5. série

Kombinatorika, kombinační čísla

1. Úloha

Dokažte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

2. Úloha

Kolik existuje řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, kde x_i jsou (neznámá) celá kladná čísla a $n \in \mathbb{N}$ je parametr?

3. Úloha

Kolik různých vět lze bez ohledu na význam sestavit ze všech písmen následující věty?

Aequam memento rebus in arduis servare mentem.

4. Úloha

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Zjistěte kolik je uspořádaných n-tic $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $a_i \in \{0, 1\}$, že pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je počet prvků množiny $\{i : i \leq k,\ a_i = 0\}$ větší nebo roven počtu prvků množiny $\{i : i \leq k,\ a_i = 1\}$.

5. Úloha

Dokažte:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i (n+1-i)^n = 0.$$

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Tvrzení (jak jinak) dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ tvrzení platí. (prázdný součet na levé straně je nula). Je-li nyní $n \geq 0$ a platí tvrzení pro n, je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = \\ = (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 = \\ = (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\,,\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno pro všechna přirozená n.

2. ÚLOHA

Zadání sice bohužel není zcela jasné (není zřejmé, jestli k má být také parametr nebo neznámá). Naštěstí si drtivá většina řešitelů úlohu vyložila stejně, to jest že počet neznámých je pevný. Řešení takové úlohy také předvedeme.

Pro $k > n$ není co řešit. Je-li $1 \leq k \leq n$, substitucí $y_j = x_j - 1$ rovnici převedeme na rovnici

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k; \qquad y_j \geq 0\,.$$

Snadno nahlédneme, že počet řešení se zachová. Každé řešení můžeme reprezentovat následujícím způsobem seřazení $n - k$ bílých a $k - 1$ černých kuliček: nejprve y_1 bílých, pak jedna černá, pak y_2 bílých, opět jedna černá atd., na konci bude y_k bílých (čísla y_j mohou být rovna i nule). Ověřte si, že každému řešení odpovídá jedno uspořádání kuliček a naopak že každému uspořádání odpovídá právě jedno řešení. Počet řešení je tedy roven počtu uspořádání, což je $\binom{n-1}{k-1}$.

3. ÚLOHA

Nejdříve se zamyslíme nad tím, kolika způsoby lze srovnat písmena. Všichni řešitelé tvrdí, že věta má 39 písmen, doufejme, že mají pravdu. Kdyby byla všechna různá, bylo by způsobů srovnání 39!. Všechna nejsou různá, musíme tedy počet vydělit počtem těch permutací, které dávají stejný výsledek. To jest součinem čísel typu $k!$ za každé k-krát se vyskytnuvší písmeno. Tak dojdeme k počtu

$$\frac{39!}{4! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!}$$

(za správnost ručí *Radek Erban*). Z každé posloupnosti lze vytvořit větu tak, že mezi některá písmena vložíme mezeru. Pozic pro mezery je 38, na každé můžeme dát nebo nedat mezeru, celkový počet tedy dostaneme po vynásobení číslem 2^{38} (někteří řešitelé počítali jen ty věty, které mají sedm slov, pak bychom místo 2^{38} vzali $\binom{38}{6}$). Celkem tedy je možností

$$\frac{39!}{4!\cdot 8!\cdot 2!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 3!}\cdot 2^{38}=\frac{2^{17}\cdot 39!}{3^8\cdot 5^2\cdot 7}$$

(podle týchž pramenů).

4. Úloha

Přeloženo do češtiny, chce se po nás určit, kolik je těch n-tic nul a jedniček, ve kterých nejen je aspoň tolik nul jako jedniček, ale navíc má tuto vlastnost i kterákoli počáteční k-tice. V řeči procházek po čtvercové síti[1] se jedná o procházky délky n, které jsou celé v dolní polorovině určené hlavní diagonálou (přímkou $x=y$).

Řešme úlohu nejprve pro sudé n. Všech procházek je 2^n; zjistěme, kolik je nepříznivých, to jest těch, kdy se někdy dostaneme ostře nad hlavní diagonálu. Každá taková musí procházet nějakým bodem typu $(j,j+1)$ (kreslete si to). Uvažujme nyní nějakou takovou procházku a C označme bod tohoto typu, pro který je j nejmenší. Překlopíme-li úsek cesty od bodu C podle přímky $y=x+1$, dostaneme jinou nevyhovující procházku délky n. Protože n je sudé, nemůže na přímce $y=x+1$ ležet konec cesty; není tedy těžké nahlédnout, že uvedené překlopení nám dává vzájemně jednoznačné přiřazení mezi těmi špatnými procházkami, které končí nad přímkou $y=x+1$ a těmi, které končí pod ní. Každá, která končí nad touto přímkou, je ovšem určitě špatná. Dohromady jich je

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{j}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\binom{n}{j}+\binom{n}{n-j}\right)=\frac{1}{2}\left((1+1)^n-\binom{n}{\frac{n}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(2^n-\binom{n}{\frac{n}{2}}\right).$$

Těch špatných, které končí pod přímkou je také tolik, všech procházek je 2^n, dobrých tedy zbývá $\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Pro liché n by šla provést stejná úvaha, o něco jednodušší však je uvědomit si, že dobré $(2n-1)$-tice vždy obsahují víc nul než jedniček a dobré $2n$-tice jsou tedy právě ty, které z nich dostaneme přidáním nuly nebo jedničky. Počet pro $2n-1$ je tedy polovinou počtu pro $2n$, t.j.

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n}=\frac{1}{2}\left(\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\binom{2n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}.$$

Celkově je tedy hledaný počet roven $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$, kde $[x]$ znamená celou část čísla x.

[1] n-tici se přiřadí procházka tak, že vyjdeme z bodu $(0,0)$ a nulám odpovídá krok doprava, jedničkám nahoru

5. ÚLOHA

Malým nedopatřením se stalo, že pro $n = 0$ tvrzení neplatí. Naštěstí si toho (až na jednu výjimku) nikdo nevšiml. Budeme tedy tvrzení dokazovat pro $n \geq 1$. Nejprve jedno základní tvrzení.

Lemma: (princip inkluze a exkluze)
Pro libovolné množiny $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| .$$

Důkaz: Ono je to v podstatě jasné, jen si uvědomit, co vlastně tvrzení říká. Počet prvků sjednocení se nejprve snažíme počítat tak, že sečteme počty prvků jednotlivých množin (první suma). Jenže tím jsme některé prvky započítali dvakrát, tak odečteme počty prvků průniků typu $A_i \cap A_j$. Tak pokračujeme dále. Je-li prvek x v právě k množinách, pak ho v první sumě započítáváme k-krát se znaménkem plus, ve druhé $\binom{k}{2}$ se znaménkem minus, ve třetí $\binom{k}{3}$ se znaménkem plus atd. Celkem je ale

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} = 1 - (1-1)^k = 1 .$$

Nyní toto tvrzení využijeme pro speciální množiny. Buď $M = \{1, \ldots, n+1\}$, A_j (pro $1 \leq j \leq n+1$) množina těch n-prvkových variací s opakováním (uspořádaných n-tic prvků) z množiny M, které neobsahují prvek j. Máme-li $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n+1$, $p \leq n+1$, není těžké nahlédnout, že

$$\left| A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p} \right| = (n+1-p)^n.$$

Vypustíme-li nyní na množiny $A_1, \ldots, A_{n+1}$ princip inkluze a exkluze, je vidět, že v t-té sumě na pravé straně sčítáme vždy stejná čísla $(n+1-t)^n$ v počtu $\binom{n+1}{t}$. Poslední člen je roven nule, napravo je tedy součet

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i} (n+1-i)^n,$$

jenž se podle lemmatu rovná počtu prvků sjednocení A_i. To jsou ty uspořádané n-tice z $\{1, \ldots, n+1\}$, které některé z čísel neobsahují. Žádná uspořádaná n-tice však nemůže obsahovat všech $n+1$ čísel, je tedy součet roven $(n+1)^n$, což je ovšem rovno $\binom{n+1}{0}(-1)^0(n+1-0)^n$, tedy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i (n+1-i)^n = (n+1)^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i} (n+1-i)^n = 0 ,$$

což je to, co jsme chtěli *(Uff!)*.