze konkávní funkce na $\mathbb{R}^+$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$,

(iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

(iv) $f(x^y) = yf(x)$.

Motivační příklady

Konečně se dostáváme k úlohám. Začneme zlehka:

Příklad. Ukažte, že pro každé reálné $x > 1$ platí:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení. Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $f(x) = 1/x$, která je konvexní na $\mathbb{R}^+$, a konvexní kombinaci kladných čísel $x-1$, x, $x+1$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \geq \frac{1}{\frac{x-1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Jistě by vám nedělalo problém tuto nerovnost dokázat zcela přímočaře roznásobením. Zkusíme tedy něco těžšího – zástupce typické skupiny úloh řešitelných Jensenovou nerovností:

Příklad. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Jensenovu nerovnost aplikujeme na funkci $f(x) = \sin x$ konkávní na intervalu $(0, \pi)$. Platí $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, tedy

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U této nerovnosti bychom již přímočařejší přístup hledali těžko. Jensenova nerovnost je pro dokazování nerovností pro úhly v trojúhelníku často užitečná, neboť známe jejich součet (a tedy i tu nejjednodušší konvexní kombinaci).

Pořád je to moc snadné? Jensenova nerovnost jde použít i na dokazování nerovností mezi průměry:

Tvrzení. *(AH nerovnost) Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Tvrzení. *(AG nerovnost) Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Nyní už víme dost, abychom se mohli pustit do řešení skutečných úloh. Nezapomeňte, že Jensenova nerovnost platí pro každou konvexní (resp. konkávní) funkci, takže pokud kýžená nerovnost hned napoprvé nevyjde, není důvod házet Jensena do žita – prostě zkuste jinou funkci. Tak hurá do toho!

Úlohy na rozehřátí

Úloha 1. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Úloha 2. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b splňující $a + b = 1$ platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Úloha 4. Pro α, β, γ úhly v trojúhelníku dokažte nerovnosti

(i) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$,

(ii) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

(iii) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.

Úloha 5. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sqrt[4]{27\left(a^7 + b^7 + c^7\right)} \geq \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[4]{b^7} + \sqrt[4]{c^7}.$$

Úloha 6. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{1}{1+2xy}.$$

Pořádné úlohy

Úloha 7. Ukažte, že v ostroúhlém trojúhelníku platí

$$a+b+c \geq \sqrt{2bc\cos\alpha}+\sqrt{2ac\cos\beta}+\sqrt{2ab\cos\gamma}.$$

Úloha 8. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Úloha 9. Pro $a,b \geq 0$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(MO 63–III–6)

Úloha 10. Pro reálná $x_1,\dots,x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1}+\dots+\frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1\dots x_n}+1}.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 11. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Karamatova nerovnost

Podobně jako můžeme vážit AG nerovnosti a když nás to přestane bavit, objevíme Muirheadovu nerovnost, tak i v případě Jensenovy nerovnosti existuje zobecnění, které se zbaví omezení, že na pravé straně odhadu je jen funkční hodnota váženého průměru čísel. Abychom tuto obecnou verzi nerovnosti mohli snadno popsat, zavedeme následující značení:

Definice 12. Řekneme, že konečná posloupnost $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *majorizuje* $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ (budeme značit $a \succ b$), když má následující vlastnosti:

(1) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$,
(2) $a_1+a_2+\dots+a_i \geq b_1+b_2+\dots+b_i$ pro všechna $1 \geq i \geq n$,
(3) $a_1+a_2+\dots+a_n = b_1+b_2+\dots+b_n$.

Věta 13. (Karamatova) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in I$, že $x \succ y$ platí*

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n).$$

Pro konkávní funkci platí obrácená nerovnost.

Úloha 14. Dokažte, že

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Úloha 15. Pro a, b, c strany trojúhelníku dokažte

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

(APMO 1996)

Zdroje

Sborníkový příspěvek vychází z přednášky na stejné téma od Davida Hrušky. Změnou prošly hlavně náročnější úlohy a byla přidána sekce o Karamatova nerovnosti založená na A Brief Introduction to Olympiad Inequalities od Evan Chena.

Obsah

Konstrukční úlohy (Tonda Češík) 3
Finále soutěže ACM (Filip Hlásek) 5
Kruhová inverze (Martin Hora) 9
Počítání dvěma způsoby (Martin Hora) 12
Diskriminant a Cauchy-Schwarzova nerovnost (David Hruška) 16
Kuželosečky (David Hruška) 20
Kongruence (Karolína Kuchyňová) 26
Mocnost bodu ke kružnici (Anh Dung „Tonda“ Le) 29
Pražský orloj (Anh Dung „Tonda“ Le) 32
Kreslení grafů na plochy (Tomáš Novotný) 34
Kombinatorická geometrie (Kuba Svoboda) 39
Aritmetické funkce (Pepa Svoboda) 42
Polynomy bez Vièetových vztahů (Martin „E.T“ Sýkora) 47
Dokreslování (Štěpán Šimsa) 50
Lineární programování a aproximační algoritmy (Štěpán Šimsa) 57
Dvě neobvyklé existenční techniky (Rado van Švarc) 63
Monskyho věta (Rado van Švarc) 67
Jensenova nerovnost (Martin Töpfer) 70