7. série

Od každého něco

1. ÚLOHA

Máte dáno liché přirozené číslo m. Najděte nejmenší přirozené $n \geq 1$ tak, aby $m^n - 1$ bylo beze zbytku dělitelné číslem 2^{1993}.

2. ÚLOHA

Buď $n > 2$ přirozené číslo a T množina uspořádaných n-tic nul a jedniček taková, že libovolné dva její prvky se liší aspoň na třech místech. Dokažte, že T obsahuje nejvýše $\frac{2^n}{n+1}$ n-tic.

3. ÚLOHA

V prostoru je dána rovina. Jak umísit do prostoru pravidelný dvanáctistěn tak, aby jeho průmět do oné roviny byl největší?

4. ÚLOHA

Řešte funkcionální rovnici

$$\begin{aligned}(1-\cos(x+y))(f(x-y+z)+f(-x+y+z))-f(z+z\cos(x+y))+\\ +2f(z)\cos(x+y)-\cos^2(x+y)f(z)=f(z-y)-f(-y),\end{aligned}$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5. ÚLOHA

Předpokládejme, že je známo, že pro libovolný polynom P nabývá funkce $x \mapsto |P(x)|$ na libovolném uzavřeném intervalu svého maxima. Najděte polynom nejvýše druhého stupně $P(x) = ax^2 + bx + c$, pro nějž je maximum výrazu

$$\left|P(x) - x^3\right|$$

na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ nejmenší.

Řešení 7. série

1. Úloha

Nejprve ukážeme, že stačí hledat n jako mocninu dvojky. Pokud je l liché, je

$$m^{kl} - 1 = (m^k)^l - 1 = (m^k - 1)(m^{k(l-1)} + m^{k(l-2)} + \cdots + 1),$$

druhá závorka obsahuje součet l lichých čísel, je tedy lichá. Platí tedy

$$2^a \mid m^{2^k l} - 1 \implies 2^a \mid m^{2^k} - 1.$$

Dále si uvědomme vztah

$$(2^k l + 1)^2 = 2^{2k} l + 2^{k+1} l + 1.$$

Vidíme, že pro $k > 1$ je $2k > k + 1$, a tedy $(2^k l + 1)^2$ lze psát ve tvaru $2^{k+1} l_1 + 1$ (pro nějaké l_1 liché). Jinak máme $(2l+1)^2 - 1 = 4l(l+1)$ a mocnina dvojky, která přesně dělí toto číslo je o dvě větší než mocnina dvojky, která přesně dělí $l + 1$. Zapíšeme-li $m - 1$ (což je sudé číslo) ve tvaru $2^k l$, je

- pro $k \geq 1993$ rovno $n = 1$;
- pro $k < 1993$, $k > 1$ rovno $n = 1993 - (k - 1)$;
- pro $k < 1993$, $k = 1$ rovno $n = 2 + 1993 - (2 + \operatorname{ord}_2(l + 1))$, to jest $n = 1993 - ord_2(l + 1)$,

kde $\operatorname{ord}_p n$ značí exponent u prvočísla p při prvočíselném rozkladu čísla n. Ve druhém případě je totiž $m^j - 1$ dělitelné vždy právě mocninou 2^{k+j-1}; ve třetím je mocnina, která přesně dělí $m^2 - 1$ rovna $2^{2+\operatorname{ord}_2(l+1)}$ a dál už se to zvyšuje po jedné.

2. Úloha

Dvě n-tice nazveme sousední, jestliže se liší právě na jednom místě. Kdyby T obsahovala aspoň $\frac{2^n}{n+1} + 1$ n-tic, tyto n-tice by měly aspoň $n \cdot \left(\frac{2^n}{n+1} + 1\right)$ sousedů. Když k tomuto počtu ještě přičteme počet n-tic v T, tj. $\frac{2^n}{n+1} + 1$, dostáváme celkem $2^n + n + 1$ n-tic, ale počet všech n-tic je pouze 2^n, nějaké jsme tedy počítali dvakrát, což znamená, že některé n-tice z T měly společného souseda a jejich vzdálenost tedy byla menší než tři, což je ovšem ve sporu s předpokladem, že se liší aspoň na třech místech.

4. Úloha

Dosadíme-li za x a y nuly, dostaneme $2f(z) = f(0)$, tedy funkce je konstantní. Dosadíme-li za $f(a)$ konstantu c, dostaneme $c(1 - \cos(x + y)) = 0$, tedy $c = 0$. Dosazením ověříme, že nulová funkce vyhovuje.

5. ÚLOHA

Pro polynom P označme $\|P\|$ maximum jeho absolutní hodnoty na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Ověřte, že platí následující tvrzení:

i) $\|P\| = 0$ právě tehdy když $P \equiv 0$;

ii) $\|\alpha P\| = |\alpha| \cdot \|P\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

Zobrazení $\|\cdot\|$, které splňuje takovéto podmínky, se většinou říká norma. Úlohu pak můžeme přeformulovat tak, že hledáme mezi polynomy stupně nejvýše 2 ten, pro nějž má $P - x^3$ nejmenší normu.

Nejprve ukážeme, že při hledání minima se stačí omezit na polynomy typu $P(x) = bx$, kde b je reálná konstanta. Máme-li polynom P nejvýše druhého stupně $P(x) = ax^2 + bx + c$, označme $P^*(x) = -P(-x) = -ax^2 + bx - c$ polynom, jehož graf je s původním souměrně sdružený podle počátku. Protože $(-x)^3 = -x^3$ (tzv. lichá funkce), není těžké zjistit, že $\left\|P - x^3\right\| = \left\|P^* - x^3\right\|$. Z trojúhelníkové nerovnosti (podmínka iii) z minulého odstavce) pak máme pro $P_0 = \frac{1}{2}(P + P^*)$ nerovnost

$$\left\|P_0 - x^3\right\| = \frac{1}{2}\left\|\left(P - x^3\right) + \left(P^* - x^3\right)\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\left\|P - x^3\right\| + \left\|P^* - x^3\right\|\right) = \left\|P - x^3\right\|,$$

je však $P_0(x) = bx$.

Polynom $x^3 - bx$ je lichá funkce, stačí tedy maximum její absolutní hodnoty hledat na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Její absolutní hodnota je nezáporná, nabývá tedy maxima současně s funkcí

$$\sqrt[3]{2\left|x^3 - bx\right|^2} = \sqrt[3]{2x^2(b - x^2)(b - x^2)},$$

což je podle **AG** nerovnosti menší nebo rovno číslu

$$\frac{2x^2 + (b - x^2) + (b - x^2)}{3} = \frac{2}{3}b$$

s rovností právě tehdy když $2x^2 = b - x^2$, tedy $x = \sqrt{\frac{b}{3}}$, úvahy ovšem platí pouze pro $b \geq 0$, $x^2 \leq b$. Případem $b < 0$ se nemá smysl zabývat, protože pak $\left\|x^3 - bx\right\| \geq 1 - b > 1 = \left\|x^3\right\|$. Rovněž tak nemá smysl uvažovat $b > 1$ (porovnáním s $x^3 - x$). Musíme tedy ještě vyšetřit chování $x^3 - bx$ na intervalu $(b, 1\rangle$. Tam je to ovšem funkce rostoucí, maxima tedy nabývá v bodě 1, hodnota je $1 - b$. Hodnota v bodě $\sqrt{\frac{b}{3}}$ je

$$\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 - b\sqrt{\frac{b}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{27}}b^{3/2}.$$

absolutní hodnota tedy pro $b \in \langle 0, 1\rangle$ roste. Vzhledem k tomu, že norma je rovna maximu ze dvou výrazů, z nichž jeden roste a druhý klesá, je nejmenší, pokud jsou si rovny (existuje-li takové b). To nastane pro $b = \frac{3}{4}$. Z polynomů typu bx je tedy nejlepší $\frac{3}{4}x$.

Zbývá ukázat, že přičtením polynomu typu $ax^2 + c$ normu ostře zvětšíme (zatím víme pouze, že ji nezmenšíme). K tomu si stačí uvědomit, že maxima absolutní hodnoty se nabývá v bodech -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1. Nenulový polynom typu $ax^2 + c$ nemůže nabývat nuly současně v bodech $\frac{1}{2}$, 1 a je to sudá funkce ($P(-x) = P(x)$), v jednom ze jmenovaných čtyř bodů tedy musíme absolutní hodnotu rozdílu zvětšit (rozmyslete si). Tím se ovšem zvětší norma.

Poznámka: Prostřední pasáž (vyšetřování extrému funkce $x^3 - bx$) lze zjednodušit použitím derivací. Chtěl jsem ale ukázat, že to jde i bez nich.