Zásada

Sborník, podzim 2017

Filip Bialas
Anička Doležalová
Verča Hladíková
David Hruška
Jan Kadlec
Bára Kociánová
Kuba Krásenský
Jan Krejčí
Jakub Löwit
Viki Němeček
Tomáš Novotný
Marian Poljak
Martin „E.T.“ Sýkora
Rado van Švarc
Felici Nero

AUTOŘI: Filip Bialas, Anička Doležalová, Verča Hladíková, David Hruška, Jan Kadlec, Bára Kociánová, Kuba Krásenský, Jan Krejčí, Jakub Löwit, Viki Němeček, Tomáš Novotný, Marian Poljak, Martin „E.T.“ Sýkora, Rado van Švarc, Felici Nero
EDITOR: Viki Němeček
vydání první, náklad 45 výtisků
listopad 2017
Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

Kongruence

Filip Bialas

Abstrakt. Kongruence jsou jedním z nástrojů teorie čísel. Dovolují nám získat jednodušší náhled na dělitelnost. V této přednášce si je definujeme a naučíme se s nimi od základů pracovat.

Definice. Nechť m je přirozené číslo. Jestliže dvě celá čísla a, b splňují $p \mid a - b$, pak říkáme, že a a b jsou *kongruentní modulo* m, což zapisujeme takto:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Pokud jsou dvě čísla kongruentní modulo m, tak to znamená, že dávají stejný zbytek po dělení číslem m. Speciálně $m \mid a$ můžeme zapisovat jako $a \equiv 0 \pmod{m}$. Ukážeme si, že se s kongruencemi dá pracovat až na výjimky stejně jako s normálními rovnicemi.

Tvrzení. *Pokud* $a \equiv b \pmod{m}$ *a* $k \in \mathbb{Z}$, *platí:*

(1) $a + k \equiv b + k \pmod{m}$,
(2) $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m}$.

Tvrzení. *Pokud* $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ *a* $n \in \mathbb{N}$, *platí:*

(1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
(2) $ac \equiv bd \pmod{m}$,
(3) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Cvičení. Ukažte, že pokud $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$, tak obecně nemusí platit $a \equiv b \pmod{m}$.

Tvrzení. *Pokud* $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$ a $\mathrm{NSD}(m, c) = 1$, *tak* $a \equiv b \pmod{m}$.

Tvrzení. *Nechť* $a \equiv b \pmod{m}$ *a* $m' \in \mathbb{N}$. *Pak platí:*

(1) $a + k \cdot m \equiv b \pmod{m}$,
(2) *pokud* $m' \mid m$, *pak* $a \equiv b \pmod{m'}$,
(3) *pokud* $ca \equiv cb \pmod{m}$, *tak* $a \equiv b \pmod{m/\mathrm{NSD}(m, c)}$.

Příklady

Příklad 1. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

Příklad 2. Mějme číslo $N = 22 \cdot 31 + 11 \cdot 17 + 13 \cdot 19$. Určete:

(1) paritu čísla N,
(2) poslední číslici N,
(3) zbytek po dělení čísla N sedmi.

Příklad 3. Dokažte, že číslo n je dělitelné číslem m pro

(1) $n = 2^{60} + 7^{30}$ a $m = 13$,
(2) $n = (835^5 + 6)^{18} - 1$ a $m = 112$.

Příklad 4. Dokažte, že

(1) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi,
(2) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je číslo $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ dělitelné číslem 25,
(3) pro libovolné $k, m, n \in \mathbb{N}$ je číslo $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ dělitelné číslem 11.

Příklad 5. Dokažte, že žádné číslo tvaru $8k \pm 3$, $k \in \mathbb{N}$, není možné zapsat ve tvaru $x^2 - 2y^2$ pro žádná celá čísla x, y.

Příklad 6. Dokažte, že

(1) pokud $a, b \in \mathbb{Z}$ a $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$, pak $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$,
(2) pokud $a, b \in \mathbb{Z}$ a $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$, pak $a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$,
(3) existují celá čísla a, b taková, že ačkoli platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5$, přesto neplatí $a \equiv b \equiv 0 \pmod 5$,
(4) pokud $a, b, c \in \mathbb{Z}$ a $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 9$, pak $abc \equiv 0 \pmod 3$.

Příklad 7. Řešte v celých číslech rovnice:

(1) $5x + 7y = 8$,
(2) $91x - 28y = 35$,
(3) $18x + 20y + 15z = 1$,
(4) $15x - 12y + 48z - 51u = 1$.

Příklad 8. Najděte všechna celá čísla x, y taková, že $x^2 = 4y + 2$.

Příklad 9. Dokažte, že rovnice $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ nemá řešení v celých číslech.

Příklad 10. Řešte v přirozených číslech rovnici $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$.

Příklad 11. Ukažte, že jestliže jsou čísla p a $p + 2$ obě prvočísla, tak potom buď $p = 3$, nebo $6 \mid p + 1$. (Kanada 1973)

Příklad 12. Nechť n je přirozené číslo a mějme posloupnost n celých čísel. Dokažte, že existuje v této posloupnosti souvislá podposloupnost taková, že n dělí součet čísel v této podposloupnosti.

Příklad 13. Ukažte, že existuje přirozené číslo ze samých jedniček, které je dělitelné 2017.

Příklad 14. Značme ciferný součet přirozeného čísla n jako $C(n)$. Najděte všechna n, pro která platí $n + C(n) + C(C(n)) = 2015$. (Brkos XXI–6–5)

Příklad 15. *Transformací* čísla budeme rozumět jeho nahrazení vlastním ciferným součtem. Začneme s 2007^{2007} a uděláme čtyři transformace. Jaký dostaneme výsledek?

Příklad 16. Ukažte, že napíšeme-li čísla $1, 2, \ldots, 1986$ bez mezer za sebe v libovolném pořadí, nedostaneme nikdy číslo, které by bylo čtvercem přirozeného čísla.

Příklad 17. Nechť n je přirozené číslo takové, že $n(n+1)/3$ je čtverec. Ukažte, že pak n je násobek tří a čísla $n + 1$ a $n/3$ jsou také čtverce. (Brazílie 1989)

Příklad 18. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p + q = (p - q)^3$. (Ruská MO 2001)

Příklad 19. Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o jedna, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n. (MO 63–I–1)

Návody

1. $5^{20} \equiv (-1)^{10} \pmod{26}$.

2. Počítejte postupně modulo dvěma, deseti a sedmi.

3. Počítejte chytře modulo m.

4. Kongruence.

5. Vyzkoušejte, jaké jsou možnosti pro x^2 modulo 8.

6. Znovu zkoušejte všechny možnosti zbytků čtverců nebo třetích mocnin.

7. Uvažujte rovnice v různých modulech.

8. Počítejte modulo čtyři.

9. Počítejte modulo osmi.

10. Počítejte modulo osmi.

11. Jaké zbytky po dělení šesti můžou dávat prvočísla kromě dvojky a trojky?

12. Uvažujte postupně součty všech prvních k čísel posloupnosti, kde $0 \leq k \leq n$. Následně použijte Dirichletův princip.

13. Použijte výsledek minulého příkladu na posloupnost 10^n.

14. $C(n)$ bude jistě maximálně 28. Pro další zjednodušení uvažte rovnici modulo 9.

15. Odhadněte, že výsledné číslo je menší než 18. Poté počítejte modulo 9.

16. Pracujte modulo 9.

17. Pracujte modulo 3.

18. Pracujte modulo 3.

19. Pomocí kongruencí modulo 3 ukažte, že jedno z prvočísel musí být tři.

Literatura a zdroje

Chtěl bych zde poděkovat Karolíně Kuchyňové, jejíž příspěvek na toto téma jsem skoro celý okopíroval.

Kvadratická reciprocita

FILIP BIALAS

ABSTRAKT. Zákon kvadratické reciprocity je zajímavá věta z teorie čísel. Jako první ji dokázal Carl Fridrich Gauss v roce 1796, který si tuto větu velmi oblíbil – za svůj život vydal hned osm různých důkazů a označoval ji za *Zlatou větu*. V tomto příspěvku si ji dokážeme a následně ji budeme aplikovat na zajímavé příklady, mimo jiné i na pár speciálních případů Dirichletovy věty.

Definice. Číslo a nazveme *kvadratickým zbytkem* modulo m, pokud existuje celé x takové, že $x^2 \equiv a \pmod{m}$. Zbylým číslům říkáme *kvadratické nezbytky.*

Definice. Nechť p je liché prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}$, pak definujeme *Legendreův symbol* $\left(\frac{a}{p}\right)$ následovně:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } p \mid a \\ +1 & \text{pokud } a \text{ je kvadratickým zbytkem a } p \nmid a \\ -1 & \text{pokud } a \text{ není kvadratickym zbytkem} \end{cases}$$

Nyní si ukážeme několik způsobů, jak můžeme spočítat, zda je něco kvadratický zbytek modulo nějaké prvočíslo, nebo ne. Třešničkou na dortu bude poté zákon kvadratické reciprocity, který dává pro různá lichá prvočísla p, q jednoduchý vztah mezi $\left(\frac{p}{q}\right)$ a $\left(\frac{q}{p}\right)$.

Tvrzení. (Eulerovo kritérium) *Nechť p je liché prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}$. Pak $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.*

Tvrzení. (Multiplikativita Legendrova symbolu) *Nechť p je liché prvočíslo a $a, b \in \mathbb{Z}$. Pak $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.*

Tvrzení. *Nechť p je liché prvočíslo, pak $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.*

Tvrzení. (Gaussovo lemma) *Ať p je liché prvočíslo a a celé číslo s ním nesoudělné. Označme n počet takových čísel $k \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, že ak dává po dělení p větší zbytek než $\frac{p}{2}$. Pak $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n$.*

Věta. (Zákon kvadratické reciprocity) *Nechť p, q jsou dvě různá lichá prvočísla. Pak* $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$.

Speciální případy Dirichletovy věty

Úloha 1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Řešení. Předpokládejme pro spor, že by jich bylo jen konečně mnoho. Označme si je $p_1, p_2, \dots, p_n$. Potom $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ je přirozené číslo větší než jedna, které dává modulo každé z prvočísel zbytek 1, takže není žádným z nich dělitelné. Tedy musí být dělitelné jiným prvočíslem, což je ve sporu s tím, že máme všechny.

Podobně a celkem jednoduše můžeme tvrzení o nekonečném počtu prvočísel dokázat i pro prvočísla vybraná, která jsou obsažena ve speciálních aritmetických posloupnostech. Musíme ale při volbě čísla, které není dělitelné žádným ze zvolených prvočísel, nějak zaručit, aby skutečně muselo být dělitelné některým dalším zvoleného tvaru a ne pouze prvočísly jinými. K tomu se nám bude hodit vypracovaná teorie kvadratických zbytků.

Obecně se dá ukázat, že v každé aritmetické posloupnosti $an + b$, kde a, b jsou nesoudělná přirozená čísla, se nachází nekonečně mnoho prvočísel. Tomuto výsledku se říká *Dirichletova věta*, její důkaz je ale bohužel příliš obtížný na to, abychom si ho zde ukázali.

Příklad 2. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k + 3$.

Příklad 3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

Příklad 4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k + 1$.

Příklad 5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 1$.

Příklad 6. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $5k + 4$.

Příklad 7. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvar $8k + 1$.

Příklad 8. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $8k + 3$.

Další příklady

Příklad 9. Ukažte, že $2^n + 1$, kde n je přirozené číslo, nemá žádné prvočíselné dělitele tvaru $8k - 1$. (Vietnam TST 2004)

Příklad 10. Dokažte, že pro všechna lichá prvočísla p je nejmenší kvadratický nezbytek menší než $1 + \sqrt{p}$.

Příklad 11. Dokažte, že neexistuje přirozené číslo a takové, že $2^a - 1$, $2^{2a+1} - 1$, $2^{4a+3} - 1$ jsou všechna prvočísla.

Příklad 12. Dokažte, že pokud prvočíslo $p \mid n^2 + n - 1$ pro nějaké přirozené n, pak $p = 5$ nebo $5 \mid p^2 - 1$.

Příklad 13. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m, n) takových, že

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1.$$

(*i*KS 4–3–N3)

Příklad 14. Nechť a je přirozené číslo, které není čtverec. Pak $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ pro nekonečně mnoho prvočísel p.

Příklad 15. Nechť $f(x)$ je kvadratický polynom s celočíselnými koeficienty takový, že pro každé prvočíslo p existuje přirozené n, pro které platí $p|f(n)$. Dokažte, že má f racionální kořeny.

Návody

2. Zvolte $4p_1p_2 \ldots p_n + 3$.

3. Zvolte $3p_1p_2 \ldots p_n + 2$.

4. Zvolte $(2p_1p_2 \ldots p_n)^2 + 1$.

5. Zvolte $(2p_1p_2 \ldots p_n)^2 + 3$.

6. Zvolte buď $(2p_1p_2 \ldots p_n)^2 - 5$, nebo $(4p_1p_2 \ldots p_n)^2 - 5$.

7. Zvolte $(2p_1p_2 \ldots p_n)^4 + 1$.

8. Zvolte $(2p_1p_2 \ldots p_n)^2 + 2$.

9. Pokud je n liché, tak vynásobte výraz dvěma, aby byl 2^n čtverec.

11. Nutně musí být i $2a + 1, 4a + 3$ prvočísla – pracujte v jejich modulu.

12. Prvočíslo p musí dělit i $4(n^2 + n - 1) = (2n + 1)^2 - 5$.

13. Odhady dojdeme k $n \equiv 0$ nebo $n \equiv 4 \mod 6$. Spočítáme, že pak pravá strana není kvadratický zbytek modulo $n + 1$.

14. Kouzlení s kvadratickou reciprocitou.

15. Stačí ukázat, že je diskriminant čtverec. Ukažte, že je kvadratický zbytek modulo každé prvočíslo, což bude spor s minulým příkladem.

Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2010.

[2] Alexandru Gica, David Hruška: *Modular Arithmetics*, Awesome Math Summer Program, Cornell University, 2017.

Kategorie

ANIČKA DOLEŽALOVÁ

ABSTRAKT. Přednáška je úvodem do teorie kategorií – abstraktní matematické teorie, kde si vystačíme s puntíky a šipkami.

Od množin ke kategorii

Základními matematickými objekty našeho světa jsou množiny. Samy o sobě jsou však poněkud chudé, zajímavé začnou být, až když se začneme zabývat zobrazeními mezi nimi. Bez zobrazení například nedokážeme měřit velikosti množin.

Tvrzení. (vlastnosti zobrazení) *Zobrazení mezi množinami můžeme skládat a toto skládání je asociativní (tj. nezáleží na uzávorkování). Každá množina A má své identické zobrazení id_A – pokud toto zobrazení složíme s jiným zobrazením f (z nebo do množiny A), obdržíme opět f.*

Pokud tyto fundamentální vlastnosti (skládání, asociativitu a existenci identit) extrahujeme a zapomeneme na množiny, dostaneme pojem kategorie:

Definice. *Kategorie* je soubor skládající se z

(i) třídy *objektů*,
(ii) třídy *šipek*.

Přitom jsou splněna následující pravidla: Každá šipka f má jednoznačně daný svůj počáteční objekt $\boldsymbol{A}$ a koncový objekt $\boldsymbol{B}$ (píšeme $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$). Pro každou dvojici šipek $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ existuje šipka $gf : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ – *složení* šipek f a g. Skládání je asociativní, neboli pro $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ a $h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ platí $(hg)f = h(gf)$. Konečně, každý objekt $\boldsymbol{A}$ má *identickou* šipku $id_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ tak, že pro každou šipku $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ platí $f id_{\boldsymbol{A}} = f$ a $id_{\boldsymbol{B}} f = f$.

Cvičení 1. Dokaž z definice kategorie, že šipka $id_{\boldsymbol{A}}$ je jednoznačná.

Příklad 2. Množiny (jako objekty) a zobrazení mezi nimi (jako šipky) tvoří kategorii.

Příklad 3. (pro čtenáře seriálu) Grupy spolu s grupovými homomorfismy tvoří kategorii.

Speciální šipky

Definice. Zobrazení $f : A \to B$ je *prosté*, pokud z $f(x) = f(y)$ plyne $x = y$. Zobrazení f je *na*, pokud obraz f je celá množina B. Pokud je f prosté i na, říkáme, že jde o *bijekci*.

Tvrzení. *Zobrazeni $f : A \to B$ je prosté, pokud platí jedna z následujících podmínek:*

(i) *Existuje zobrazení $g : B \to A$ tak, že $gf = id_A$. Této vlastnosti také říkáme, že f má levý inverz.*
(ii) *Zobrazení f můžeme „krátit zleva“, tj. pro každou množinu X a dvě zobrazení $g, h : X \to A$, pro které platí $fg = fh$, platí také $g = h$. Této vlastnosti říkáme, že f je* monomorfismus.

Obdobné tvrzení platí pro zobrazení na. Stačí pouze zaměnit slova „levý“ a „pravý“. Pokud se f dá krátit zprava, říkáme, že jde o *epimorfismus*.

Tvrzení. *Zobrazení $f : A \to B$ je bijekce právě tehdy, když existuje (tzv.* inverzní zobrazení*) $g : B \to A$ tak, že $gf = id_A$ a $fg = id_B$. Této vlastnosti říkáme, že f je* izomorfismus.

Při definici prostého zobrazení jsme využívali prvků množiny a hodnot zobrazení f na nich. Definovat v kategoriích prosté zobrazení nedává smysl, protože by se objekty musely skládat z prvků, což vůbec nemusí být pravda. Naopak pro pojmy jako pravý inverz nebo monomorfismus jsme používali pouze kategoriální pojmy – levé (resp. pravé) inverzy, monomorfismy (resp. epimorfismy) a izomorfismy definujeme tak, že v podmínkách ze dvou posledních tvrzeních nahradíme slovo „množina“ slovem „objekt“ a „zobrazení“ slovem „šipka“. Tyto pojmy tedy máme v libovolné kategorii. To, že v kategorii množin pojmy prosté-mono, na-epi, bijekce-izo souhlasí, je šťastná náhoda, která není pravidlem.

Příklad 4. Za objekty zvolme všechna reálná čísla. Pokud pro reálná a a b platí $a \geq b$, řekneme, že z a do b vede (právě jedna) šipka. Nezáleží na tom, jak ji pojmenujeme. V opačném případě mezi a a b žádná šipka nevede. Je jasné, jak se mají šipky skládat, a jednoduché ověřit, že takto obdržíme kategorii. Značíme ji $(\mathbb{R}, \geq)$. Analogicky můžeme definovat například kategorii přirozených čísel $(\mathbb{N}, \geq)$ nebo racionálních čísel $(\mathbb{Q}, \geq)$.

Cvičení 5. Najděte kategorii, ve které existuje epimorfismus, který není na.

Odbočka do eukleidovských prostorů

Definice. *Eukleidovský prostor* (*E-prostor*) dimenze n je množina všech n-tic reálných čísel spolu s operací „sčítání“: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ a operací „násobení prvku prostoru reálným číslem r“: $r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$.

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazýváme *lineární*, pokud pro každé dva body a, b prostoru $\mathbb{R}^m$ a reálné číslo r splňuje

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
(ii) $f(ra) = rf(a)$.

Cvičení 6. Identické zobrazení je lineární. Složení dvou lineárních zobrazení je lineární.

Cvičení 7. Dvojice E-prostory + lineární zobrazení vyhovuje naší definici kategorie.

Příklad 8. Lineárnímu zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ můžeme přirozeně přiřadit matici $m \times n$. Skládání zobrazení pak odpovídá obvyklé násobení matic.

Příklad 9. Pokud za objekty vezmeme přirozená čísla, šipky z m do n budou všechny matice $m \times n$ a skládání bude násobení matic, dostaneme kategorii.

Příklad 10. Pokud místo E-prostorů vezmeme všechny vektorové prostory (tedy například i ty nekonečně dimenzionální) a šipky budou opět lineární zobrazení mezi nimi, dostaneme kategorii.

Součin a kosoučin

Definice. *Součin* objektů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je objekt $\boldsymbol{C}$ spolu s šipkami $a : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{A}$ a $b : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, který splňuje „univerzální“ vlastnost: Pokud vezmeme jakýkoliv objekt $\boldsymbol{X}$ spolu s šipkami $u : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}$ a $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{B}$, existuje právě jedna šipka f z $\boldsymbol{X}$ do $\boldsymbol{C}$ tak, že $af = u$ a $bf = v$. Objekt $\boldsymbol{C}$ budeme značit $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{A} \Pi \boldsymbol{B}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dl, phantom, "\circ", shift left=6] \arrow[dr, phantom, "\circ", shift right=6] & \\
A & A \times B \arrow[l, "a"] \arrow[r, "b"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Příklad 11. Co je součin v kategorii množin?

Příklad 12. Co je součin v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$?

Příklad 13. Co je součin v kategorii E-prostorů (vektorových prostorů)?

Tvrzení 14. *Součin není definován jednoznačně, ale každé dva součiny jsou izomorfní (tj. existuje mezi nimi izomorfismus).*

Poznámka 15. Součin nemusí existovat.

Ke každému kategoriálnímu pojmu máme pojem duální, který dostaneme tak, že v definici obrátíme všechny šipky. Pokud to provedeme se součinem, dostaneme *kosoučin* alias *součet* (značíme symbolem $+$ nebo $\amalg$). Pro kategorii C označíme C^{op} tu kategorii, která má stejné objekty, ale obrácené šipky. Říkáme jí *duální kategorie.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "u"'] & A + B \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & B \arrow[l, "b"'] \arrow[dl, "v"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Příklad 16. Co je kosoučin v dosud zmíněných kategoriích?

Tvrzení. (Princip duality) *Pokud nahradíme všechny pojmy v platném tvrzení jejich duálními pojmy, dostaneme opět platné tvrzení. Jinými slovy, v teorii kategorií je vždy automaticky půl práce hotovo.*

Důsledek. *Každé dva kosoučiny jsou izomorfní.*

Součin i kosoučin se dají zobecnit pro více objektů. Jsou asociativní a komutativní až na izomorfismus.

Příklad 17. Co je součin a kosoučin (libovolné třídy objektů) v dosud zmíněných kategoriích?

Limity a kolimity

Součiny a kosoučiny vycházejí pouze z objektů. Co když bychom ale chtěli mít mezi těmito objekty ještě nějaké šipky?

Definice. (neformální) Mějme kategorii C a v ní A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A. *Kuželem* nad A a F nazveme objekt $\boldsymbol{B}$ z kategorie C a G třídu šipek z objektu B do (každého) objektu z A takové, že pro libovolná složení šipek z F a G, která dávají smysl a začínají a končí v téže objektech, jsou stejná. Analogicky definujeme *kokužel* (obrátíme šipky).

Definice. (jen trochu neformální) Mějme kategorii C, A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A. Nechť $\boldsymbol{L}$ se šipkami G je kužel nad A a F. Řekneme, že $\boldsymbol{L}$ je *limita* A a F, pokud pro libovolný jiný kužel $(\boldsymbol{X}, Z)$ nad A a F existuje v C právě jedna šipka u z $\boldsymbol{X}$ do $\boldsymbol{L}$ taková, že složením u se šipkou z G dostaneme šipku ze Z.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, "z_1"'] \arrow[ddr, "z_2"] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
 & L \arrow[dl, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Cvičení 18. Rozmyslete si, že součin je limita, kde nejsou žádné šipky mezi objekty.

Příklad 19. Uvažujme kategorii množin. Jak vypadá limita a kolimita objektů $\{A_n = \{1, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$ se šipkami $\{f_n : A_n \to A_{n+1}, f_n(k) = k, k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$?

Poznámka. Limita, podobně jako součin, nemusí nutně existovat.

Funktory

Jako nás z kategoriálního pohledu příliš nezajímají samotné množiny, ale spíš zobrazení mezi nimi, podobně je to i s kategoriemi. Proto zavádíme tzv. funktory, což jsou šipky mezi kategoriemi. Dá se říct, že funktory zprostředkovávají komunikaci mezi různými matematickými světy.

Definice. *Funktor* F mezi kategoriemi C a D je proces[1], který přiřazuje objektu $\boldsymbol{A}$ z C objekt $F(\boldsymbol{A})$ z D a šipce $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ šipku $F(f) : F(\boldsymbol{A}) \to F(\boldsymbol{B})$, přičemž zachovává skládání šipek (nezáleží, zda nejdřív šipky složíme a pak pošleme funktorem, nebo naopak) a identity.

Příklad 20. Zapomínající funktor (z kategorie E-prostorů do kategorie množin) vezme E-prostor a zapomene, že se v něm dalo sčítat a násobit prvky reálným číslem. Zbude holá množina n-tic. Obecně zapomínající funktor z kategorie nějakých „strukturovaných“ objektů, jako jsou vektorové prostory, topologické prostory nebo grupy, do kategorie všech množin přiřadí každému původnímu objektu jeho nosnou množinu (bez struktury).

[1] Čtenáři je jasné, že formálně jde o dvojici funkcí (na objektech a šipkách).

Příklad 21. Proces $\mathcal{P}$, který přiřadí množině A její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$ a zobrazení f mezi A a B přiřadí zobrazení $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), X \mapsto \{f(x), x \in X\}$, je funktor z kategorie množin do kategorie množin.

Příklad 22. Maticová reprezentace je funktor $M : Euc \to Mat$, který prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřazuje jeho dimenzi n a lineárnímu zobrazení přiřazuje odpovídající matici.

Výhoda maticové reprezentace je, že se z geometrického světa prostorů a lineárních zobrazení dostaneme do suchého světa matic, kde se ale snadno řeší problémy. Tím, že je náš vztah funktor (tj. zachovává skládání a identity), se dokázaná tvrzení snadno přenesou zpět do světa geometrie.

Teorii kategorií nyní můžeme aplikovat na sebe. Pokud totiž za objekty zvolíme kategorie[2] a za šipky funktory (je jasné, jak se budou skládat), dostaneme kategorii. Takto například dostaneme definici součinu nebo součtu kategorií.

Příklad 23. Co jsou funktory z kategorie $(\mathbb{R}, \geq)$ do $(\mathbb{R}, \geq)$?

Cvičení 24. Představme si E-prostor $\mathbb{R}^n$ jako kategorii, která má jeden objekt $*$, šipky jsou prvky $\mathbb{R}^n$ a skládání je sčítání. Co jsou potom funktory z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$? Musí být nutně lineární?

Návody

5. Každé spojité zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je jednoznačně určeno hodnotami na racionálních číslech.

17. Součin má tendenci „chovat se hezky“ při přechodu k nekonečnému součinu, kosoučin ne vždy. V kategorii množin půjde (co se objektu týče) o kartézský součin a disjunktní sjednocení, v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$ o supremum a infimum, v kategorii E-prostorů (vektorových prostorů) o kartézský součin a direktní součet prostorů (rozmyslete si, proč nemusí existovat vhodné lineární zobrazení z celého kartézského součinu tak, aby byl kosoučinem). Příslušná zobrazení jsou projekce (resp. vnoření) pro množiny i vektorové prostory a jediné možné šipky pro $(\mathbb{R}, \geq)$.

19. Jsou to množiny $\{1\}$ a $\mathbb{N}$ se zobrazením $1 \mapsto 1$, respektive s vnořením (vnímáme f_n jako zobrazení do $\mathbb{N}$).

23. Funkce, které zachovají šipky mezi každými dvěma čísly, tj. neklesající funkce.

24. Jsou to právě lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Svoboda: *Kategorie*, Uhelná Příbram, 2014.

[2] Pokud bychom vzali všechny kategorie, dostali bychom množinový paradox podobně jako s množinou všech množin. Můžeme ale vzít například všechny kategorie, které jsou nějak omezené velikostí.

Úhlení

Verča Hladíková

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní metody řešení geometrických úloh. Uvádí jejich orientované verze, které nám umožňují vyhnout se rozebírání různých konfigurací bodů v řešení. Dále obsahuje úlohy vhodné k procvičení této techniky.

Věta. (Charakterizace tětivových čtyřúhelníků) *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$ABCD$ je tětivový (má kružnici opsanou),*
(ii) *$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ (shodnost obvodových úhlů),*
(iii) *$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$.*

Věta. (O středovém a obvodovém úhlu) *Body A, B, C leží na kružnici se středem S. Pak*

$$2|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASB|.$$

Příklad. (Lemma o dvou kružnicích) Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Na kružnici k zvolme bod X a sestrojme Y jako průsečík přímky XB s kružnicí l (pokud $X = B$, pak přímkou XB myslíme tečnu ke kružnici k). Ukažte, že nezávisle na volbě bodu X má trojúhelník AXY vždy stejné vnitřní úhly.

Věta. (O úsekovém úhlu) *Nechť ABC je trojúhelník vepsaný do kružnice k a p přímka procházející bodem A. Na přímce p zvolme bod X tak, aby úhel XAB byl ostrý nebo pravý. Pak platí, že p je tečna kružnice k, právě když $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ACB|$.*

Definice. *Obloukový úhel* $|\sphericalangle \overrightarrow{AB}|$ dvou bodů A, B ležících na kružnici k je roven $|\sphericalangle AXB|$ pro libovolný bod X ležící na opačném oblouku $\overrightarrow{AB}$.

Příklad. Nechť je $ABCD$ obdélník a P bod na jeho opsané kružnici různý od jeho vrcholů. Nechť W, X, Y a Z jsou kolmé projekce bodu P na strany AB, BC, CD a DA. Ukažte, že jeden z bodů W, X, Y a Z je ortocentrum trojúhelníka tvořeného zbylými body.

Věta. (O obloukových úhlech) *Nechť k je kružnice, A, B, C, D libovolné body na ní a X průsečík AD a BC. Pokud*

(i) *X leží uvnitř kružnice k, pak $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|$,*
(ii) *X leží na polopřímce DA mimo kružnici k, pak $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{CD}| - |\overrightarrow{AB}|$,*

(iii) *X leží na polopřímce AD mimo kružnici k, pak* $|\sphericalangle AXB| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{CD}|$.

Definice. *Orientovaným úhlem* $\sphericalangle(p,q)$ dvou přímek p, q (v tomto pořadí) nazveme úhel, o který je třeba otočit p (v kladném směru – tedy proti směru hodinových ručiček), aby otočená p byla rovnoběžná s q. Dovolujeme přitom také otáčení o nulový úhel (identita) a o záporný úhel (o absolutní hodnotu tohoto úhlu v záporném směru).

Lemma. (Základní vlastnosti orientovaných úhlů) *Pro přímky p a q platí*

(i) $\sphericalangle(p,p) = 0$,
(ii) $\sphericalangle(p,q) = -\sphericalangle(q,p)$,
(iii) $\sphericalangle(p,q) + \sphericalangle(q,r) = \sphericalangle(p,r)$,
(iv) $\sphericalangle(p,q) = \sphericalangle(p,q) + k \cdot 180°$, *kde k je celé číslo,*
(v) *pokud body A, B leží na jedné kružnici se středem S, pak $\sphericalangle(AS,AB) = \sphericalangle(BA,BS)$(opačná implikace platí za předpokladu, že tento úhel není nulový).*

Můžeme tedy předpokládat, že $\sphericalangle(p,q) \in \langle 0°, 180°)$.

Lemma. *Pokud α, β, γ jsou vnitřní (neorientované) úhly trojúhelníku ABC, potom nastává jedna ze dvou možností:*

(i) $\sphericalangle(CA,AB) = \alpha$, $\sphericalangle(AB,BC) = \beta$, $\sphericalangle(BC,CA) = \gamma$;
(ii) $-\sphericalangle(CA,AB) = \alpha$, $-\sphericalangle(AB,BC) = \beta$, $-\sphericalangle(BC,CA) = \gamma$.

Důsledek. (součet úhlů v trojúhelníku) *Buďte A, B, C tři různé body v rovině. Pak*

(i) $\sphericalangle(AB,AC) + \sphericalangle(BC,BA) + \sphericalangle(CA,CB) = 180°$,
(ii) $\sphericalangle(AB,AC) = \sphericalangle(BA,BC) + \sphericalangle(CB,CA)$.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu pro orientované úhly) *Nechť body A, B, C, X leží na jedné kružnici se středem X pak*

(i) $\sphericalangle(AB,BC) = \sphericalangle(AX,XC)$.
(ii) $2 \cdot \sphericalangle(AB,BC) = \sphericalangle(SA,SC)$.

Věta. (O úsekovém úhlu pro orientované úhly) *Přímka BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $\sphericalangle(AC,CB) = \sphericalangle(AB,BC)$.*

Věta. (O tětivových čtyřúhelnících) *V rovině jsou dány 4 různé body A, B, C, D. Tyto body leží na jedné kružnici, právě když platí*

$$\sphericalangle(AC,AD) = \sphericalangle(CB,BD).$$

Příklad. (Folklor) Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_i a k_{i+1} a protínají v bodech A_i a B_i ($k_5 = k_1$). Ukažte, že pokud je A_1, A_2, A_3, A_4 leží na jedné kružnici, pak i B_1, B_2, B_3, B_4 leží na jedné kružnici.

Definice. *Obloukový orientovaný úhel* $|\sphericalangle\overrightarrow{AB}|$ oblouku AB kružnice k v kladném směru je roven $|\sphericalangle(AX,BX)|$ pro libovolný bod X leží na oblouku $\overrightarrow{BA}$.

Věta. (O orientovaných obloukových úhlech) *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a X průsečík přímek AD a BC. Pak* $|\sphericalangle(AX, BX)| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|$.

Úloha 1. Přímky p, q se protínají v bodě S. Dále jsou dány body A, B takové, že $\sphericalangle(p, SA) = \sphericalangle(SB, q)$. Paty kolmic z bodů A, B na přímku p označme postupně A_p, B_p a obdobně paty kolmic na přímku q jako A_q, B_q. Dokažte, že body A_p, A_q, B_p, B_q leží na jedné kružnici.

Úloha 2. (Miquelova věta) Je dán trojúhelník ABC. Na přímkách BC, CA, AB leží postupně body X, Y, Z. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AYZ, XBZ a XYC prochází jedním bodem.

Úloha 3. (Lemma o spirální podobnosti) Kružnice k_1 a k_2 se protínají v bodech X a Y. Přímka procházející X protíná k_1 a k_2 podruhé v A a B. Druhá přímka procházející X protíná k_1 a k_2 podruhé v C a D. Ukažte, že jsou si trojúhelníky AYC, BYD podobné.

Úloha 4. Je dán rovnoramenný trojúhelník SAC se základnou AC. Na přímkách SA, SC leží postupně body X, Z takové, že přímka XZ je rovnoběžná s přímkou AC. Buď O střed kružnice opsané trojúhelníku AZS. Ukažte, že přímky XC a SO jsou na sebe kolmé.

Úloha 5. (Švrčkův bod) V trojúhelníku ABC označme $\check{S}$ druhý průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu A s kružnicí opsanou ABC. Dále označme $\check{S}'$ druhý průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu A s kružnicí opsanou. Nakonec označme středy kružnic připsaných ke stranám BC, CA, AB postupně I_a, I_b, I_c a střed kružnice vepsané I. Dokažte

(i) $|\check{S}B| = |\check{S}C| = |\check{S}I| = |\check{S}I_a|$,
(ii) $|\check{S}'B| = |\check{S}'C| = |\check{S}'I_c| = |\check{S}'I_b|$.

Úloha 6. Buď H průsečík výšek trojúhelníku ABC a H' obraz H v osové souměrnosti podle přímky AB. Dokažte, že H' leží na kružnici opsané ABC.

Úloha 7. Skrz průsečík výšek H trojúhelníku ABC vedeme přímku p. Označme p_a, p_b osové obrazy přímky p podle přímek BC, CA. Dokažte, že se přímky p_a, p_b protínají na kružnici opsané.

Úloha 8. (Simsonova přímka) Buď P bod na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokažte, že paty kolmic z P na strany trojúhelníka (3 body) leží v jedné přímce.

Přímka z předchozí úlohy se nazývá Simsonova přímka trojúhelníku ABC vzhledem k bodu P.

Úloha 9. Jsou dány body A, B, C, P na jedné kružnici. Kružnice k se dotýká přímky PA v bodě A a prochází bodem B. Druhý průsečík této kružnice s přímkou AC označme X. Dokažte, že přímka BX je kolmá na Simsonovu přímku trojúhelníku ABC vzhledem k bodu P.

Úloha 10. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť D, E, F paty výšek z vrcholů A, B, C. Jeden z průsečíků EF s kružnicí opsanou troúhelníku ABC označme P. Průsečík přímek BP a DF označme Q. Ukažte, že $AP = AQ$.
(IMO Shortlist 2010)

Úloha 11. Na stranách trojúhelníka ABC leží postupně body P, Q, R. Nechť k_A, k_B a k_C jsou kružnice opsané trojúhelníkům AQR, BRP, CPQ. Jsou-li X, Y a Z druhé průsečíky AP s k_A, k_B a k_C, pak ukažte, že $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$. (USAMO 2013)

Úloha 12. Nechť MN je přímka rovnoběžná se stranou BC trojúhelníku ABC, tak že $M \in AB$ a $N \in AC$. Přímky BN a CM se protínají v P. Kružnice opsané trojúhelníkům BMP a CNP se podruhé protínají v Q. Ukažte, že $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAP|$.
(Balkán 2009)

Úloha 13. Kružnice k_1 a k_2 se protínají v bodech P a Q. Nechť AC a BD jsou takové tětivy kružnic k_1 a k_2, že přímky AB a CD se protínají v P. Přímky BD a AC se protínají v X. Y je bod na k_1 takový, že $PY \parallel BD$. Z je bod na k_2 takový, že $PZ \parallel AC$. Ukažte, že body Q, X, Y, Z leží na jedné přímce. (USA TST 2007)

Úloha 14. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí opsanou k. Nechť l je libovolná přímka v rovině a l_A, l_B, l_C obrazy l podle úseček BC, CA,AB. Nechť $A'B'C'$ je trojúhelník určený přímkami l_A, l_B, l_C.

(i) Ukažte, že střed kružnice opsaný trojúhelníku $A'B'C'$ leží na k.
(Irán 1995)

(ii) Předpokládejme, že l je tečna k. Ukažte, že kružnice opsaná $A'B'C'$ se dotýká kružnice k. (IMO 2011/6)

Návody

1. Najdi tětivové čtyřúhelníky.

2. Najdi obvodové úhly a využij součet úhlů v trojúhelníku.

3. Využij velikost vedlejšího úhlu v tětivovým čtyřúhelníku.

4. Použij středové a obvodové úhly.

5. (i) Osy úhlů jsou na sebe kolmé.
(ii) Využij obvodové úhly.

6. Vyúhli.

7. Použij obloukové úhly.

8. Využij velikost vedlejších úhlů v tětivových čtyřúhelnících.

9. Použij větu o úsekových úhlech.

10. Ukaž, že APFQ je tětivový čtyřúhelník.

11. Použij lemma o spirální podobnosti.

12. Najdi tětivové čtyřúhelníky a použij spirální podobnost.

13. Ukaž, že XQAC je tětivový čtyřúhelník.

Literatura a zdroje

[1] Martin Tancer: *Orientované úhly*, Prudka, 2002.
[2] Mirek Olšák: *Orientované úhlení*, Domašov, 2012.
[3] Michal 'Kenny' Rolínek: *Angle chasing*, Dobrá voda, 2010.
[4] Titu Andreescu a Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2011.
[5] Evan Chan: *http://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf*

Metrické prostory a kompaktnost

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek shrnuje vybrané základní poznatky o metrických prostorech. Jeho závěrečná část je věnována kompaktnosti a jejím aplikacím.

V reálném světě, natož pak v tom matematickém, potřebujeme velmi často „měřit vzdálenost“. To znamená pro nějakou hromadu věcí vědět, jak jsou od sebe daleko. Každého asi bez přemýšlení napadne klasická (*eukleidovská*) vzdálenost po přímce, která je např. v rovině daná vzorcem z Pythagorovy věty, tedy

$$d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Je ale mnoho jiných přirozených způsobů, jak měřit vzdálenost. Například při cestování nás daleko víc než vzdálenost „vzdušnou čarou“ zajímá čas, který cestováním strávíme. Tedy efektivní vzdálenost $d_t(A, B)$ míst A a B je pro nás nejkratší čas, za který jsme schopni se pomocí nějaké kombinace dopravních prostředků dostat z místa A do místa B. Jistě sami vymyslíte mnoho dalších rozumných způsobů měření vzdálenosti. Abychom se mohli pustit do pořádné matematické teorie o všech takových způsobech, zadefinujeme si zobecněnou vzdálenost[1] neboli *metriku* . Budeme požadovat následující:

Definice. *Metrikou* na množině X rozumíme funkci $\varrho : X \times X \to \langle 0, \infty)$ splňující

(i) $\varrho(x, y) = 0$, právě když $x = y$,
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ pro všechna $x, y, z \in X$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici (X, ϱ) pak nazveme *metrickým prostorem.*

Metrický prostor je tedy množina (tzv. *nosná*), pro kterou jsme schopni říct, jak daleko od sebe jsou její libovolné dva body.

Příklady.

(i) Asi nejběžnější metrikou na[2] $\mathbb{R}^n$ je již zmíněná *eukleidovská*, která odpovídá

[1] Samotné slovo „vzdálenost“ bývá zpravidla vyhrazeno té eukleidovské.

[2] Nevěříte-li na více než trojrozměrné prostory, můžete u nich alespoň na této přednášce klidně zůstat.

vzdálenosti, na kterou jsme zvyklí:

$$\varrho_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Jinou možnou metrikou je *manhattanská* či *newyorská*:

$$\varrho_1(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|,$$

nebo *maximová*:

$$\varrho_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\dots,|x_n-y_n|\}.$$

Indexy 1, 2 a ∞ nejsou jediné použitelné a i funkce

$$\varrho_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p+\cdots+|x_n-y_n|^p}$$

je metrikou na $\mathbb{R}^n$ pro $p \in \langle 1,\infty)$.

(ii) Na množině všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$, kterou značíme $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$, máme také maximovou[3] metriku:

$$\varrho_{\max}(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)-g(x)|.$$

(iii) Na úplně každé neprázdné množině můžeme definovat *diskrétní metriku* předpisem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=y,\\ 1 & \text{jinak.}\end{cases}$$

(iv) Buď G konečný souvislý graf, V množina jeho vrcholů. Pro $u,v\in V$ můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako délku nejkratší cesty z u do v v G.

(v) Označme ještě E množinu hran grafu G. Každou hranu $e\in E$ „ohodnotíme“ nějakým kladným reálným číslem $f(e)$. Je-li C cesta v G používající hrany $e_1,e_2,\dots,e_n$, pak její *ohodnocenou délkou* nazveme číslo $f(e_1)+f(e_2)+\cdots+f(e_n)$. Pro $u,v\in V$ pak můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako nejmenší možnou ohodnocenou délku cesty z u do v.

Cvičení. Ověřte, že uvedené příklady jsou skutečně metrikami.

Cvičení. Na políčkách šachovnice 8×8 uvažme pro každá dvě pole nejmenší počet tahů, které musíme udělat králem, resp. dámou/věží/koněm/střelcem, abychom figuru přemístili z jednoho pole do druhého. Ve kterých případech jde o metriku? Jak tato metrika souvisí s metrikami uvedenými výše?

Cvičení. Uveďte příklad nějaké metriky na sféře nebo jiném zakřiveném povrchu.

[3] Maximum existuje, viz kapitolu o kompaktnosti.

Koule v metrickém prostoru

Běžná definice koule dává smysl v každém metrickém prostoru, ale už vůbec nemusí být tak hezky kulatá, jak jsme zvyklí.

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$ a $r \in (0, \infty)$. Množinu

$$B(x, r) = B_\varrho(x, r) = \{y \in X : \varrho(x, y) < r\}$$

nazveme *(otevřenou) koulí* se středem v x a poloměrem r.

Cvičení. Jak vypadají jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$ se středem v nule při metrikách ϱ_1, ϱ_2, a ϱ_∞? Ukažte souvislost s tvrzením $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1(x, y) \geq \varrho_2(x, y) \geq \varrho_\infty(x, y)$.

Cvičení. (Podivné, ale poučné) Najděte metrický prostor a v něm kouli, která vypadá jako trojúhelník, nebo jako množina racionálních čísel, nebo třeba jako slon.

Definice. Je-li (X, ϱ) metrický prostor, pak množině $Y \subset X$ s metrikou ϱ říkáme *podprostor* metrického prostoru (X, ϱ) a značíme (Y, ϱ).

Topologie v metrickém prostoru

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subseteq X$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $x \in G$ existuje $r \in (0, \infty)$ takové, že $B_\varrho(x, r) \subseteq G$. Řekneme, že množina $F \subseteq X$ je *uzavřená*, pokud je $X \setminus F$ otevřená.[4]

Příklad. Jak lze vytušit z terminologie, v $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou jsou otevřené intervaly otevřené, analogicky uzavřené intervaly jsou uzavřené. Nejde ovšem o všechny otevřené, resp. uzavřené množiny!

Cvičení. V $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou najděte množinu, která není otevřená, ani uzavřená.

Příklad. V metrických prostorech $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ jsou otevřené přesně ty samé množiny – to platí díky nerovnosti

$$\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq \varrho_1(x, y) \leq n \cdot \varrho_\infty(x, y).$$

Cvičení. Popište všechny otevřené množiny v prostoru s diskrétní metrikou.

Věta. (Vlastnosti otevřených množin)

(O1) *Celý prostor a prázdná množina jsou otevřené množiny.*

[4] Značení otevřených a uzavřených množin vychází z německého slova *geöffnet* a francouzského *fermé*.

(O2) *Sjednocení (libovolně velkého) systému otevřených množin je otevřená množina.*
(O3) *Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.*[5]

Cvičení. Ukažte, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin již nemusí být otevřenou množinou.

Cvičení. Zformulujte analogická tvrzení pro uzavřené množiny.

Konvergence a spojitost v metrických prostorech

Úmluva. Ne vždy budeme značit metrický prostor formálně jako dvojici (X, ϱ). Pokud je na X nějaká velmi standardní metrika (zpravidla eukleidovská na $X = \mathbb{R}^n$), budeme psát jen X.

Teď už se dostáváme k jádru toho, čemu se říká *matematická analýza*. Nejprve se smíříme s faktem tak fundamentálním, že přímo souvisí s tím, co jsou vlastně reálná čísla přesně zač.

Definice. *Supremem (resp. infimem)* shora (resp. zdola) omezené množiny $M \subset \mathbb{R}$ nazveme nejmenší (resp. největší) takové číslo $a \in \mathbb{R}$, že kdykoliv $b \in M$, potom už $b \leq a$ (resp. $b \geq a$). Značíme $a = \sup M$ (resp. $a = \inf M$).

Tvrzení. *Každá shora (zdola) omezená podmnožina reálných čísel má supremum (resp. infimum).*

Pomocí infima můžeme například definovat vzdálenost dvou množin (speciálně také bodu od množiny).

Definice. Pro (X, ϱ) metrický prostor a $A, B \subset X$ definujeme

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \varrho(a, b).$$

Většinou se následující pojmy definují nejprve pro reálná čísla a reálné funkce a až zpětně se zobecňují. My ale konkrétní strukturu reálných čísel nepotřebujeme (s výjimkou axiomů metriky samotné) a definujeme vše rovnou pro obecné metrické prostory.

Definice. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z metrického prostoru (X, ϱ) má *limitu* x (resp. *konverguje* k x), pokud platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Má-li posloupnost limitu, nazývá se *konvergentní.*

Tvrzení. *Množina F v metrickém prostoru (X, ϱ) je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z F je $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$ (neformálně, z uzavřené množiny nelze „vykonvergovat ven“). Ekvivalentně, množina F je uzavřená, právě když pro každé $x \in X$ platí implikace $(\varrho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F)$.*

[5] Odtud snadno plyne, že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Cvičení. Dokažte, že posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Cvičení. Dokažte, že v $\mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Jako příklad silně netriviálního použití pojmu konvergence uvedeme následující větu, která tvrdí, že spojitou reálnou funkci na uzavřeném intervalu umíme libovolně přesně aproximovat polynomem.

Věta. (Weierstrassova) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ existuje posloupnost polynomů $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f = \lim_{n\to\infty} p_n$, kde limitu uvažujeme v maximové metrice.*

Pokud už jste setkali s pojmem „spojitosti", ale rozčilovalo vás, že vám nikdo nebyl schopen pořádně říct, co to je, tak jste se konečně dočkali.

Definice. Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *spojitá v bodě* $x \in X$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$ splňující $\varrho(x,y) < \delta$ platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Je-li f spojitá v každém bodě X, pak řekneme, že je *spojitá*.

Řečeno slovy, funkce je spojitá v bodě x, pokud body blízko x zobrazí na body blízké $f(x)$, kde to druhé „blízko" je libovolně přesné. Ještě jinak, spojitá funkce „netrhá" prostor, na kterém je definovaná. Například pro reálnou funkci se intuitivně říká, že je spojitá, pokud její graf lze nakreslit bez zvedání tužky z papíru.

Cvičení. Dokažte, že při značení jako výše je f spojitá v $x \in X$, právě když pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z X platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Řečeno méně formálně, funkce je spojitá, pokud „zachovává limity posloupností".

Cvičení. Dokažte, že na (X,ϱ) jsou funkce

(i) $id\colon X \to X$, $id(x) = x$,
(ii) $f_a\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \varrho(x,a)$ pro nějaké $a \in X$

spojité.

Cvičení. Uveďte příklady reálné funkce (tedy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), která je

(i) spojitá,
(ii) nespojitá,
(iii) nespojitá všude až na jeden bod.

Tvrzení. *Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Funkce $f\colon X \to Y$ je spojitá právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subseteq Y$ je vzor této množiny v f (tj. množina $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$) otevřená množina v X.*

Poznámka. Uvedená věta naznačuje, že pojem spojitosti funkcí není nijak hluboce závislý na konkrétních metrikách, které na množinách máme, rozhodující je pouze informace, které množiny jsou v daných prostorech otevřené. Tato skutečnost je motivací pro pojem struktury ještě obecnější, než je metrický prostor, tzv. *topologického prostoru*.

Kompaktnost

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá *kompaktní*, pokud z každého jeho pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí.

Tato abstraktní podmínka zatím asi nezní příliš intuitivně, ale její užitečnost spočívá v tom, že je ekvivalentní překvapivě mnoha „jiným“ vlastnostem metrického prostoru.

Věta. (O kompaktnosti) *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *(X, ϱ) je kompaktní.*
(ii) *Každý soubor uzavřených množin, z nichž každých konečně mnoho má neprázdný průnik, má (celý) neprázdný průnik.*
(iii) *Každá nekonečná množina $M \subset X$ má hromadný bod v X (bod $x \in X$ se nazývá hromadným bodem množiny M, jestliže $\varrho(x, M \setminus \{x\}) = 0$).*
(iv) *Z každé posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z X lze vybrat konvergentní podposloupnost.*
(v) *Každá spojitá funkce $f\colon (X, \varrho) \to \mathbb{R}$ nabývá svého maxima a minima.*

Poznámka. Kompaktnost jsme definovali pro celý prostor, ale je snadné ji dodefinovat pro $M \subset X$. Řekneme, že $M \subset X$ je *kompaktní*, pokud podprostor (M, ϱ) je kompaktní.

V $\mathbb{R}^n$ je situace ještě jednodušší.

Věta. (Heine-Borel-Lebesgue) *Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená (tzn. vejde se do nějaké koule).*

Příklad. Následující množiny jsou kompaktní:

(i) $\langle a, b\rangle$ v $\mathbb{R}$,
(ii) čtverec v $\mathbb{R}^2$,
(iii) kružnice v $\mathbb{R}^2$,
(iv) libovolná konečná množina v (X, ϱ).

Příklad. Následující množiny **ne**jsou kompaktní:

(i) $\mathbb{R}$ (v $\mathbb{R}$ samotném),
(ii) (a, b) v $\mathbb{R}$,
(iii) $\langle 0, \infty)$ v $\mathbb{R}$,
(iv) $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$,
(v) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ v $\mathbb{R}^2$.

Další vlastnosti a aplikace

Úloha 1. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní, tzn. je-li (X, ϱ) kompaktní a $f\colon (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ je spojitá, pak $f(X)$ je kompaktní v (Y, σ).

Úloha 2. Dokažte, že ze všech trojúhelníků s vrcholy na dané kružnici mají největší obsah ty rovnostranné.

Úloha 3. Najděte v $\mathbb{R}^2$ dvě disjunktní uzavřené množiny s nulovou vzdáleností. Může být alespoň jedna z nich kompaktní?

Úloha 4. Aktivista se vydal do lesa hlídat stromy. Stoupl si mazaně na takové místo, že viděl strom v každém směru kolem sebe. Mohou vždy špatní a zkažení dřevorubci pokácet všechny stromy až na konečný počet tak, aby aktivista stále viděl v každém směru strom? Předpokládejte, že aktivista je bod v rovině a stromy jsou libovolně rozmístěné a libovolně velké kruhy.

Úloha 5. Uvažme potrubí (orientovaný graf ohodnocený kapacitami trubek) s jedním vstupem (většinou se mu říká *zdroj*) a jedním výstupem (*stokem*). Dokažte, že existuje maximální tok. (*Tok* je ohodnocení hran skutečnými průtoky, pro které má každý vrchol kromě zdroje a stoku součet nula.)

Úloha 6. Hodíme-li plán Prahy v Praze na zem, bude právě jeden jeho bod ležet přesně na svém obrazu. Formálněji, je-li (K, d) kompaktní prostor a $f\colon K \to K$ spojitá funkce splňující pro každé $x, y \in K,\ x \neq y$ nerovnost $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, pak existuje právě jedno $x \in K$ takové, že $f(x) = x$. Platí to i pro neostrou nerovnost?

Úloha 7. Kuchař spojitě zamíchal kompaktní guláš. Dokažte, že nějaký kus guláše skončil přesně tam, kde byl před zamícháním. Formálněji, nechť $f\colon K \to K$ je spojitá a K kompaktní. Dokažte, že pak existuje $\emptyset \neq A \subset K$, že $f(A) = A$.

Úloha 8. (Těžká čokoládová) Dokažte, že je-li (K, d) kompaktní prostor a $f\colon K \to K$ spojitá funkce splňující pro každé $x, y \in K$ nerovnost $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$, pak f je na, neboli $f(K) = K$.

Návody

1. Použijte definice.

2. Kružnice je kompaktní.

3. Hyperbola s asymptotou; nemůže.

4. Kružnice je kompaktní.

5. Součin intervalů je kompaktní a velikost toku v závislosti na průtocích jednotlivými trubkami je spojitá.

6. Funkce $d(x, f(x))$ je spojitá.

7. Funguje $A \cap f(A) \cap f(f(A)) \cap \dots$

8. Využijte výsledek úlohy s kuchařem.

Literatura a zdroje

[1] Alexander „Olin“ Slávik: *Prostory metrické a jiné*, Blansko-Obůrka, 2011.
[2] Martin Tancer: *Metrické prostory*, Loučná, 2003.

Jak odhadnout nepředstavitelné – Fermiho problémy

Jan Kadlec

Abstrakt. Enrico Fermi byl jeden z nejvýznamnějších fyziků a matematiků minulého století. Mezi mnohým proslul též rychlým řešením problémů velmi náročných na představu, jako například jak velkou plochu bychom pokryli krabicemi od pizzy, kterou zkonzumují Američané za rok, jaká je hmotnost všech proteinů v buňce či kolik ladičů pián je v Chicagu. Podobné otázky jsou oblíbené v přijímacích testech společností jako Google. V přednášce si ukážeme, jak k těmto problémům přistupovat, jak odhadovat, a to nejen výsledek, ale i chybu.

Enrico Fermi mimo jiné pracoval na vývoji atomového reaktoru a atomové bomby za druhé světové války. Legenda praví, že z pouhého hození papírové kuličky na stůl byl schopen předpovědět sílu výbuchu atomové bomby. Jeho výsledek 10 kt TNT oproti skutečné síle 20 kt TNT je vskutku impozantní. Podobné odhady se dají využít všude, kam se jen podíváme, a mnohdy nám ušetří mnoho času s rozhodováním či například s výběrem vhodné metody pro provedení experimentu a měření (třeba na měření délky dálnice si nevezmeme milimetrové pravítko). Jak se dá k takovému odhadu dospět? Nejprve se podíváme na to, jak k takovým problémům přistoupit, a určíme první pomocné body.

(1) **Napiš řešení** – tedy, zamysli se nad rozumně blízkým řešením. Stačí, když odhadneš řešení s chybou jednoho řádu. Uveďme si příklad.

   Příklad. Jdeš nakupovat a máš stokorunu, kterou jsi ochoten utratit za dobrý oběd. Když uvidíš (dobrý) oběd za 50, okamžitě ho koupíš. Když za 500, určitě si ho nekoupíš. Pouze tehdy, když bude cena někde okolo té, kterou jsi ochoten zaplatit, budeš váhat. Obvykle nám tedy stačí odhadnout řešení řádově.

(2) **Rozděl a panuj!** Úlohu si rozděl na více částí, každou odhadni zvlášť s chybou do jednoho řádu a poté jednotlivé části spoj.

   Úloha. Kolik je v buňce proteinů? K této úloze se vrátíme později a právě na ní si budeme princip rozděl a panuj ukazovat (ale můžete se zamyslet už nyní :-)).

(3) Urči **horní a dolní hranice.**

(4) A následně je využij k dobrému odhadu pomocí **geometrického průměru**.
(5) **Porovnej svůj výsledek.** Často je možné najít nějakou podobnou úlohu, vždy se dá vrátit zpět a podívat se – je můj výsledek příliš malý? Příliš velký? Akorát?
(6) Nebo ho odhadni jinak. **Vždy je více cest.**
(7) **Odhadni chybu.** Vždy chceme vědět, jak moc se můžeme mýlit.

Ale ještě předtím pár pomůcek, abychom se v tom dobře orientovali.

Zápis čísel pomocí mocnin

Budeme pracovat s velkými a velmi malými čísly, a proto je výhodné přepsat vše ve formě násobku čísla a mocniny 10. Při jejich násobení (dělení) pak jen sečteme (odečteme) mocniny desítky a vynásobíme (vydělíme) číslo (koeficient). Pár příkladů takto zapsaných čísel, jež se nám budou hodit:

(1) Avogadrovo číslo (udává počet částic v jednom molu látky) – $N_A = 6 \cdot 10^{23}$
(2) Počet obyvatel USA – $3 \cdot 10^8$
(3) Počet obyvatel ČR – 10^7
(4) Vzdálenost Země od Slunce v metrech – $1,5 \cdot 10^{11}$.

Počítání geometrického průměru

Definice. Geometrický průměr a dvou čísel b a c je definován jako: $a = \sqrt{b \cdot c}$.

Při odhadech budeme často používat geometrického průměru. Dá se ukázat, že tato metoda dává dobré výsledky, ale pro tuto přednášku je to příliš komplikované. Navíc s její pomocí je nám vyjádření chyby bližší – výsledek může být dvakrát menší/větší a ne o $\pm$ nějaké číslo. Další neméně důležitou věcí je, že mnoho závislostí v přírodě je logaritmických, dává log-normální rozdělení. A i s tím si geometrický průměr poradí. Důkazy opět dalece přesahují nejen rozsah, ale i účel naší přednášky.

Jeho počítání si rozdělíme na dva případy:

(1) Po násobení je mocnina u desítky sudá. Pak jen zprůměrujeme pomocí aritmetického průměru koeficienty a mocniny.

Příklad. Geometrický průměr $2 \cdot 10^2$ a $3 \cdot 10^4$ je přibližně $\frac{2+3}{2} \cdot 10^{\frac{2+4}{2}} = 2,5 \cdot 10^3$. Přesná hodnota je 2449, tedy odhad je to velmi dobrý.

(2) Po násobení je mocnina u desítky lichá. Od mocnin odečteme jedničku, koeficienty vynásobíme třemi a pak stejně jako u (1).

Příklad. Geometrický průměr $2 \cdot 10^3$ a $3 \cdot 10^4$ je přibližně $\frac{2+3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{\frac{3+4-1}{2}} = 7,5 \cdot 10^3$. Přesná hodnota je 7746.

A hurá na problémy!

Úloha. (Rozehřívací.)
Šance, že vyhrajete loterii, je jednu ku sto milionům. Jak vysoký by byl štos, kdybyste losy pokrývající všechny možnosti poskládali na sebe?

Malá anketa na procvičení představivosti:

(1) Jako Sněžka (1600 m).
(2) Jako Mount Everest (10000 m).
(3) Poloměr Země (10^7 m).
(4) Vzdálenost na Měsíc (10^8 m).

Řešení. K vyřešení potřebujeme znát dvě informace – kolik je losů a jak je jeden los tlustý. Za předpokladu, že vyhrává jen jeden los, máme 10^8 možností, tedy losů.
Jak tlustý je jeden los? Pojďme to odhadnout. Balík papíru (500 ks) má asi 5 cm. Losy však bývají o něco tlustší. Zkusme karty. Balíček 32 karet má asi 1 cm. Tedy:

$$t = \frac{1\,\mathrm{cm}}{32\,\mathrm{losů}} = 0{,}03\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{los}} = 3\cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{los}}$$
$$\text{výška} = 3\cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{los}}\cdot 10^8\,\mathrm{losů}$$
$$\text{výška} = 3\cdot 10^{4}\,\mathrm{m}$$

To je asi 30 km. Třikrát výše, než normálně létají dopravní letadla!

Příklad 1. (Klasika.) Kolik ladičů pián je v Praze (nebo v Londýně nebo ve Tvém městě)?

Příklad 2. Kdyby se vyroloval veškerý toaletní papír použitý za rok v ČR, jak dlouhou lajnu by vytvořil?

Příklad 3. Kolik plechovek džusu potřebuješ vypít, abys dočerpal energii nutnou na výstup „průměrné hory“?

Příklad 4. Kolik váží trilion Kč? Vyjádři, když je to trilion v bankovkách, mincích, zlatě, hodinách otrocké práce …

Na následující úloze si procvičíme, jak se dívat na problém z různých stran.

Úloha. Jakou plochu bychom pokryli se všemi krabicemi od pizz, které Američané sní za rok?

Rozděl a panuj (a odhadni chybu)

Vyřešme následující problém a pak se vraťme zpět a odhadněme chybu.

Úloha. Kolik proteinů je v bakteriální buňce (E. Coli)?

Řešení. Předtím, než začneme řešit, si pojďme opět tipnout. Tentokrát bez možností ;-).

Řešení si opět rozdělíme na menší kroky a u každého se pokusíme o odhad chyby. Rozdělení je následující:

(1) Velikost buňky – jak velká je buňka?
(2) Hmotnost buňky – jaká je hustota buňky (pozor na jednotky)? Přejděme nyní na jiné, užitečnější jednotky, na Daltony (Da).

Definice. (*Dalton)* Jeden Dalton odpovídá hmotnosti vodíkového atomu. Dále platí, že 1 g je roven součinu Avogadrova čísla a hmotnosti 1 Da.

A udělejme první aproximaci, $N_A \doteq 10^{24}$.

(3) Hmotnost proteinů – jakou chybu děláme? Jakou hmotnost zabírají proteiny? Co tvoří největší část, nejvíce hmotnosti?
(4) Počet proteinů – kolik váží jeden protein? Je složen z aminokyselin (AK), kolik AK má asi jeden protein a kolik váží jedna AK? Stačí už nyní jen vydělit hmotnost všech proteinů hmotností jednoho.

Pojďme zpět a podívejme se na chyby. První je velikost, dále počet AK, zastoupení proteinů v sušině, ... Vezměme to odzadu. Jak moc přispívají proteiny do hmotnosti? Zde jsou reálné hodnoty mezi 0,1 až 0,2. Počet AK je další velkou nepřesností, ale pohybujeme se v oblasti dvojnásobku, tedy reálně mezi 100 až 500, což je obojí docela malá chyba. Co objem? To může být problém, neboť se spoléháme na rozměr a objem roste s jeho třetí mocninou. Přesněji tedy můžeme rozdělit námi získanou informaci a vztáhnout ji pouze na objem jednoho mikrometru krychlového.

Příklad 5. (Rozšíření předchozí) Kolik molekul mRNA je v této buňce?

Příklady

Příklad 6. Kolik lidí právě teď telefonuje nebo píše zprávu na svém mobilu?

Příklad 7. Kolik je na Zemi stromů?

Příklad 8. Kolik buněk je v lidském těle? A co obecný organismus?

Příklad 9. Vraťme se na chvilku k předchozímu příkladu. Při odběru krve Ti řekli, že počet červených krvinek ve Tvém vzorku je 4–6 milionů na mikrolitr krve. Porovnej jen odhad červených krvinek s výsledkem předchozího příkladu. Kde je problém?

Příklad 10. Kolik židlí se za rok prodá v ČR?

Příklad 11. Jak dlouho stráví voda v atmosféře, než opět spadne na zem?

Trošku těžší

Příklad 12. Jaký je průměrný počet nohou zvířat? Za zvířata považuj obratlovce i bezobratlé.

Příklad 13. Jaká je orbitální rychlost Země kolem Slunce? A její kinetická energie?

Příklad 14. Jaký je objem všech na Zemi člověkem postavených struktur (budov, domů, aut, ...)?

Návody

1. Kolik je obyvatel ve městě? Kolik pián je na obyvatele? Kolikrát za rok je piáno laděno? Kolik času zabere naladění piána? Kolik hodin pracuje ladič za rok?

2. Kolik toaletního papíru denně/rolí za měsíc potřebuješ? Kolik žije lidí v ČR?

3. „Průměrná hora" je vyšší než budova a nižší než Mt. Everest. Změna potenciální energie je dána vzorcem $E = mgh$, kde m je hmotnost tělesa, g gravitační zrychlení $\doteq 10\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ a h je výška/vzdálenost, o kterou se v potenciálním poli posouváme. Jakou energetickou hodnotu má taková 330 ml plechovka?

4. Kolik je to bankovek/mincí a kolik váží jedna? Jakou hodnotu má zlato? Hustota zlata je $20\ \mathrm{t}/\mathrm{m}^3$.

5. Z počtu proteinů využij produkční rychlost proteinů (délka jednoho buněčného cyklu je v rozmezí 30 min a 1 h, použij 3000 s, a rychlost je počet za čas) a následně rychlost produkce protein/mRNA (rychlost je 0,1-1 prot/mRNA/s).

6. Kolik lidí je na světě? Kolik času/jakou frakci tráví lidé denně psaním či voláním?

7. Jak velkou plochu zabírá souš? Kolik je asi stromů na 1 km^2?

8. Jak velké je lidské tělo a jak velká je eukaryotická buňka?

9. V žilách nám obvykle koluje kolem 5 l krve.

10. Kolik židlí „vlastníš" – na kolika sedíš? Jak často svou židli/své židle měníš?

11. Jaký je odpar vody na Zemi za rok? Kolik vody je v atmosféře? Ustálený stav říká, že je stejný přísun vody do atmosféry jako z atmosféry. Jak často tedy prší?

12. Jaký je průměrný počet nohou obratlovců? A co bezobratlých?

Bezobratlí – hmyzu je opravdu hodně, asi 10^{18}, ovšem červíků je ještě více. Členovců kolem 10^{18}, planktonu 10^{19-20}, hlístů, háďátek a tak podobně asi 10^{20}.

13. Jaká je doba oběhu a jaká je délka?

Jaká je hmotnost Země? Poloměr je asi 6000 km, hustota je větší než vody (1000 kg/m^3) a menší než železa (8000 kg/m^3). Jeden rok má $\pi \cdot 10^7$ s.

14. Budovy dominují. Jak velká jsou místa, kde lidé žijí, a jak velká ta, kde pracují?

Literatura a zdroje

[1] Lawrence Weinstein, John A. Adam: *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*, Princeton University Press, 2009.

[2] Lawrence Weinstein: *Guesstimation 2.0: Solving Today's Problems on the Back of a Napkin*, Princeton University Press, 2012.

[3] John Harte: *Consider A Spherical Cow: A Course in Environmental Problem Solving*, University Science books, 1988.

[4] Ron Milo, Rob Phillips: *Cell biology by the numbers*, Garland Science, 2015.

[5] Yinon M. Bar-On, Rob Phillips, Ron Milo: *The Biomass Distribution on Earth*, ještě nepublikováno, článek + SI.

[6] Ron Milo: *Course cell biology by the numbers*, Weizmann Institute, Israel, 2013.

[7] Luis Villazon: *What is the average number of legs for an animal?*, *http://www.sciencefocus.com/qa/what-average-number-legs-animal*

Hledání extrémů

Bára Kociánová

Abstrakt. Najít minimum nebo maximum je úkolem v mnohých problémových úlohách a bohužel je také zdrojem jedné z nejčastějčích úvahových chyb při důkazu. Proto si ukážeme několik příkladů, jak dokázat nalezení extrému správně. Úlohy uvedené v tomto příspěvku mají jinak jen málo společného: prostě se v nich hledá nějaký extrém.

Úloha. (Motivační) Kolik koňů je možné naskládat na klasickou šachovnici 8×8, aby se vzájemně neohrožovaly?

Řešení. (Špatné) Vezmeme osm koňů a dáme je do prvního řádku šachovnice. Pak vyškrtáme políčka, která musí zůstat prázdná, a zjistíme, že jsou to následující dva řádky. Do čtvrtého umístíme dalších osm koňů a zopakujeme postup. Vyjde nám, že na šachovnici můžeme koně umístit do tří celých řádků, a dohromady máme tedy dvacet čtyři koňů. A to je maximum, protože jsme postupovali nejlepším možným způsobem, abychom jich na šachovnici dostali co nejvíc. Víc jich už být nemůže. Tečka.

Proč je řešení špatně? Jak uvidíme, dává nesprávnou odpověď. Důležitější ale je, že tvrdí, že nějaký řešitelem vybraný způsob umisťování figurek je nejlepší možný. Není to pravda. A i kdyby náhodou byla, muselo by se to dokázat, a to pořádně.

Řešení. (Stále špatné) Umístíme koně na jednu diagonálu. Vyškrtáme políčka, která nějaký kůň ohrožuje. Všimneme si, že diagonály „ob jedna vedle“ zůstaly volné, tak na ně umístíme další koně. Podobným postupem dokážeme umístit koně na všechna políčka každé druhé diagonály, kterých je dohromady 32. To je tedy maximum. Tečka.

Proč je toto řešení špatné? Našlo sice správný výsledek, ale špatnou úvahou. Podobně jako v předchozím případě si jen tak myslí, že zrovna tohle je nejlepší taktika na umisťování koňů. Ale vůbec neříká, proč by to měla být pravda. Co kdybychom začali na vedlejší diagonále, nepostavili bychom tam těch koňů náhodou víc? Nebo co kdybychom místo po diagonálách začali umisťovat koně nějak jinak?

Jak to tedy dělat správně?

Řešení. (Správné!) Postavíme jednoho koně na šachovnici. Všimneme si, že ohrožuje jen políčka, která mají opačnou barvu než to, na němž stojí. Zamyslíme se nad tím a zjistíme, že to neplatí jen pro tohoto koně, ale platí to obecně. Tedy určitě umíme na šachovnici umístit aspoň 32 koňů, protože tolik je polí jedné barvy.

Je to ale opravdu maximum? Rozdělme si šachovnici na osm obdélníků 2×4. Kdyby na šachovnici mohlo být koňů víc, muselo by podle Dirichletova principu v některém z nich být aspoň pět koňů. Jenže každý z koňů v tomto obdélníku na jednom poli stojí a jedno ohrožuje, pět koňů (a tím spíš ne více) se tam tedy nevejde. Tím jsme dokázali, že víc než 32 jich na šachovnici být nesmí, 32 jich tam umíme postavit, máme tedy hotovo. Tečka!

Možná to působí až přehnaně, ale je to opravdu častá úvahová chyba, byť ne vždy v takto jasných případech.

Obecně se tvrzení, že je něco minimum (maximum), dokazuje jako v posledním ukázkovém řešení. Najdeme nějakého kandidáta na extrém, dokážeme, že splňuje zadanou vlastnost, a pak dokážeme, že nic menšího (většího) dané podmínky nesplňuje. A nebo klidně totéž v opačném pořadí.

Pojďme to zkusit!

Příklad 1. Mějme šachovnici $2n \times 2n$, které někdo vylomil dvě protilehlá rohová políčka. Kolik nejvíce dominových kostek 1×2 na ni můžeme naskládat?

Příklad 2. Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva a každé hrálo s každým právě jeden zápas. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet gólů v turnaji, přičemž v žádných dvou zápasech jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek? (MO 55–C–I–1)

Příklad 3. Máme trojúhelník s čísly od jedné do šesti napsanými u jeho vrcholů a středů stran. Když pro každou stranu sečteme tři čísla na ní napsaná, největší součet bude patnáct. Když po dvou sečteme čísla napsaná uprostřed stran, nejmenší součet bude čtyři. Jaký nejvyšší mohl být součet čísel napsaných u vrcholů? (PraSe 33–4–1)

Příklad 4. Najděte kladná reálná čísla a, b, c taková, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší. (PraSe 7–5–1)

Příklad 5. Najděte přirozená čísla a, b, c taková, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší. (PraSe 7–5–1)

Příklad 6. Na čtverečkovaném papíře 5×5 hrajeme lodě, přičemž soupeř má právě jednu loď. Ta je ve tvaru tetromina L, tedy řada tří čtverečků, přičemž na nějakém konci je nalepený jeden do boku. Kolik polí musíme aspoň vyzkoušet, abychom měli jistotu, že loď zasáhneme? (MO 58–B–II–2)

Příklad 7. Mějme čtverec, v němž je v pravidelných rozestupech umístěno devět bodů tak, že tvoří tři řádky a tři sloupce. Kolik nejméně čtverců musíme přidat, aby nebylo možné spojit žádné dva body křivkou, aniž bychom překročili nějaký čtverec? (PraSe 27–5–1)

Příklad 8. Máme čísla od jedné do padesáti a chceme je uspořádat na kružnici tak, aby součet všech absolutních hodnot rozdílů sousedních čísel byl co nejmenší. Jak to máme udělat a jaké bude toto minimum? (PraSe 33–4–2)

Příklad 9. Jaký nejvyšší může být součet reálných čísel x, y, pro která platí $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$? (PraSe 21–1–2)

Příklad 10. Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný. (PraSe 21–1–4)

Příklad 11. Mějme útvar složený z šesti řad čtverečků pod sebou o počtech dva, čtyři, šest, šest, čtyři a dva čtverečky, přičemž je osově souměrný podle svislé i vodorovné osy. Kolik nejvíce čtverečků můžeme obarvit, aby v žádné šikmé řadě nebyly tři obarvené vedle sebe? (MO 49–C–II–4)

Příklad 12. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Pro jakou polohu bodu P umístěného na obvodu trojúhelníku bude $|PA| + |PB| + |PC|$ nejmenší? (PraSe 27–5–3)

Příklad 13. Jaký nejvyšší počet podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ můžeme vybrat, aby žádné dvě z nich neměly společné více než dva prvky?

Příklad 14. Kolik nejvíce čísel můžeme vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 99\}$ tak, aby součet žádných dvou z nich nebyl dělitelný jedenácti? (MO 58–C–I–5)

Příklad 15. Najděte nejmenší k přirozené takové, že každá k-prvková množina dvojciferných čísel obsahuje nějaké prvočíslo. (MO 56–B–I–3)

Příklad 16. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší? (MO 56–B–II–4)

Příklad 17. Najděte minimum a maximum výrazu $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a)$ pro $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

Příklad 18. Pomocí nalezení extrémů výrazu $V(a, b, c) = a + b + c + 4(1 - a)(1 - b)(1 - c) + 3abc$ dokažte pro $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ nerovnost

$$1 \leq V(a, b, c) \leq 6.$$

(PraSe 28–7–6)

Literatura a zdroje

[1] Úlohy pocházejí z uvedených ročníků matematické olympiády a MKS.

Derivace (s trochou mýdla)

Kuba Krásenský

Abstrakt. Tento příspěvek patří k přednášce, na které si názorně vysvětlíme, co je to derivace funkce, naučíme se nejdůležitější pravidla pro její výpočet a objasníme si její hlavní způsoby využití.

Při zkoumání nějaké funkce (z podmnožiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) je velmi užitečné vědět, jakou má v daném bodě tečnu. (Nemusí mít žádnou – lze si představit funkce s různými zubatými a „potrhanými“ grafy –, ale ty funkce, se kterými se obvykle setkáváme, jsou docela hladké a je k nim možné tečnu přiložit v každém bodě.) Metodu, jak směr této tečny spočítat, objevili (pravděpodobně) nezávisle na sobě Isaac Newton a Gottfried Leibniz, čímž umožnili prudký rozmach matematiky i fyziky.

Definice 1. *Směrnicí* přímky myslíme tangens úhlu, který svírá s osou x. Jestliže má funkce f v bodě x tečnu, pak směrnici této tečny nazýváme *derivací* f v bodě x a značíme $f'(x)$.

Ona průlomová myšlenka pánů Newtona a Leibnize byla, že pokud se f kolem bodu x chová slušně, pak lze směrnici její tečny dost dobře odhadnout směrnicí sečny, která f protíná v bodech x a $x+d$, kde d je nějaké hodně malé číslo. Spočítat tuto směrnici je snadné; je to $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$.

Na přednášce si ukážeme, že zkoumáním chování tohoto výrazu pro malá d si většinou dovedeme představit, co by se stalo, kdybychom za d „dosadili nulu“ – čímž právě spočítáme derivaci v bodě x. Veškeré naše počínání bude stát na naprosto pevných matematických základech (však se derivování opírá velká část vyšší matematiky); je ale zajímavější a pro středoškoláka důležitější přibližně chápat, jak derivace fungují a umět je využívat, než je umět zcela rigorózně definovat.

Odvodíme si následující vztahy pro derivace některých elementárních funkcí:

Věta 2. (Tabulka derivací) *Na celém definičním oboru příslušných funkcí platí tyto vztahy:*

(i) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(ii) $(e^x)' = e^x$,
(iii) $(\sin(x))' = \cos(x)$,
(iv) $(\cos(x))' = -\sin(x)$,
(v) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Zatím moc funkcí zderivovat neumíme; to se spraví následující větou, která nám ukáže, jak spočítat derivace funkcí, které jsou definovány s využitím funkcí jednodušších. Symbolem $f \circ g$ myslíme složení funkcí f a g, tj. funkci definovanou vztahem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; symbolem f^{-1} označujeme inverzní funkci k funkci f, pokud existuje.

Věta 3. (Aritmetika derivací) *Pro každou konstantu c a funkce f a g, pro něž existuje výraz na pravé straně, platí následující vztahy:*

(i) $(cf)'(x) = cf'(x)$,
(ii) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
(iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iv) $(f \circ g)(x)' = f'(g(x))g'(x)$,
(v) $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Skoro každá funkce, se kterou jsme se v životě setkali, je vybudovaná z funkcí x^α, $\sin(x)$ a e^x pomocí konečného počtu sčítání, násobení, skládání a invertování – takže její derivaci umíme spočítat s využitím předešlých dvou vět. Pojďme si to procvičit.

Příklad 4. Spočítejte derivace následujících funkcí (na celém definičním oboru, pokud to lze):

(i) $(1+x)^2$,
(ii) $\sin(2x)$,
(iii) $\sin^2(x) + \cos^2(x)$,
(iv) $\operatorname{tg}(x)$,
(v) 2^x,
(vi) $\arcsin x$,
(vii) $\ln(\cos x)$.

Příklad 5. Odvoďte obecný vzorec pro derivování podílu dvou funkcí.

Využití derivací

No dobrá, většinu funkcí, s nimiž se setkáme, tedy umíme zderivovat. A k čemu nám to bude dobré? Když si uvědomíme, že derivace vyjadřuje směrnici tečny, není pro nás těžké uvěřit následující větě:

Věta 6. *Jestliže má funkce f v bodě x kladnou derivaci, pak je na nějakém jeho okolí ostře rostoucí. Pokud má derivaci zápornou, je naopak na nějakém okolí ostře klesající.*

Z toho už snadno vyplyne následující veledůležitá věta:

Věta 7. *Jestliže má funkce f v bodě x lokální minimum nebo maximum, pak derivace v tomto bodě buď neexistuje, nebo je nulová.*

Příklad 8. Ověřte, že s pomocí předešlé věty správně naleznete body, v nichž může mít funkce sinus maximum či minimum.

Příklad 9. Nalezněte lokální maximum funkce $\ln(2x) - x$.

Příklad 10. Zjistěte pomocí derivování, kde leží vrchol paraboly dané rovnicí $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Příklad 11. Nalezněte extrémy funkce $xe^{-x^2/2}$.

Příklady

Příklad 12. Určete rovnici tečny k funkci $\frac{1-x}{x^2-3}$ v bodě odpovídajícím $x = -2$.

Příklad 13. Prasátko si chce na břehu rovné řeky oplotit obdélníkovou zahradu tak, že na straně přilehlé k řece žádný plot nebude. Má k dispozici osm set metrů pletiva. Jakou největší plochu může mít jeho zahrada?

Příklad 14. Helmut by si přál mít krabici ve tvaru kvádru, jehož podstava má poměr stran $a : b$ roven jeho oblíbenému kladnému α. Jak má dosáhnout co největšího objemu, pokud

a) povrch nesmí překročit zadané S?
b) součet rozměrů $a + b + c$ nesmí překročit zadané S?

Příklad 15. Barbara balí vánoční dárky. Z čtvercového papíru o straně 30 cm vystřihne v rozích čtyři stejné čtverečky a zbytek přehne tak, aby vznikla otevřená krabice. Jak velké čtverečky má odstřihnout, aby byl objem krabice byl maximální?

Příklad 16. (Těžší)

(i) Určete hodnotu výrazu $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$. (Tím máme na mysli číslo, k němuž se blíží členy posloupnosti $\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}, \dots$) Tato část příkladu je zajímavá, ale s derivováním nesouvisí.

(ii) Pro která a lze obdobným způsobem definovat výraz $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$?

Příklad 17. (Těžší) Mějme v rovině čtyři body tvořící vrcholy čtverce. Máme za úkol nakreslit mezi nimi několik čar tak, aby bylo z každého bodu možné dostat se po čárách do každého jiného (byť třeba po dlouhé cestě procházející některým z ostatních bodů). Jaká může být nejmenší celková délka těchto čar? Místo čtverce zkuste uvažovat i obdélník nebo trojúhelník.

Řešte předešlou úlohu pomocí

(i) Derivování,
(ii) elementární geometrie,
(iii) mýdlové vody.

Funkcionální rovnice

Jan Krejčí

Abstrakt. Najdou se tací, kteří se snaží najít hodnotu proměnné, která řeší zadanou rovnici. To je pro mlíčňáky. My si ukážeme, jak řešit spoustu soustav najednou – jak řešit funkcionální rovnice, tj. jak najít funkci, která splňuje zadaný předpis nikoliv v jednom bodě, ale na celém definičním oboru! A to je samozřejmě daleko lepší.

Co je to funkce?

Funkci f si lze představit jako malého dinosaura, který sežere vstup (argument) a vyplivne nějaký výstup (funkční hodnotu). Množina všech vstupů se nazývá definiční obor funkce f (značíme ho D_f) a množina všech výstupů obor hodnot (značíme ho $\mathrm{Rng}(f)$). Pokud si obor hodnot žije v množině Y a označíme $X = D_f$, pak píšeme $f : X \to Y$.

Alternativně si funkci $f : X \to Y$ můžeme představovat jako podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Bohužel, v tomto případě přijdeme o našeho milého malého dinosaura.

Co je to funkcionální rovnice

Funkcionální rovnice je přesně to, co by od ní člověk čekal. Je to rovnice, ve které vystupují proměnné a (typicky) jedna funkce. Od nás se očekává, že najdeme všechny takové funkce, které splňují zadanou rovnici pro všechny přípustné hodnoty proměnných. Ukažme si to na příkladu:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Velký rozdíl mezi klasickou a funkcionální rovnicí je, že ve funkcionální rovnici musíme uvést definiční obor a obor hodnot hledané funkce. A ty hrají skutečně velkou roli. Pokud bychom chtěli, aby $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, pak uvedenou rovnici splňují pouze funkce tvaru $f(x) = cx$ pro $c \in \mathbb{Q}$. Kdyby někdo chtěl, aby to byla funkce reálná

($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) bez dalších omezujících podmínek, tak kromě řešení tvaru cx, $c \in \mathbb{R}$ existuje řada dalších (nehezkých) funkcí, které zadání splňují.

Jak na takovou funkcionální rovnici?

Ať už použijeme kteroukoliv ze zmíněných metod, idea zůstává stejná – předpokládáme, že máme funkci, která splňuje zadání, a uvažujeme, jaké má vlastnosti, třeba jakých hodnot nabývá v některých zajímavých bodech. Velmi často jsou takto získané vlastnosti nutné, ale nikoliv postačující, tedy je nutné provádět zkoušku. Nyní k samotným metodám.

Substituce

Jedna z prvních věcí, která člověka může napadnout, je zjistit hodnoty v zajímavých bodech (třeba v x). Toho lze docílit dosazováním výrazů obsahujících proměnné, aritmetické operace a za jistých podmínek i funkčních hodnot.

Příklad 1. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x,\ y\ \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Řešení. Nabízejí se dvě přirozená dosazení, která obě použijeme. Pokud dosadíme $[x, y] = [0, 0]$, pak zjistíme hodnotu funkce f v nule a pokud $[1, y]$, tak dostaneme rovnici, ze které půjde vyjádřit $f(y)$.

A nyní to zkusme formálně. Předpokládejme, že existuje f, která splňuje zadanou rovnici na $\mathbb{R}$. Pak nutně musí zadanou rovnici splňovat v bodech $[1, y]$ a tedy pro ni platí $f(y)(f(1) - 1) = y + 1$, kde $f(1)$ je nějaká konstanta. Snadno se ukáže, že $f(1) \neq 1$. Označme $c = f(1) - 1$, potom $f(y) = \frac{y+1}{c}$. Zbývá určit, pro která c tato funkce skutečně řeší rovnici. Dosazením $[0, 0]$ a použitím vzorečku pro f dostaneme, že $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c} = 0$ a tedy $c = 1$.

Na tomto příkladu je dobře vidět, co jsme si řekli dříve – prvním dosazením jsme dostali *nutnou* podmínku na funkci – f je tvaru $\frac{x+1}{c}$. Nicméně to nestačilo, dalším dosazením jsme zjistili, že jediné přípustné c je 1.

Jak se snažíme dosazovat?

(1) Tak, aby nám jako jeden z argumentů funkce vyšla konstanta (0, 1, atd.),
(2) tak, aby nám jedna ze stran rovnice vyšla symetrická („vypadá stejně, pokud zaměníme x a y“),
(3) tak, aby nám z toho vypadla „hezká“ soustava rovnic,
(4) $x = y$, $x = -y$, atd.

Příklad 2. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x,\ y\ \in \mathbb{R}$

platí

$$f(x+y)+f(x-y)=xy.$$

Příklad 3. Najděte všechny funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vyhovující pro každá x, $y\in\mathbb{R}$ rovnici

$$f(xy+1)+f(x+y)=(f(x)+1)(y+1).$$

Další možností, jak řešit funkcionální rovnice, je udělat si z rovnice opakovaným (šikovným) dosazováním soustavu tak, aby se nám nepříjemné argumenty odečetly.

Příklad 4. Naleznete všechny funkce $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ splňující pro x různá od 0 a 1 následující rovnici

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

Příklad 5. Nalezněte všechny funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2.$$

Příklad 6. Najděte všechny funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ platí

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{-x+3}{1-x}\right)=x.$$

Vlastnosti funkcí

Definice 7. Uvažujme funkci $f:X\to Y$. Řekneme, že funkce f je

- *prostá*, pokud pro každé x, $y\in D_f$ platí

$$(f(x)=f(y)) \implies (x=y)\,,$$

- *surjektivní* (na), pokud pro každé $y\in Y$ existuje $x\in X$ tak, že $f(x)=y$,
- *bijekcí*, pokud je prostá a zároveň surjektivní,
- *sudá* (resp. *lichá*), pokud pro každé $x\in D_f$ platí

$$f(-x)=f(x)\ \text{(resp. } f(-x)=-f(x)),$$

- *periodická* s periodou k, pokud pro každé $x\in D_f$ platí, že $x+k\in D_f$ a $f(x)=f(x+p)$.

K čemu je to dobré? Pokud je funkce prostá, pak z rovností funkčních hodnot plyne rovnost argumentů ($f(A)=f(B)\implies A=B$). Díky surjektivitě pro změnu můžeme vždy použít substituci $y=f(x)$ pro každé $y\in Y$.

Příklad 8. Najděte všechny bijekce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(f(x) + f(f(y))) = f(f(f(x)) + f(y)).$$

Příklad 9. Najděte všechny prosté funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = f(2x^2) + 4f(x)y + 2y^2.$$

Příklad 10. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x).$$

Sudost/lichost nám pro změnu ulehčuje řešení, protože nám stačí najít předpis pro f jenom na nezáporných nebo nekladných číslech.

Příklad 11. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos(y).$$

Na co si dát pozor

Dvě časté chyby, které si na následujících příkladech ukážeme, jsou

- Člověk dostane několik možných předpisů pro hledanou funkci a jeden z těchto předpisů prohlásí za řešení (a nezamyslí se nad tím, že se tyto předpisy dají „lepit").
- Některé substituce nefungují na celém definičním oboru (třeba $y = \sqrt{x}$ funguje pouze pro $x \geq 0$).

Příklad 12. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$(f(x))^2 = xf(x).$$

Příklad 13. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující pro každé kladné x rovnici

$$x^3f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

Příklad 14. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Návody

2. Dosaď $x = y = \frac{t}{2}$.

3. Dosaď $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[0, x]$.

4. Dosaď x, $\frac{1}{1-x}$ a $1 - \frac{1}{x}$. Vyřeš vzniklou soustavu.

5. Dosaď $[x, f(x)]$,$[x, -x^2]$. Vyřeš soustavu vzniklou.

6. Dosaď $x = \frac{t-3}{1-t}$ a $\frac{t+3}{1-t}$. Vzniklou soustavu vyřeš.

8. Díky surjektivitě můžeme položit $z = f(y)$ a navíc existuje x tak, že $f(x) = 0$.

9. Dosaď $[x, 0]$.

10. Pro $[0, y]$ je levá strana prostá. Najdi nulový bod a vyjádři ho dvěma způsoby. Ukaž, že f je bijekce.

11. Zapiš si f jako součet sudé a liché funkce.

12. Převeď na součin, který se porovnává s nulou. Označ M množinu, na které má funkce jeden tvar (a na zbytku má druhý). Ukaž, že každá taková funkce je řešením.

13. Označ $y = xf(x)$ a rozlož na součin.

14. Dosaď $[x, \sqrt{x}]$, $x > 0$. $[0, \sqrt{-x}]$, $x < 0$.

Literatura a zdroje

[1] Vít Musil: *Funkcionální rovnice*, Oldřichov, 2012.
[2] Háňa Bendová: *Funkcionální rovnice*, Dobrá Voda, 2010.

Permutační nerovnost

Jakub Löwit

Abstrakt. V matematice máme fůru různých nerovností. Zkušený olympiádník je prostě vidí, na první pohled ale vůbec očividné nejsou. My se v příspěvku budeme zabývat takzvanou permutační nerovností, která je intuitivně úplně zřejmá. Od jednoduchých nerovniček nás permutační nerovnost dovede k silným nerovnostem, se kterými si už budeme moct troufnout na nejeden pořádný příklad.

Co to je?

Ujasněme si pro začátek, co je to permutace a permutační nerovnost. Permutací σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ myslíme nějaké její přeuspořádání. Permutace jako takové ale (kromě značení) používat vůbec nebudeme. Permutační (také *mincovní*) nerovností myslíme následující nerovnost, která platí pro libovolné dvě n-tice nezáporných reálných čísel.

Věta. *Mějme posloupnosti reálných čísel $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Dále ať σ je libovolná permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, která přeuspořádává $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ na $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$. Pak*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1y'_1 + x_2y'_2 + \cdots + x_ny'_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-2} + \cdots + x_ny_1.$$

Proč je permutační nerovnost tak zřejmá? Představte si následující situaci: Na stole leží n hromádek bankovek, v každé hromádce jsou bankovky jedné vydávané hodnoty. Všechny tyto hromádky jsou přitom „nekonečné“. Každý z následujících n dní si můžete vybrat hromádku, ze které jste zatím nikdy nic nebrali, a vzít si z ní nějaký počet bankovek. Přitom máte ale dopředu určeno, kolik bankovek si který den smíte vzít. Permutační nerovnost pak pouze jinými slovy říká, jak si v této situaci vydělat co nejvíc a jak co nejmíň.

Důkaz. Začneme první nerovností. Nejprve nějak náhodně popárujme dvojičky x a y do součinů. BÚNO $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Ukážeme, že pokud příslušné n-tice nebyly souhlasně uspořádané, postupným „opravováním“ si neuškodíme. Ať se příslušná permutace liší od té identické poprvé na indexu i, tedy

$y'_i = y_j$ pro $j \neq i$. Protože ale permutace byla doteď identická, leží skutečné y_i ještě dál na nějakém indexu $k > i$. Ze stejného důvodu je také $j > i$. Zkusme tedy prohodit čísla y_i a y_j, čímž získáme nějakou novou permutaci posloupnosti y. Tyto dvě permutace se ale liší pouze na indexech i a k, polepšili jsme si proto přesně o

$$(x_i y_i + x_k y_j) - (x_i y_j + x_k y_i) = (x_i - x_k)(y_i - y_j) \geq 0,$$

neboť $i > j$ a zároveň $i > k$. Postupný prohazováním nakonec dostaneme posloupnosti y ve správném pořadí.

V permutační nerovnosti přitom nastává rovnost pouze tehdy, pokud po dosazení příslušných čísel za proměnné x_i a y_i dostaneme na obou stranách nerovnosti (před provedením násobení a sčítání) stejné výrazy (až na pořadí členů ve sčítání).

Pokud dále řekneme, že nějaké dvě posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ délky n jsou *souhlasně uspořádané*, myslíme tím fakt, že $x_i \geq x_j$ právě tehdy, když $y_i \geq y_j$. Obdobně definujeme *opačně uspořádané* posloupnosti. Permutační nerovnost tedy vlastně říká, že největší výsledek výrazu $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ získáme ze dvou souhlasně uspořádaných posloupností, nejmenší z opačně uspořádaných.

Permutační nerovnost přitom typicky *homogenní* výrazy odhaduje opět homogenními výrazy stejného stupně. Často nám umožní velmi jednoduše odhadovat *cyklické* výrazy pomocí jiných cyklických výrazů.

Je to zřejmé ...

Pojďme se konečně vrhnout na první úlohy. Začneme úlohami, které často stačí pouze přejet očima. Tyto úlohy jdou typicky řešit i mnohými jinými (skoro všemi) přístupy, zkusíme se na ně ale dívat opravdu přes nerovnost permutační. Při řešení je vhodné si alespoň koutkem oka všimnout i předpokladů na proměnné – typicky je neuvádíme pro pobavení ušáků.

Úloha 1. Pro reálná a, b, c dokažte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Úloha 2. Pro reálná $x, y, z \geq 0$ ukažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Úloha 3. Pro reálná x, y, z ukažte

$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \geq x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2.$$

Úloha 4. Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Úloha 5. Ať $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ jsou reálná čísla a $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ je permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Potom

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - y'_1)^2 + (x_2 - y'_2)^2 + \cdots + (x_n - y'_n)^2.$$

(IMO 1975)

Úloha 6. Pro kladná reálná čísla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a jejich libovolnou permutaci $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ nahlédněte

$$\frac{x_1}{x'_1} + \frac{x_2}{x'_2} + \cdots + \frac{x_n}{x'_n} \geq n.$$

Úloha 7. Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}.$$

Drobná zamyšlení

Protože už jsme si vyzkoušeli úlohy, které permutační nerovnost dělá za nás, pustíme se teď do úloh, kde musíme něco jednoduchého udělat i my.

Úloha 8. Pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$ najděte minimum výrazu

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

Úloha 9. Na stole leží n po dvou různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots a_n$. Dokažte

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Úloha 10. Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a+1}{b\sqrt{b}} + \frac{b+1}{c\sqrt{c}} + \frac{c+1}{a\sqrt{a}} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Úloha 11. Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} \geq 2(a+b+c).$$

Úloha 12. Pro reálná $x, y, z > 0$ dokažte

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{y^2-x^2}{z+x} + \frac{z^2-y^2}{x+y} \geq 0.$$

Úloha 13. Jsou dána reálná $x, y, z > 0$. Ukažte odhad

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

Úloha 14. Pro reálná $a, b, c > 0$ dokažte *Nesbittovu* nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Úloha 15. Pro reálná $a, b, c > 0$ splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Úloha 16. Pro reálná $a, b, c > 0$ a n přirozené ukažte

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

Úloha 17. Jsou dána reálná $a_1, a_2 \ldots, a_n > 0$, pro přehlednost označme s jejich součet. Potom

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Úloha 18. Dána jsou reálná $a, b, c > 0$. Dokažte

$$a^a b^b c^c \geq \sqrt[3]{(abc)^{a+b+c}}.$$

Dále se z permutační rovnosti dá odvodit třeba *Cauchyho–Schwarzova* nerovnost nebo *průměrové* nerovnosti. My se však nyní přesuneme k nerovnosti *Čebyševově.*

Čebyšev

Začneme úlohou doslova šitou na míru permutační nerovnosti, která má shodou náhod své vlastní jméno.

Věta. (Čebyševova nerovnost) *Ať $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jsou n-tice reálných čísel. Potom*

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \geq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

Důkaz. Pro první nerovnost dokola sečteme všech n permutačních nerovností tvaru $\sum a_i b_i \geq \sum a_i b_{i+k}$. Druhá nerovnost se dokáže analogicky.

Tvrzení. *V Čebyševově nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *nebo* $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

Na první pohled se zdá, že Čebyševova nerovnost musí být opravdu hloupá, neboť jsme ji získali nasčítáním hromady slabých permutačních nerovností. Překvapivě je ale poměrně silná a užitečná, a to právě kvůli tomu, že se na čísla dívá „z větší výšky". Nyní si v praxi vyzkoušíme, co tato nerovnost umí.

Úloha 19. Pro reálná a, b, c ukažte

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^5 + b^5 + c^5)(a^3 + b^3 + c^3).$$

Úloha 20. Jsou dána reálná $a_1, a_2, \ldots, a_2 > 0$, která splňují $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Potom

$$\frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2 - a_n} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

Úloha 21. Pro reálná $a, b, c, d > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Úloha 22. Pro reálná $a, b, c > 0$ ukažte nerovnost

$$\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} \leq \frac{3(ab + bc + ca)}{2(a + b + c)}.$$

Úloha 23. Mějme čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dokažte nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \cos a_i \right) \leq \frac{n^2}{2}.$$

Úloha 24. Ať reálná $a, b, c, d > 0$ splňují $a + b + c + d = 4$. Potom ukažte

$$\frac{1}{11 + a^2} + \frac{1}{11 + b^2} + \frac{1}{11 + c^2} + \frac{1}{11 + d^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Úloha 25. Ať $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ je n-tice reálných čísel, která splňují

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n} = 1.$$

Dokažte, že

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \geq (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right).$$

Úloha 26. Pro reálná $a, b, c, d \geq 0$ splňující $ab + bc + cd + da = 1$ ukažte

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

(IMO Shortlist 1990)

Úloha 27. Reálná čísla $x, y, z \geq 0$ splňují $xyz = 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO Shortlist 1998)

Algebry s obrázkem

V běžném trojúhelníku platí různé vztahy mezi délkami různých úseček a různými úhly. Některé z nich přitom přímo vybízí k použití permutační či Čebyševovy nerovnosti. Některé jsou triviální, některé ne. Podívejme se na ně tedy podrobněji.

Úloha 28. Trojúhelník má strany s délkami a, b, c. Dokažte

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Úloha 29. V rovině je dán $\triangle ABC$ s obsahem S a délkami stran a, b, c. Dále označme délky výšek na tyto strany po řadě v_a, v_b, v_c. Dokažte nerovnost

$$a(v_b + v_c) + b(v_c + v_a) + c(v_a + v_b) \geq 12S.$$

Úloha 30. Délky stran $\triangle ABC$ naproti vrcholům A, B, C označme popořadě a, b, c, velikosti úhlů (v radiánech) příslušné těmto vrcholům popořadě α, β, γ. Dokažte

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{6}{\pi} \cdot (a + b + c).$$

Úloha 31. V rovině je dán ostroúhlý $\triangle ABC$ s orthocentrem H. Dokažte, že součet vzdáleností H od stran trojúhelníku je roven nejvýše trojnásobku poloměru kružnice jemu vepsané.

Úloha 32. Délky stran a velikosti úhlů v $\triangle ABC$ označme běžným způsobem jako a, b, c, α, β, γ. Jasnovidec nám přitom řekl, že $a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta)$. Dokažte, že $\triangle ABC$ je rovnoramenný. (IMO 1966)

Úloha 33. Je dán $\triangle ABC$ označený běžným způsobem. Dokažte

$$a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}(a + b + c)}{2}.$$

(PraSe 29–S–5)

Poleva na dort

Vraťme se na chvilku k permutační nerovnosti a zkusme si ji zobecnit.

Úloha 34. Ať $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_n \geq 0$ jsou posloupnosti reálných čísel, $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ a $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ jsou permutace posloupností $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y'_i z'_i.$$

Podobně můžeme permutační nerovnost zobecnit pro větší počet posloupností. Přitom je ale opravdu potřeba předpokládat nezápornost čísel. Předveďme si ještě duální verzi permutační nerovnosti, kde „zaměníme" násobení se sčítáním.

Úloha 35. Jsou dána reálná čísla $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, dále $(y'_1 \geq y'_2 \geq \cdots \geq y'_n)$ je permutace $(y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n)$. Potom

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i + y'_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i + y_{n+1-i}).$$

Stejně jako minule, i tuto nerovnost lze zobecnit pro nezáporná čísla pro libovolný počet posloupností.

Třešnička na dortu

Každá slušná nerovnost, která obsahuje nějaké sumy, má také svoji integrální verzi. Z původní algebraické nerovnosti ji získáme uvážením větších a větších sum, které se blíží k příslušnému integrálu.

Věta. (Integrální Čebyševova nerovnost) *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ mějme dvojici stejným způsobem monotónních funkcí $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}_0^+$. Potom*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Poznámka. Pokud jsou funkce f, g monotónní opačným způsobem, dostaneme opačnou nerovnost.

Úloha 36. Mějme reálná $x, y > 0$ a libovolná přirozená m, n. Potom dokažte nerovnost

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y+y^{m+n-1}x).$$

Úloha 37. Jsou dána reálná čísla $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Dokažte, že

$$(y-x)(\cos(2x)-\cos(2y)) \leq 4(\cos(x)-\cos(y))(\sin(y)-\sin(x)).$$

Návody

1. Vezměte dvakrát stejnou trojici (a, b, c).

2. Opačně uspořádané trojice (x^2, y^2, z^2) a (yz, zx, xy).

3. Dvě stejné (souhlasně uspořádané) trojice (x^2y, y^2z, z^2x).

4. Vezměte dvakrát trojici $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$.

5. Holt roznásobte závorky, zbavte se druhých mocnin a vynásobte (-1).

6. Posloupnosti x_i a $\frac{1}{x_i}$ jsou opačně uspořádané.

7. Stačí vzít dvě stejné trojice $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ a upravit pravou stranu. Nebo můžete nerovnost vynásobit abc a uvážit předešlou trojici společně s trojicí bc, ca, ab.

8. Uvažte kladné posloupnosti $\sin^3 x, \cos^3 x$ a $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x$. Vyjde tedy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

9. Nejprve „setřepejte“ čísla a_i dolů na čísla $1, 2, \ldots, n$ a poté očividným způsobem použijte permutační nerovnost.

10. Odhadněte jmenovatele jako dvojnásobky odmocnin a pak uvažte trojice $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$, $\left(\frac{1}{a\sqrt{a}}, \frac{1}{b\sqrt{b}}, \frac{1}{c\sqrt{c}}\right)$.

11. Zlomky si rozdělte, následně použijte na dvě trojice zlomků permutační nerovnost, která je odhadne jako $a + b + c$.

12. Záporné věci dejte doprava. Posloupnosti (x^2, y^2, z^2) a $(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z})$ jsou souhlasně uspořádané.

13. Najednou to jde špatně. Zkuste ale použít permutační nerovnost dvakrát za sebou, vždy tím nejjednodušším možným způsobem.

14. Vynásobte nerovnost dvěma. Pokud BÚNO $a \geq b \geq c$, pak také $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Posléze sečtěte dvě permutační nerovnosti tak, aby se jmenovatele vykrátily.

15. Substituce $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ situaci vyjasní, přitom stále $xyz = 1$. Vynásobení dvěma a použití dvou permutačních nerovností nám dá dolní odhad $x + y + z$, který je zřejmě větší roven třem díky podmínce.

16. Vynásobte dvěma, pak dvakrát použijte trojice a, b, c a $\frac{a^{n-1}}{b+c}, \frac{b^{n-1}}{c+a}, \frac{c^{n-1}}{a+b}$.

17. Vynásobte $n-1$, vezměte posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\left(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right)$ a sečtěte $n-1$ cyklicky posunutých permutačních nerovností.

18. Nerovnost zlogaritmujte, vynásobte třemi a následně vezměte trojice a, b, c a $\log a, \log b, \log c$.

19. Čebyšev dvou tříprvkových souhlasně uspořádaných posloupností.

20. Vynásobte jmenovatelem pravé strany, který interpretujte jako součet všech jmenovatelů nalevo, pak přichází na řadu Čebyšev pro opačně uspořádané posloupnosti.

21. Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte každý zlomek zvlášť jako $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

22. Vynásobte jmenovatelem pravé strany. Posloupnosti $\frac{ab}{a+b}, \frac{ac}{a+c}, \frac{bc}{b+c}$ a $(a+b), (a+c), (b+c)$ jsou souhlasně uspořádané – BÚNO volte $a \geq b \geq c$, což jednoznačně určuje nerovnosti v obou trojicích. Dokazovaná nerovnost je pak odpovídající Čebyšev.

23. Siny a kosiny jsou opačně uspořádané, po zřejmém použití Čebyševovy nerovnosti je potřeba vynásobit vzniklou sumu dvěma a vhodné dvojice členů spojit pomocí součtových vzorců pro sinus.

24. Všechno převeďte nalevo, tedy od každého zlomku odečtěte $\frac{1}{12}$. Využijte faktu, že posloupnosti $(a-1, b-1, c-1, d-1)$, $\left(\frac{a+1}{11+a^2}, \frac{b+1}{11+b^2}, \frac{c+1}{11+c^2}, \frac{d+1}{11+d^2}\right)$ jsou souhlasně uspořádané, po provedení Čebyševa využijte podmínku.

25. Přičtěte k nerovnosti ještě jednu závorku z pravé strany, na levé straně popárujte členy se stejnými neznámými a upravte. Levou stranu pak ještě jen tak pro radost vynásobte podivnou jedničkou ze zadání. Ověřte, že můžete použít Čebyševa tak, jak byste chtěli (pozor, dá to trochu práci).

26. Díky podmínce je nutně $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$. Jmenovatele označme A, B, C, D. Dvakrát za sebou Čebyševujte – poprvé logickým způsobem na zlomky, podruhé pro rozbití sumy třetích mocnin na součin sum prvních a druhých. Druhé mocniny zmizí, dále $3(a+b+c+d) = A+B+C+D$, což jde dokončit snadnou permutační nerovností.

27. Z podmínky si pouze odneseme $x + y + z \geq 3$. Nejdřív použijeme jasného Čebyševa (jednu posloupnost tvoří čitatelé). Označte $x + y + z = 3a$, jmenovatele celého vzniklého výrazu odhadněte shora jako $(1 + a)^3$, zbývá se vypořádat s odhadem součtu třetích mocnin pomocí a. Až budete mít nějakou racionální funkci v a, použijte $a \geq 1$.

28. Označme $o = a + b + c$, vezměte opačně uspořádané posloupnosti (a, b, c) a $(a(o - a), b(o - b), c(o - c))$. Jejich uspořádání přitom vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti. Proveďte dvě cyklické záměny a obě příslušné permutační nerovnosti sečtěte.

29. Protože platí $2S = av_a = bv_b = cv_c$, jsou posloupnosti (a, b, c), (v_a, v_b, v_c) opačně uspořádané. Použitím dvou minimalizujících permutačních nerovností společně s rovností $av_a + bv_b + cv_c = 6S$ jsme hotovi.

30. Ze sinové věty leží proti nejdelšími úhlu nejdelší strana, proti nejmenšímu úhlu nejkratší strana. Stačí použít Čebyševa na opačně uspořádané posloupnosti α, β, γ a $\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma}$.

31. Označme S obsah a o obvod trojúhelníku. Nahlédněte, že poloměr vepsané je roven $\frac{2S}{o}$. Nerovnost posléze vynásobte o a použijte Čebyševa. K jeho použití je třeba si uvědomit, že vzdálenosti H od stran jsou souhlasně uspořádané jako strany.

32. Pokud je nějaký z úhlů α, β tupý, příslušný tangens je záporný, pravá strana je pak moc malá. V opačném případě můžete výraz $(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta$ odhadnout Čebyševovou (resp. dvojitou permutační) nerovností. V odhadu nastává rovnost právě tehdy, když $a = b$. Součet obou tangensů nakonec odhadněte Jensenovou nerovností, čímž nám zbyde jen $a + b$.

33. Kosiny a protější strany jsou opačně uspořádané, můžeme je proto zčebyševovat. Zbývá odhadnout součet kosinů pomocí Jensenovy nerovnosti.

34. Je potřeba jít trochu do hloubky, předpoklad na nezápornost opravdu musíte využít.

35. Postavte se k důkaz stejně, jako k důkazu běžné permutační nerovnosti. Jedním prohozením si nepohoršíme třeba díky AG.

36. BÚNO $x < y$. Na intervalu $\langle x, y \rangle$ vezměte rostoucí funkce $f(t) = t^{n-1}$ a $g(t) = t^{m-1}$. Vypočtěte odpovídající určité integrály.

37. Búno $x \leq y$. Použijte spodní integrální Čebyševovu nerovnost na "opačně monotónní" funkce $\sin(t), \cos(t)$ na intervalu $\langle x, y \rangle$.

Literatura a zdroje

Kromě níže uvedeného jsem využil pár úloh z několika internetových zdrojů, které si dovolím vynechat.

[1] Zdravko Cvetkovski: *Inequalities*,

[2] Michal Rolínek, Pavel Šalom *Zdolávání nerovností*,

[3] Gabriel Dospinescu, Titu Andreescu: *Problems from the Book*

Teorie her

Viki Němeček

Abstrakt. V příspěvku se budeme zabývat kombinatorickými hrami s úplnou informací pro dva hráče. Vysvětlíme si základní pojmy, zahrajeme si několik jednodušších her a naučíme se pár klasických triků. Ve druhé části zavedeme SG-funkci a naučíme se sčítat i složitější hry.

Úmluva. Budeme se zabývat pouze hrami, které splňují následující podmínky:

(1) hrají vždy dva hráči proti sobě a pravidelně se střídají v tazích,
(2) pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy,
(3) jsou konečné a skončí vítězstvím jednoho z hráčů,
(4) jsou s úplnou informací (žádné skryté ani simultánní tahy),
(5) jsou bez náhody.

Hra se může ocitnout v konečném počtu různých stavů[1] jednoho z těchto typů:

(1) V – vyhrávající stav = buď existuje takový tah, který změní stav hry na P, nebo se jedná o koncový stav definovaný jako vyhrávající,
(2) P – prohrávající stav = všechny povolené tahy změní stav hry na V.

Počáteční stav je zpravidla jediný, zatímco koncových může být více a o každém by pravidla hry měla vypovídat, zda je V, nebo P.

Poznámka. Hry, které můžou skončit remízou, vůbec neuvažujeme, ale nebyl by problém podobně zavést také neprohrávající a nevyhrávající stavy.

Věta. *Právě jeden z hráčů má vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice stavů V a P plyne, že pokud se první hráč nachází ve stavu V, tak může zahrát takový tah, že soupeř bude během svého tahu ve stavu P a musí prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, tak tímto opakováním první hráč dosáhne vítězství, a má tedy vyhrávající strategii.

Pokud je ovšem na začátku hra ve stavu P, tak všechny tahy prvního hráče vedou do stavu V a druhý hráč se ocitá v roli prvního v předchozích úvahách, a má tedy vyhrávající strategii.

U každé z následujících her rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

[1] Stav je jednoznačně popsán pozicí hry a hráčem, který je na tahu.

Příklad 1. (Lámání čokolády) Čokoláda o $m \times n$ čtverečkách se smí lámat rovně po vyznačených čarách. Hráč, který je na tahu, si vybere některý z kousků a jednou ho rozlomí. Hráč, který nemůže nic rozlomit, prohrál.

Časté postupy

U her, v nichž prohraje hráč, který nemůže táhnout, je jedním z častých triků nalezení či vytvoření symetrie. V prvním případě hledáme vyhrávající strategii pro druhého hráče. Pokud se nám podaří nahlédnout, že je hra v nějakém smyslu symetrická, a každý tah, který první hráč udělá, může druhý hráč zopakovat podle nalezené symetrie, pak má druhý hráč evidentně vyhrávající strategii.

V druhém, častějším případě sice hra symetrická není, ale dá se na symetrickou převést tahem prvního hráče. Potom je však ve chvíli, kdy se stala hra symetrickou, na tahu druhý hráč, tedy nalezená vyhrávající strategie patří začínajícímu hráči.

Příklad 2. (Lámání čokolády podruhé) Stejná pravidla jako v předchozí hře, ale začíná se s čokoládou $2m \times n$ a nesmí se ulamovat dílky velikosti 1×1.

Příklad 3. (Mince v řadě) V řadě je deset mincí různých hodnot. Hráč, který je na tahu, z jednoho konce řady vezme jednu minci. Vyhrává hráč, který získá největší obnos.

Příklad 4. (Chomp) Čtvercová tabulka čokolády je rozlámaná na kostičky. Kostička v levém horním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku a sní ji, všechny kostičky od ní napravo, všechny kostičky od ní dolů a navíc všechny kostičky, které jsou od ní napravo i dolů. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí.

Příklad 5. (Mince na stole) Do kružnice o průměru jeden metr dva hráči střídavě kreslí neprotínající se kruhy o průměru jeden centimetr. Hráč, který první nemá svůj kruh kam nakreslit, prohrál.

Dalším častým trikem je kradení strategií. To lze využít v případě, že se jeden (typicky první) z hráčů může dostat prvním pohybem do nějaké množiny pozic M, a existuje $m \in M$ takové, že se z něj může dále druhý hráč dostat pouze do nějaké (ne nutně vlastní) podmnožiny $M \setminus \{m\}$.

Potom jsou dvě možnosti: buď má hra v pozici m vyhrávající strategii pro hráče, který není na řadě, čímž jsme našli vyhrávající strategii pro začínajícího hráče v původní hře (začne tahem do pozice m a dále hraje podle této strategie). Ve druhém případě existuje strategie pro hráče, který je v pozici m na řadě, a určitě je v ní nějak definovaný první tah. Do stavu, kam vede, se ale evidentně umí dostat začínající hráč v původní hře přímo. Proto má v takové hře vždy vyhrávající strategii první hráč.

Příklad 6. (Čísla v lahvi) V lahvi jsou všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, vyndá z lahve nějaké číslo a všechny jeho dělitele. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 7. (Čokoláda počtvrté) Vyřešte znovu úlohu číslo 4 pro obdélníkovou tabulku čokolády.

Příklad 8. (Přičítání dělitele) Začíná se s dvojkou. V jednom kroku hráč přičte k číslu nějakého jeho vlastního dělitele (to je dělitel menší než číslo samotné). Kdo překročí číslo 2011, vítězí. Má začínající hráč vítěznou strategii? A co kdyby ten, kdo překročí 2011, prohrál?

Nim

Nim je kombinatorická hra, na niž je možné spoustu jiných her převést (tuto skutečnost zde nebudeme dokazovat, ale ve skutečnosti lze každá konečná nestranná[2] hra na Nim převést).

Definice. (Nim) V několika hromádkách je určitý počet kamenů. Hráč, který je na tahu, musí odebrat z jedné hromádky alespoň jeden kámen. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen.

Definice. (Nim součet) *Nim-součtem* čísel x a y je číslo $x \oplus y$, jemuž se běžně říká binární xor. Jedná se o binární sčítání bez přenosu. Např. $21 \oplus 7 = (10101)_2 \oplus (111)_2 = (10010)_2 = 18$.

Věta. *Ve hře Nim je prohrávající pozice právě ta, v níž se Nim-součet velikostí všech hromádek rovná nule.*

Náznak důkazu. Je potřeba dokázat celkem tři věci. Zaprvé, že v každém koncovém stavu je Nim-součet velikostí všech hromádek roven nule. Zadruhé, že z každého stavu s Nim-součtem rovným nule vedou všechny tahy do stavu s nenulovým Nim-součtem. A konečně za třetí musíme ukázat, že pokud máme nenulový Nim-součet, existuje tah, který ho vynuluje.

První část důkazu je triviální, druhou a třetí si zkuste rozmyslet jako cvičení. Pokud se vám nebude dařit, mezi návody k příkladům najdete radu.

Příklad 9. (Northcottova hra) Pozice ve hře je šachovnice 8×8 s jednou černou a jednou bílou figurkou v každém řádku. Hráč, který je na tahu, táhne figurkou svojí barvy o libovolný počet políček vodorovně směrem k figurce soupeře (nesmí ji přeskočit). Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 10. (Schody) Na schodišti s 2013 schody je rozmístěno několik mincí (na každém schodě jich může být více, či tam nemusí být žádná). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolné množství mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Prohrává opět hráč, který nemůže táhnout.

[2] Hra je nestranná, pokud možné tahy z dané pozice jsou pro oba hráče stejné. Tedy například šachy nestranné nejsou, protože jeden hráč může pohybovat jen bílými figurkami, kdežto druhý jen černými.

Sčítání her

Příklad 11. (Šachovnice podruhé) V pravém dolním rohu každé z N šachovnic o rozměrech $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, \dots, a_N \times b_N$ stojí figurka. Tou se smí v jednom tahu pohnout pouze nahoru, vlevo nebo šikmo vlevo nahoru, a to buď o jedno nebo o dvě políčka. Hráč, který je na tahu, si vybere šachovnici a udělá na ní takový tah, aby figurka neopustila šachovnici. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Definice. (Sprague–Grundyho funkce) *Sprague–Grundyho funkcí* rozumíme funkci g, která každému stavu v přiřadí nejmenší nezáporné celé číslo n takové, že $n \neq g(u)$ pro všechny stavy u, do kterých se dá dostat tahem ze stavu v.

Tvrzení. *Pokud ve hře prohrává hráč, který nemůže táhnout, potom jsou prohrávající právě ty stavy v, pro které $g(v) = 0$.*

Důkaz. Stejně jako v důkazu optimální strategie pro Nim.

Definice. (Sčítání her) *Součtem her* myslíme hru, v níž si hráč může v každém svém tahu vybrat některou z dílčích her a v ní udělat tah. Pro jednoduchost jej budeme definovat pouze pro hry, kde prohrává hráč, který již nemůže táhnout.

Věta. (Sprague, 1936; Grundy, 1939) *Při součtu N her se Sprague–Grundyho funkcemi $g_1, \dots, g_N$ v počátečních stavech $v_1, \dots, v_N$ získáme hru s SG funkcí $g(v_1, \dots, v_N) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_N(v_N)$.*

Příklad 12. (Nim podruhé) Mějme tři hromádky sirek o 9, 10, resp. 14 sirkách. Hráč, který je na tahu, si vybere jednu hromádku a odebere z ní několik sirek. Z první hromádky je možné odebrat 1 až 3 sirky, z druhé 1 až 5 a z té poslední 1 až 7 sirek. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 13. (Laskerův Nim) Hra je stejná jako obyčejný Nim, ale navíc lze místo tahu rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky.

Nějaké další příklady

Příklad 14. (Čtverečky) Na šachovnici $n \times m$, kde n i m jsou alespoň 5, se dva hráči střídají v vybarvování políček. Jeden vždy vybarví čtverec 2×2, druhý libovolně orientované L-triomino. Žádné políčko nesmí být vybarveno dvakrát a ten, kdo nemůže táhnout, vyhrál. Ukažte, kdo z hráčů má vyhrávající strategii v závislosti na m, n a tom, který z hráčů začíná.

Příklad 15. (Čtvercové piškvorky) Hraje se na čtverečkovaném papíře 10×10. Ve svém tahu nakreslí hráč jeden svůj symbol do nějakého prázdného čtverečku. První hráč se snaží utvořit čtverec 2×2 ze svých symbolů a cílem druhého hráče je mu v tom zabránit.

Příklad 16. (Razítka) Začíná se na šachovnici 8×8. Hráč, který je na tahu, si vybere prázdné políčko a dá na něj razítko. Vybrané políčko musí hranou sousedit s tím předchozím. První hráč může dát razítko, kam chce. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 17. (Šachovnice) Na políčku $(x \geq 0, y \geq 0)$ stojí obyčejný šachový kůň. Hráč, který je na tahu, může udělat tah koněm, ale pouze takový, při němž kůň neopustí šachovnici (žádná jeho souřadnice nesmí být záporná) a součet jeho souřadnic klesne. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Jak dopadne hra, v níž bude několik koňů, každý na jiném počátečním políčku, a hráč může táhnout, kolika koni chce, ale vždy alespoň jedním? (MO 60–P–III–2)

Příklad 18. (Kayles) Dva kuželkáři stojí před řadou třinácti kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak šikovní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Návody

1. Zkuste si hru párkrát zahrát s malou čokoládou a počítejte, kolik tahů bude celkem hra mít.

4. První hráč vybere kostičku rohem sousedící s otrávenou kostičkou.

5. Je potřeba vyřešit problém, že kruhy, které obsahují střed kružnice, nejde kreslit po dvojicích symetricky podle tohoto středu.

6. Co se stane, když první hráč vytáhne jedničku? A co když ne?

7. Políčko vpravo dole.

8. Vyzkoušejte si prvních pár možných stavů.

Důkaz strategie na Nim. Pro druhou část důkazu si všimneme, že pokud jsme vzali kámen z hromádky, kde bylo n kamenů a po našem tahu jich tam zůstalo m, je Nim-součet nyní právě $m \oplus n$. Pro třetí část si stačí uvědomit, že pokud vezmeme libovolnou hromádku, na níž má počet kamenů jedničku na nejvyšším řádu, kde má jedničku Nim-součet všech hromádek, pak je Nim-součet všech hromádek kromě této menší než velikost této hromádky, takže ji můžeme zmenšit tak, aby se Nim-součet vynuloval.

10. Zkuste si napřed hru vyřešit pro případ, kdy jsou mince pouze na lichých schodech.

17. Nejprve si vyřešte pro jednoho koně. Dejte si pozor na to, že se nejedná o klasický součet her, protože můžeme hrát ve více hrách současně.

Literatura a zdroje

Většina příkladů z tohoto příspěvku byla převzata od *Filipa Hláska*, který je připravil na soustředění v Hojsově Stráži v roce 2011 a kterému tímto děkuji.

Počítání dvěma způsoby

Tomáš Novotný

Abstrakt. Počítání dvěma způsoby je velmi mocný nástroj k dokazování (nejen) kombinatorických identit. V příspěvku si ukážeme několik úloh, které lze touto technikou vyřešit a pokusíme se naučit způsob, jak řešení takových úloh vymýšlet.

Hlavní motivací pro využívání techniky počítání dvěma způsoby je elegantní přístup k spočítání nějakého údaje (obvykle součet mnoha netriviálních hodnot) či dokázání zadané rovnosti. To provedeme tak, že vytvoříme objekt, na jehož prvky můžeme nahlížet více způsoby. Tyto pohledy budou odpovídat hledaným hodnotám, jelikož však počítáme prvky stejného objektu, musí nám vždy vyjít stejné číslo.

Úloha. Spočítejte

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n}.$$

Řešení. Chceme se na tento součet podívat jako na reprezentaci nějaké situace – kombinační čísla v součtu naznačují, že nám půjde o všechny podmnožiny n-prvkové množiny, přičemž každá i-prvková podmnožina přispívá do součtu právě i. Můžeme si to tedy představit tak, že do místnosti s jedním papírem chodí postupně všechny možné skupinky z n orgů a každý z nich vždy udělá na papír jednu tečku.

Jeden způsob, jak tečky spočítat, je vyjádření počtu teček pomocí velikosti jednotlivých skupinek orgů – takto dostaneme součet zadaný v úloze. Druhým způsobem je spočtení, kolik teček udělá každý organizátor. To je však snadné, neboť každý organizátor jde do místnosti právě jednou s kteroukoli skupinkou ze zbylých organizátorů, kterých je celkem 2^{n-1}. Teček tedy bude $n \cdot 2^{n-1}$, což je hledané řešení.

K počítání dvěma způsoby se často hodí různé kombinatorické identity, několik z nich si zde ukážeme a zkusíme je odvodit.

Lehké příklady

Příklad 1. Dokažte

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 2. Na večírku si někteří lidé vzájemně potřásli rukou. Ukažte, že počet lidí, kteří si potřásli rukou lišekrát, je sudý.

Příklad 3. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Příklad 4. Dokažte
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Příklad 5. Nechť $\mathbb{P}$ je systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až n takových, že žádné 3 sousední prvky netvoří rostoucí posloupnost. Označme a_i průměrnou hodnotu na i-té pozici těchto permutací, tj.

$$a_i = \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} p_i}{|\mathbb{P}|}.$$

Čemu se rovná součet všech a_i?

Příklad 6. (Vandermondova identita) Dokažte

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Příklad 7. Označme $\mathbb{S}_n$ systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až n. Pro permutaci $p \in \mathbb{S}_n$ označme

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i.$$

Ukažte, že
$$4 \sum_{p\in\mathbb{S}_n} f(p) = (n^2+n)(n+1)!.$$

Příklad 8. V matematické olympiádě řešilo 45 účastníků šest příkladů, každý příklad byl vyřešen právě 25 řešiteli. Ukažte, že můžeme vybrat dva účastníky, kteří dohromady vyřešili vše.

Těžší příklady

Příklad 9. Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n+1-i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Příklad 10. Dokažte, že platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Příklad 11. Spočítejte

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}.$$

Příklad 12. (LYM-nerovnost) Buď A n-prvková množina, $\mathbb{S}$ systém podmnožin A takový, že žádné dvě množiny z $\mathbb{S}$ nejsou v inkluzi. Označme a_i počet i-prvkových množin v $\mathbb{S}$. Pak platí

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

Příklad 13. (Malá Fermatova věta) Ukažte, že je-li p prvočíslo, pak

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Příklad 14. (Cayleyho formule) Určete počet koster úplného grafu na n vrcholech.

Návody

1. Vybíráme $k+1$ z $n+1$ lidí. Prvního buď vybereme, anebo ne.

2. Označme uspořádanou dvojicí (x, y) to, že si x potřásl rukou s y. Porovnejte celkový počet těchto dvojic se součtem počtů potřesení od jednotlivých účastníků večírku.

3. Vybíráte podmnožiny n-prvkové množiny.

4. Jsou dva postupy, jak z n prvků vybrat podmnožiny A a B s $|A| = r$ a $|B| = k$ tak, aby $B \subseteq A$.

5. Podívejte se na součet z pohledu jednotlivých permutací.

6. Máte n děvčat a m hochů a chcete z nich vytvořit k-členný tým.

7. Určete, kolikrát se v součtu vyskytuje člen $i \cdot j$ a pak tyto členy posčítejte.

8. Všimněte si, že existuje účastník, který vyřešil alespoň čtyři úlohy a také existuje účastník, který vyřešil zbylé dvě.

9. Nakreslete si trojúhelník z kostiček se základnou délky $2n$, kde v i-tém patře jsou kostičky s číslem i. Kostičky pak postupně od kraje trojúhelníku odebírejte.

10. Nakreslete si čtvercovou mřížku o straně n a do políčka na pozici $[i, j]$ napište číslo $i \cdot j$. Sečtěte všechna čísla po řádcích a po „elkách“ od rohu $[1, 1]$.

11. Použijte podobnou myšlenku jako u motivační úlohy, zbylou sumu už spočítat umíte.

12. Pro každou množinu $S \in \mathbb{S}$ vytvořte všechny permutace n prvků takové, že prvních $|S|$ prvků bude z S. Těchto permutací bude nejvýše tolik jako všech permutací n prvků.

13. Spočítejte všechny řetězce délky p, kde každý znak je z a-prvkové abecedy a nejsou v nich všechny znaky stejné. Tyto řetězce poté můžete rozdělit na skupinky po p.

14. Spočtěte dvěma způsoby počet možností vytvoření zakořeněného stromu s n hranami orientovanými od kořene. Zkuste spočítat počet možných vytvoření z běžných stromů a také vytvářet strom po hranách.

Literatura a zdroje

[1] Martin Hora: *Počítání dvěma způsoby*, Sborník MKS, Hojsova stráž, 2016.
[2] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Sborník MKS, Staré Město, 2009.
[3] *Wikipedia: Double counting*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Double_counting_(proof_technique)

Cauchy–Schwarzova nerovnost

Marian Poljak

Abstrakt. Zkráceně CS nerovnost – jeden z nejmocnějších nástrojů pro odhadování algebraických výrazů. I když nerovností na mezinárodních soutěží ubývá, umět používat CS nerovnost je velmi důležité a pro úspěšného olympionika to představuje nutnost. Přitom si tyto techniky lze poměrně lehce osvojit – rozpoznat, jestli nám v nějakém příkladě bude CS nerovnost užitečná, není zas tak těžké. Její aplikace je potom už jen otázkou cviku. Tak pojďme na to!

Věta. (Cauchy–Schwarzova nerovnost) *Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou libovolná reálná čísla. Pak platí*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Důkaz. Uvažujme dvě n-tice libovolných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$.

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

je zřejmě nezáporný výraz pro libovolné reálné x. Jelikož je zároveň v proměnné x kvadratický, je jeho diskriminant nekladný: $(2a_1b_1 + \dots + 2a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$, což je ekvivalentní znění CS nerovnosti. □

Poznámka. Rovnost nastává právě tehdy, když existuje reálné λ takové, že $b_i = a_i\lambda$ pro všechna i od jedné do n.

Příklad 1. Dokažte nerovnost $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$ pro kladná a, b, c.

Příklad 2. Pro x, y, z reálná dokažte $14(x^2+y^2+z^2) \geq (x+2y+3z)^2$.

Cvičení 3. (Základní a užitečné fígle) Dokažte:

(1) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,
(2) $n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}$,
(3) $(a_1 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}^+$,
(4) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$ pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$,
(5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$, pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která to má smysl.

Příklad 4. Dokažte nerovnost pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Cauchy–Schwarzova nerovnost má dva obzvlášť užitečné tvary – oba jsou sice ekvivalentní jejímu znění, ale výrazně usnadňují intuici.

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nezáporná a $b_1, b_2, \ldots b_n$ kladná. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} .$$

Příklad 5. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a+b+c+d = 1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} .$$

(Irská MO)

Příklad 6. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Příklad 7. Nechť a, b, c jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2} .$$

(IMO 1995)

Tvrzení. (CS na odmocniny) *Buď n přirozené číslo* a $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *čísla kladná reálná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Cvičení 8. Dokažte následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$.

Příklad 9. Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

Střední příklady

Příklad 10. Pro kladná reálná a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} .$$

(Turnaj měst 1998)

Příklad 11. Pro nezáporná reálná a, b dokažte:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}} \; .$$

(Celostátko MO 2014)

Příklad 12. Určete všechny n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \cdots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2.$$

(Kraj MO, 1981/1982)

Příklad 13. Ukažte, že pro kladná reálná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10} \; .$$

Těžší příklady

Příklad 14. Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

určete, jaké nejvyšší hodnoty může nabývat e. (7. USAMO, 1978)

Příklad 15. Ukažte, že pro $x, y, z \geq 1$ platí

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

Příklad 16. Pro kladná reálná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Příklad 17. Kladná reálná x, y, z splňují $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Dokažte

$$\frac{x^3}{\sqrt{y^2+z^2+7}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^2+x^2+7}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+7}} \geq 1.$$

Příklad 18. Mějme taková $a, b, c \in \mathbb{R}$, že $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^5+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^5} \geq 1.$$

Literatura a zdroje

[1] M. Rolínek, P. Šalom: *Zdolávání nerovností*, PraSečí seriál, 29. ročník.
[2] David Hruška: *Diskriminant a Cauchy–Schwarzova nerovnost*, Hojsovka, 2016
[3] J. Švrček, P. Calábek: *Metody řešení soustav algebraických rovnic.*

Matice ze všech stran

Martin „E.T.“ Sýkora

Abstrakt. Příspěvek shrnuje nejzákladnější pojmy spojené s maticemi – maticové operace, determinant, vlastní čísla a vektory – a propojuje je do jednoho celku.

O maticích toho bylo napsáno mnoho a mnoho toho ještě napsáno bude. Tento příspěvek ani přednáška nemají za cíl pouštět se do pokročilé práce s maticemi, ale zavést nejzákladnější pojmy a co nejelementárněji, ale přesto přesně, odhalit jejich souvislosti. Řekneme si také, k čemu matice jsou, proč se s nimi počítá, proč některé zdánlivě krásné postupy v reálném výpočtu téměř nikdo nepoužívá a jak se ve zjednodušené praxi opravdu postupuje.

Definice. Reálnou (resp. komplexní) *maticí A typu $m \times n$* rozumíme tabulku o m řádcích a n sloupcích, jejíž políčka obsahují reálná (resp. komplexní) čísla. Těmto políčkům říkáme prvky matice A a prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme a_{ij}.

Matice můžeme sčítat a násobit podle následujících pravidel:

Definice. (Sčítání matic) Mějme matice A a B typu $m \times n$ nad stejným tělesem. Pak jejich součtem je matice C typu $m \times n$ nad stejným tělesem, pro kterou platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Pro lepší pochopení násobení matic, které je o něco složitější, si nejprve zadefinujeme pár základních pojmů o tzv. *vektorech*.

Definice. Mějme vektory (tak říkáme maticím typu $1 \times n$, resp. $n \times 1$) $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Pak číslo $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ nazýváme *skalární součin vektorů* u a v.

Cvičení. Dokažte, že vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$ jsou kolmé, právě když $u \cdot v = 0$.

Definice. Mějme vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$. Pak řekneme, že vektor u je *lineární kombinací* těchto vektorů s koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$, když $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ pro nějaká reálná čísla a_i.

Nyní se můžeme pustit do definice násobení matic.

Definice. (Násobení matic) Mějme matici A typu $m \times n$ nad tělesem T a matici B typu $n \times l$ nad stejným tělesem. Pak součinem matic AB rozumíme matici C typu $m \times l$, kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Prvek součinu matic na pozici i, j je tedy skalární součin i-tého řádku první matice a j-tého sloupce druhé matice.

Na násobení matic existují další dva ekvivalentní pohledy. Jednak i-tý sloupec součinu dvou matic je lineární kombinací sloupců první matice s koeficienty z i-tého sloupce druhé matice. Podobně je j-tý řádek součinu lineární kombinací řádků druhé matice s koeficienty v j-tém řádku matice první.

Jaká definice je pro „nejvýhodnější“ přitom záleží na problému, který řešíme. Za pomoci první (tzv. *prvkové*) definice lze poměrně snadno dokázat, že sčítání i násobení matic jsou asociativní (tzn. $(AB)C = A(BC)$). Naproti tomu násobení matic není komutativní (tzn. záleží na pořadí činitelů).

Cvičení. Najděte dvě reálné matice řádu 2×2, které spolu nekomutují. Najděte naopak matici, která komutuje se všemi maticemi stejného řádu.

A k čemu to je?

Definovali jsme si podivné tabulky s čísly, ale zatím jsme si vůbec neřekli, k čemu mohou být dobré. Tak to tedy zkusme napravit. Mějme nějakou soustavu lineárních algebraických rovnic. Tu typicky řešíme tak, že rovnice násobíme vhodnými čísly a navzájem sčítáme a odčítáme. Někdy je ale poměrně složité vyznat se ve všech těch výrazech, které mohou být dlouhé a složité. Lze se tedy dohodnout na následujícím zjednodušení notace: ze soustavy vypustíme názvy neznámých (tj. nebudeme psát $x, y, z, \dots$). Místo toho se domluvíme, že koeficienty náležející jedné proměnné budeme psát vždy pod sebe do jednoho sloupečku. Dále nebudeme psát „+“ mezi výrazy, bude stačit mezera, a místo rovnítek nakreslíme svislou čáru. Celé schéma pak uzávorkujeme, čímž získáme matici, která reprezentuje danou soustavu rovnic.

Příklad. Soustava

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4, \\ 2x + y &= -1, \\ -x + 2z &= 0, \end{aligned}$$

lze reprezentovat maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

S touto maticí můžeme dělat stejné úpravy jako se soustavou rovnic – prohazovat řádky, násobit řádky číslem a sčítat/odčítat řádky od sebe.[1]

Cvičení. Zamyslete se, že z elementárních řádkových úprav lze složit algoritmus, který soustavu vyřeší.

[1] Těmto úpravám říkáme elementární řádkové úpravy.

Připomeňme, že n-složkový vektor můžeme považovat za matici typu $m \times 1$, tedy se můžeme na matici typu $n \times m$ dívat jako na zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, které vektoru v přiřadí vektor Av, kde násobení chápeme maticově. Příklad výše pak lze přeformulovat jako hledání řešení rovnice $Av = b$, kde A je matice koeficientů levých stran, vektor b je vektor pravých stran a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ je vektor neznámých.

Jak řešit tyto rovnice je sice známo, ale přesný výpočet je poměrně složitý a kvůli (například) zaokrouhlovacím chybám (viz další cvičení) je pro větší počet rovnic a proměnných na počítači téměř nerealizovatelný. Způsoby jak tento problém obejít se zabývá numerická matematika.

Cvičení. Řešte maticovou soustavu $Av = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 5 \\ -0,2 & -11 \end{pmatrix}$$

a $b = (2, 2)$. Následně řešte obdobnou rovnici s levou stranou

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 5 \\ -0,3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Porovnejte získaná řešení. Lze usuzovat, že malé změny v zadání, resp. malé zaokrouhlovací chyby v průběhu výpočtu garantují přesné řešení?

Ukázali jsme si, jak matice reprezentuje nějaké *lineární zobrazení* (tzn. splňující $f(u + v) = f(u) + f(v)$ a $f(tu) = tf(u)$ pro číslo t a vektory u a v). Funguje to ale i naopak – ke každému lineárnímu zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ náleží matice A typu $n \times m$, že pro všechny $v \in \mathbb{R}^m$ platí $f(v) = Av$. Matice nám tedy dávají do ruky nástroj umožňující zacházet s geometrickými objekty pomocí čísel, což je například pro počítač výrazně stravitelnější.

Cvičení. Nalezněte matice těchto lineárních zobrazení: identické zobrazení, osová souměrnost, středová souměrnost, stejnolehlost. Na co se při nich zobrazí čtverec s vrcholy $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$?

Cvičení. Nalezněte geometrický význam lineárního zobrazení určeného maticí

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Cvičení. (Záludné na pochopení maticového násobení) Mějme výraz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Když uzávorkujeme druhou a třetí matici jako první k vynásobení, pak součin nelze provést. Když ale uzávorkujeme první dvě a druhé dvě matice zvlášť, tak z první závorky vznikne číslo, z druhé matice typu 3×3, a ty vynásobit lze. Tím jsme dostali spor s asociativitou maticového násobení. V čem je zakopaný pes?

Determinanty

Dále se zaměříme jen na čtvercové matice řádu N, tedy matice s N řádky i sloupci. Pro tyto matice se definuje tzv. *determinant*. Na opravdu pořádné zadefinování není v přednášce prostor, my si ale vystačíme se stále celkem pořádným:

Definice. *Determinant* čtvercové matice A (značíme $\det(A)$) je číslo definované následujícím rekurzivním způsobem:

(1) Determinantem matice řádu 1 je její jediný prvek.
(2) Pro matici A řádu N, kde $N \geq 2$ definujeme

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i,1}),$$

kde $A^{i,j}$ je matice vzniklá z A vynecháním i-tého sloupce a j-tého řádku.

Příklad. Spočtěte determinant matic řádu dva a tři.

Poznámka. Determinant má navzdory své složité definici některé velmi praktické vlastnosti a dokonce i geometrickou interpretaci. Mějme v $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^3$) dva (resp. tři) vektory. Pak pro matici A řádu řádu dva (resp. tři) dává $|\det(A)|$ podíl obsahů (resp. objemů) rovnoběžníků (resp. rovnoběžnostěnů) určených danými vektory po a před provedením zobrazení určeného maticí A.

Příklad. Spočtěte determinant matice, která má mimo hlavní diagonálu samé nuly, resp. obecněji té, která má nuly pod hlavní diagonálou.[2]

Příklad. Spočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cvičení. Rozmyslete si, jaký vliv mají elementární řádkové úpravy na determinant.

Cvičení. Co umíte říct o determinantu matice A, pro kterou existuje nenulové řešení rovnice $Av = 0$?

[2] Takovým maticím říkáme diagonální, resp. horní trojúhelníková.

Vlastní čísla a vektory

Díváme-li se na matici jako na příslušné lineární zobrazení, které nějak deformuje původní prostor, jsou zajímavé a význačné ty směry, které naše zobrazení zachovává, tedy vektor takového směru se zobrazí na svůj násobek a neotočí se někam pryč.

Definice. Číslo λ nazveme *vlastním číslem* matice A, pokud existuje nenulový vektor v takový, že $Av = \lambda v$. Každému takovému vektoru řekneme *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ.

Označíme-li I jednotkovou matici, tedy matici diagonální s jedničkami na hlavní diagonále, pak můžeme podmínku rovnou z definice determinantu přepsat jako

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ Av &= \lambda I v, \\ (A - \lambda I)v &= 0. \end{aligned}$$

Hledáme tedy nenulové řešení maticové rovnice s nulovou pravou stranou. Jak jsme si rozmysleli v posledním cvičení, to je ekvivalentní rovnosti $\det(A - \lambda I) = 0$.

Cvičení. Rozmyslete si, že hledání vlastního čísla je vlastně hledání kořenů polynomu stupně N, kde N je řád matice A.

Cvičení. Ukažte, že reálná matice řádu 3×3 má alespoň jedno vlastní číslo.

Příklad. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hledání takových kořenů je ale obtížné a pro $N \geq 5$ dokonce v obecném případě nemožné, protože pro některé rovnice pátého a vyššího stupně nelze přesně najít jejich řešení.

Pokud tedy hledáme vlastní čísla či vektory (a spokojíme-li se s ne úplně přesným výsledkem), je vhodné použít jiný postup.

Pro jednoduchost předpokládejme, že existují (jednotkové) vlastní vektory $v_1, v_2, \ldots, v_N$ příslušející po řadě vlastním číslům $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_N|$, kde λ_1 je v absolutní hodnotě ostře největší. Navíc předpokládejme, že každý vektor $v \in \mathbb{R}^N$ lze jednoznačně zapsat jako $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_N v_N$. Pak lze ukázat, že se posloupnost

$$u_0 = v, u_1 = \frac{Av}{\lambda_1}, \ldots, u_n = \frac{A^n v}{\lambda_1^n}, \ldots$$

blíží (neboli *konverguje k*) k vektoru $b_1 v_1$ pro každý vektor v, pro který $v_1 \neq 0$. Navíc posloupnost

$$u_0 \cdot Au_0, u_1 \cdot Au_1, \ldots, u_n \cdot Au_n, \ldots,$$

kde tečka značí skalární součin, konverguje k $b_1^2\lambda_1$.

Tento postup má dva háčky. Zaprvé sice víme, že posloupnosti konvergují k vlastnímu číslu a vektoru, ale nevíme jak rychle. Jinak řečeno, nevíme, kolik kroků posloupnosti musíme udělat, abychom se rozumně přiblížili hledaným hodnotám. Pokud se ale vlastní čísla liší výrazně, kroků není třeba moc.

Zadruhé má tento postup poměrně silné předpoklady. Asi nejtajemnější z nich je ten poslední, který říká, že vlastní vektory tvoří tzv. *bázi*. Pro symetrické matice to ale je splněno a třeba ve fyzikálních úlohách často figurují symetrické matice, takže tento předpoklad není až tak moc omezující.

Literatura a zdroje

[1] Helča Svobodová: *Matice* 2×2, Uhelná Příbram, 2014.

Obsahy

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. V příspěvku se podíváme na několik vlastností obsahů a spočítáme si několik příkladů.

Úmluva. Obsah trojúhelníku ABC, resp. čtyřúhelníku $ABCD$, budeme značit jako $[ABC]$, resp. $[ABCD]$.

Pomocná tvrzení

Na práci s obsahy budeme občas potřebovat několik lemmátek a tvrzeníček.

Lemma. *Nechť čtyři různé body A, B, C, D splňují $AB \parallel CD$. Potom $[ABC] = [ABD]$ a $[ACD] = [BCD]$.*

Příklad 1. Na stranách BC a DA rovnoběžníku $ABCD$ leží body E a F tak, že $BE = DF$. Navíc na straně CD leží bod K. Přímka EF protíná přímky AK a BK v bodech P a Q. Ukažte, že $[AFP] + [BQE] = [PKQ]$.

Tvrzení. *Přímky a a b se protínají v bodě O. Nechť ℓ_1 a ℓ_2 jsou dvě rovnoběžné přímky protínající a a b v bodech A_1 a B_1, resp. A_2 a B_2. Potom*

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$

Lemma. *Nechť ABC a ABD jsou trojúhelníky. Označme průsečík AB a CD jako P. Pak*

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CP}{DP}.$$

Příklad 2. (van Aubelova věta) V trojúhelníku ABC leží bod P. Označme průsečíky AP, BP, CP s BC, CA, AB jako D, E, F. Ukažte, že potom

$$\frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} = \frac{BP}{PE}.$$

Tvrzení. *Nechť body C a D leží na stejné straně od přímky AB a bod Q leží uvnitř úsečky CD. Označme si poměr $\frac{DQ}{DC}$ jako t. Potom*

$$[ABQ] = t[ABC] + (1-t)[ABD].$$

Příklad 3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ si označíme středy diagonál AC a BD jako M a N a jejich průsečík jako E. Buď F takový bod, že $MENF$ je rovnoběžník. Dokažte, že

$$2[ABF] = [BCE] + [DAE].$$

Jednodušší příklady

Příklad 4. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a body K a L, resp. M a N, leží na straně AB, resp. CD, tak, že platí $AK = KL = LB$, resp. $CM = MN = ND$. Ukažte, že $3[KLMN] = [ABCD]$.

Příklad 5. Nechť M a N jsou středy stran AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Úsečky AN a DM, resp. BN a CM, se protínají v bodě P, resp. Q. Ukažte, že $[APD] + [BQC] = [MPNQ]$. (MKS 35-4-5)

Příklad 6. Na stranách AB a BC trojúhelníka ABC leží body X a Y tak, že $\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC}$. Označme si průsečík úseček AY a CX jako P. Ukažte, že $[XPYB] = [AXC]$.

Příklad 7. Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, na jehož stranách AB a AD leží body E a F. Přímka EF protíná přímky CB a CD v bodech P a Q. Ukažte že $[PAQ] = [ECF]$.

Složitější příklady

Příklad 8. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, jehož úhly u A a B se sečtou na $90°$. Označme střed CD jako M. V závislosti na délkách úseček AD a BC vyjádřete $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Příklad 9. Nechť ABC je trojúhelník. Na polopřímce opačné k BC, resp. CA, resp. AB, leží bod X, resp. Y, resp. Z. Označme

$$x = \frac{XB}{BC}, \quad y = \frac{YC}{CA}, \quad z = \frac{ZA}{AB}.$$

Ukažte, že

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = (1+x)(1+y)(1+z) - xyz.$$

Příklad 10. (Newtonova přímka) Ukažte, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ leží středy úseček AC a BD na přímce procházející středem kružnice vepsané.

Příklad 11. Označme si jako K, L, M, N, O, P a Q postupně středy stran AB, BC, CD, DE, EF a FA konvexního šestiúhelníku. Dokažte, že pro všechny body X ležící ve vnitřku $ABCDEF$ je hodnota $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$ stejná.

Příklad 12. Na stranách AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ leží body K a L tak, že $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LD}$. Dokažte, že $[ALB] + [CKD] = [ABCD]$.

Příklad 13. Dokažte, že všechny přímky, které dělí obvod trojúhelníka ve stejném (nenulovém) poměru jako jeho obsah, procházejí jedním bodem. (MKS 30-7-8)

Příklad 14. Rado si nakreslil konvexní šestiúhelník. Všiml si, že pokud do něj nakreslí libovolnou z úseček spojující středy dvou protilehlých stran, rozdělí tato úsečka šestiúhelník na dva pětiúhelníky se stejným obsahem. Dokažte, že se tyto tři úsečky protínají v jednom bodě.

Příklad 15. Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři. (MKS 36-8-5b)

Příklad 16. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má obsah 6. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB má obsah nanejvýš 1.

Literatura a zdroje

Většina příkladů v této přednášce je převzatá z dokumentu *Computing the area* od Waldemara Pompeho.

Přerozstříhatelnost

Felici Nero

Abstrakt. Příspěvek se zabývá tím, které dvojice geometrických útvarů na sebe lze za určitých pravidel přeskládat.

O co jde?

Definice. Řekneme, že geometrický útvar $M \subset \mathbb{R}^n$ lze *přerozstříhat* na geometrický útvar $N \subset \mathbb{R}^n$, jestliže útvar M lze pomocí rovných řezů rozdělit na konečný počet částí, z nichž lze složit útvar N.

Přirozeně vyvstává otázka, které všechny dvojice útvarů na sebe lze přerozstříhat.

Mnohoúhelníky

V letech 1832 a 1835 dokázali nezávisle na sobě W. Bolyai a P. Gerwien následující pozoruhodnou větu

Věta. (Bolyaiova-Gerwienova) *Každé dva mnohoúhelníky o stejném obsahu na sebe lze přerozstříhat.*

Důkaz provedeme pomocí série cvičení.

Cvičení 1. Každý mnohoúhelník lze rozstříhat na trojúhelníky.

Cvičení 2. Každý trojúhelník lze přerozstříhat na obdélník.

Cvičení 3. Každý obdélník lze přerozstříhat na čtverec.

Cvičení 4. Dva čtverce lze přerozstříhat na jeden čtverec.

Mnohostěny

Postup o dimenzi výš je již o něco náročnější. Otázka, zda každé dva mnohostěny o stejném objemu jsou přerozstříhatelné, byla v roce 1900 vyhlášena jako třetí z tzv. *Hilbertových problémů.* Ještě v témže roce byla podána odpověď.

Věta. (Max Dehn) *Krychli nelze přerozstříhat na pravidelný čtyřstěn.*

Abysme toto mohli dokázat, zavedeme si takzvaný Dehnův invariant. Ten každému mnohostěnu A přiřadí číslo $f_A \in \mathbb{R}$ takové, že je-li $A_1, \dots A_k$ nějaké rozřezání mnohostěnu A, platí

$$f_A = f_{A_1} + \cdots + f_{A_k}$$

(a které navíc splňuje nějaké další podmínky, které zde ovšem nebudeme vypisovat).

Tvrzení. *Pro krychli A a pravidelný čtyřstěn B o stejném objemu platí $f_A \neq f_B$.*

V roce 1965 dokázal Jean-Pierre Sydler následující zesílení Dehnovy metody.

Věta. *Mnohostěny A a B jsou přerozstříhatelné právě když $f_A = f_B$.*

Změna pravidel a následné šílenosti

Zajímavá otázka je, co se stane, pokud si přeskládávání trochu zjednodušíme a místo řezů uvážíme rozklady těles na libovolné podmnožiny.

Definice. Řekneme, že geometrický útvar $M \subset \mathbb{R}^n$ lze *přeskládat* na geometrický útvar $N \subset \mathbb{R}^n$, jestliže útvar M lze zapsat jako sjednocení konečně mnoha svých podmnožin, z nichž lze složit (pomocí shodných transformací) útvar N.

Výsledky jsou šokující!

Tvrzení. (Banachův-Tarského paradox – slabá verze) *Kouli o objemu jedna lze přeskládat na kouli o objemu dva.*

Tvrzení. (Banachův-Tarského paradox – silná verze) *Libovolné dvě omezené množiny o kladném objemu (s neprázdným vnitřkem) na sebe lze přeskládat.*

Ne, opravdu to není překlep! Za vším stojí o něco uvěřitelnější, avšak podstatně méně formální tvrzení.

Tvrzení. *Existují fakt šílené[1] množiny!*

Pár stříhacích příkladů

Příklad 5. Rozdělte pravidelný šestiúhelník na osm shodných mnohoúhelníků. (ARO 1988)

Příklad 6. Nalezněte trojúhelník, který lze rozdělit na 5 shodných trojúhelníků. (ARO 1988)

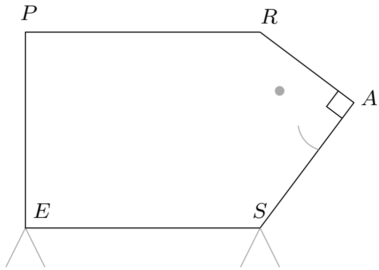
Příklad 7. Ukažte, že tětivový čtyřúhelník lze rozřezat na n tětivových čtyřúhelníků, kdykoliv $n \geq 4$. (IMO 1972)

Příklad 8. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je těžnice AM delší než strana AB. Ukažte, že trojúhelník lze rozřezat na tři části, z nichž lze složit kosočtverec. (ARO 2010)

[1] Pokročilý čtenář nechť čte *neměřitelné množiny.*

Příklad 9. Matěj měl o prázdninách narozeniny! Dostal k nim dort ve tvaru PraSátka – tj. pětiúhelníku $PRASE$ takového, že $PRSE$ je obdélník a RAS je (ne nutně rovnoramenný) pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u A. Povšiml si, že obsah celého dortu je roven $|PR|^2$. Pak si ale uvědomil, že být o rok blíže smrti není vůbec šťastná událost a že do ní nechce PraSátko tahat, a proto se rozhodl předělat dort do nudnějšího čtvercového tvaru. Ukažte, že umí dvěma rovnými řezy rozdělit pětiúhelník na tři díly tak, že bude možné je přeskládat na čtverec (dílky je možné posouvat, otáčet, a protože je to odolný dort, tak dokonce i překlápět).

(MKS 36-1-6)



Literatura a zdroje

Tento příspěvek je takřka beze změn převzat od *Michala „Kennyho“ Rolínka*, který jej vytvořil na soustředění v Hojsově Stráži (2011) a kterému tímto děkuji (a toto poděkování je zkopírované zpod jednoho Vikiho příspěvku).

[1] E. C. Zeeman: *On Hilbert's Third Problem*, The Mathematical Gazette Vol. 86, No. 506 (Jul., 2002), pp. 241-247

[2] Titu Andreescu, Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston, 2009

[3] *http://www.mathlinks.ro*

[4] *http://wikipedia.org*

Obsah