1. série

Téma: Iracionální čísla

Datum odeslání: 21. ŘÍJNA 1996

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že 0,12345678910111213 ... (píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální.

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ je iracionální číslo.

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

V každém otevřeném intervalu (a, b) leží nekonečně mnoho iracionálních čísel. Dokažte.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechna čísla $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že všechna čtyři čísla $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$ jsou racionální.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Existují iracionální čísla a, b tak, že a^b je racionální?

Řešení 1. série

1. úloha
Dokažte, že 0,12345678910111213 ... (píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální.

Má-li racionální číslo nekonečný desetinný rozvoj, je tento rozvoj nutně periodický. Předpokládejme tedy pro spor, že číslo $A = 0,1234567891011\ldots$ je racionální s periodou délky n. V čísle A však zajisté nalezneme (libovolně daleko, tedy i za případnou předperiodou) posloupnost alespoň n devítek za sebou, tedy perioda je nutně tvořena samými devítkami. Bohužel stejnou úvahou pro osmičky dostáváme, že perioda je tvořena osmičkami, a to je hledaný spor. Tím jsme ukázali, že číslo A je iracionální.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů došla ke sporu tak, že našla dlouhý řetězec nul (někteří (Pavel Příhoda, Jan Vybíral: $+2i$) včetně důkazu věty: „Pokud má číslo nekonečný neperiodický rozvoj, pak je iracionální“). Co se mi nelíbilo:

- Pokud má číslo periodu délky n, má i periodu délky kn, bylo by tedy slušné mluvit o nejmenší (primitivní) periodě (v některých případech je to nutné).
- Někteří zapomněli, že číslo může mít předperiodu.
- Předpokládáme-li periodu délky n, stačí nám najít řetězec n nul, abychom dokázali, že perioda obsahuje samé nuly. Drtivá většina řešitelů hledala řetězec délky $2n - 1$.

2. úloha
Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ je iracionální číslo.

Vzhledem k tomu, že číslo $\sqrt{4}$ je racionální, stačí ukázat, že číslo $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ je iracionální. Nechť pro spor $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = r$, kde r je racionální číslo. Pak po jednoduchých úpravách máme (rovnici v podstatě dvakrát umocníme na druhou, abychom se zbavili odmocnin) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$, tj.

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2 - 2r\sqrt{5} + 5,$$

po přeskupení členů $r^2 = 2(r\sqrt{5} + \sqrt{6})$ opět rovnici umocníme na druhou

$$r^4 = 4(5r^2 + 2r\sqrt{30} + 6),$$

a po úpravě $r^4 - 20r^2 - 24 = 8r\sqrt{30}$. Po vydělení poslední rovnosti číslem $8r$ vidíme, že $\sqrt{30}$ je racionální. To je ovšem spor s lemmatem v řešení úlohy 5.

3. úloha
V každém otevřeném intervalu (a, b) leží nekonečně mnoho iracionálních čísel. Dokažte.

(podle Karla Koláře)

Lemma 1. *Součin iracionálního a nenulového racionálního čísla je iracionální.*

Lemma 2. *Součet iracionálního a racionálního čísla je iracionální.*

Důkazy lemmat přenechávám pilnému čtenáři. Mějme interval (a, b), $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1) a je racionální

Zvolme si nějaké kladné iracionální číslo c (zřejmě nějaké existuje, např. $\sqrt{2}$, viz lemma v řešení páté úlohy; případně A z první úlohy). Utvořme nekonečnou posloupnost čísel $c_n = c/10^n$. Dle lemmatu 1 jsou všechny členy posloupnosti iracionální. Nekonečný počet členů je menší než $b-a$, konkrétně jsou to členy s indexem větším nebo rovným $\log_{10} \frac{c}{b-a}$. Podle lemmatu 2 tedy interval (a, b) obsahuje nekonečně mnoho iracionálních čísel tvaru $a + c_n$ pro $n > n_0$.

2) a je iracionální

Zvolme si nějaké kladné racionální číslo c (třeba jedničku). Můžeme aplikovat týž postup jako v části 1) a ze stejných důvodů dostaneme shodný závěr, tedy že na (a, b) existuje nekonečně mnoho iracionálních čísel.

4. úloha

Najděte všechna čísla $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že všechna čtyři čísla $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$ jsou racionální.

Vzhledem k tomu, že platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, vidíme, že stačí hledat jen ta čísla $\alpha \in (0, 2\pi)$, pro která jsou $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ racionální. Omezme se nejprve na interval $(0, \pi/2)$, na kterém jsou funkce sin a cos kladné. Nechť máme tedy takové α, že $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ jsou racionální, tedy $\sin\alpha = p/q$, $\cos\alpha = r/s$, kde p, q, r, s jsou přirozená čísla, p, q nesoudělná, r, s nesoudělná, pak ze známého vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vidíme, že

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2} = 1.$$

Označíme-li nejmenší společný násobek čísel q, s jako přirozené číslo z a položíme-li

$$x = \frac{pz}{q}, \quad y = \frac{rz}{s},$$

jsou x, y, z po dvou nesoudělná (rozmyslete si, proč) přirozená čísla splňující podmínku $x^2 + y^2 = z^2$. Na druhou stranu, máme-li taková přirozená čísla x, y, z, která splňují $x^2 + y^2 = z^2$, a položíme-li $\arcsin\alpha = x/z$ leží α v intervalu $(0, \pi/2)$ a má požadované vlastnosti.

Uvažujeme-li nyní α v intervalech $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, dostáváme až na znaménka čísel x, y stejný výsledek. Zbývá nám tedy charakterizovat nesoudělná přirozená čísla x, y, z, která splňují vztah $x^2 + y^2 = z^2$. K tomu nám pomůže následují lemma.

Lemma. *Obecné řešení diofantické rovnice*[1] $x^2 + y^2 = z^2$ *pro přirozená čísla* x, y, z *splňující podmínky*[2]

$$(x, y) = 1, \quad 2|x \tag{1}$$

je tvaru

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2, \tag{2}$$

kde a, b *jsou přirozená čísla opačné parity*[3] *a*

$$(a, b) = 1, \quad a > b > 0. \tag{3}$$

[1] tj. rovnice, kterou řešíme v celých číslech

[2] Pro $a, b \in \mathbb{N}$ značíme symbolem (a, b) jejich největší společný dělitel.

[3] Jedno sudé, druhé liché.

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že platí (1) a $x^2+y^2=z^2$. Jelikož $2|x$ a $(x,y)=1$, jsou y a z lichá a $(y,z)=1$. Proto $(z+y)/2$, $(z-y)/2$ jsou přirozená a

$$\left(\frac{z-y}{2},\frac{z+y}{2}\right)=1.$$

Jelikož $x^2=z^2-y^2$ máme

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{z+y}{2}\frac{z-y}{2},$$

a oba činitelé na pravé straně nerovnosti musí být čtverce (jsou totiž nesoudělní). Tedy

$$\frac{z+y}{2}=a^2,\qquad \frac{z-y}{2}=b^2,$$

kde $a>b>0,\quad (a,b)=1$. Jelikož $a+b\equiv a^2+b^2=z\equiv 1 \pmod 2$, jsou čísla a, b opačné parity. Proto každé řešení $x^2+y^2=z^2$ splňující (1) je tvaru (2), a a, b jsou opačné parity splňující (3).

Dále předpokládejme, že a, b jsou opačné parity a splňují (3). Pak

$$x^2+y^2=4a^2b^2+(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2=z^2,$$

x,y,z přirozená, $2|x$. Pokud je $(x,y)=d$, pak $d|z$, a tedy $d|y=a^2-b^2$, $d|z=a^2+b^2$, a proto $d|2a^2$, $d|2b^2$. Jelikož $(a,b)=1$, d musí být 1 nebo 2, ale druhá alternativa není možná, protože y je liché. Tedy $(x,y)=1$.

c.b.d

Nyní se vraťme k naší úloze. Řeší-li nějaká nesoudělná přirozená čísla x, y, z diofantickou rovnici $x^2+y^2=z^2$, jsou čísla x a y opačné parity. Platí tedy buď $2|x$, nebo[4] $2|y$. Proto z našeho lemmatu dostáváme, že $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ jsou všechny racionální pro $\alpha\in(0,\pi/2)$ tehdy a jen tehdy, když

$$\alpha=\arcsin\frac{2ab}{a^2+b^2},\quad \text{nebo}\quad \alpha=\arcsin\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

kde a, b jsou přirozená čísla opačné parity splňující (3). Výsledek pro α z intervalu $(\pi/2,\pi)$ dostaneme jako $\pi-\alpha$ pro vyhovující α z intervalu $(0,\pi)$. V intervalech $(\pi,3\pi/2)$ a $(3\pi/2,2\pi)$ se nám (kromě vhodného posunutí) změní znaménka výrazů za arcsin-y. To si však již laskavý čtenář rozmyslí sám.

Poznámky k došlým řešením: Nejvážnější chybou bylo nevyjádření hledaného α — někteří řešitelé jen konstatovali, že řešení je nekonečně mnoho, případně že řešení odpovídají úhlům v Pythagorejském trojúhelníku[5]. Mnozí též nedokázali, že nalezli všechna řešení, někteří je ani nenašli — zapomněli totiž na některé části intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$. Část řešitelů se domnívala, že z racionality goniometrických funkcí plyne racionalita stran v trojúhelniku. (strany mohou být třeba $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$ a všechny poměry vyjdou racionální).

Někteří řešitelé přišli na řešení, které je o dost kratší, než vzorové řešení. Všimli si totiž následujícího faktu. Nechť $A\neq[0,1]$ je bod na jednotkové kružnici (tj. na kružnici se středem v počátku) a A' je jeho středový průmět (se středem $[0,1]$) na osu x. Pak bod A má racionální souřadnice právě tehdy, když bod A' má racionální souřadnice. Odtud již snadno plyne řešení úlohy (bližší rozmyšlení přenechávám na Tobě).

5. úloha

Existují iracionální čísla a, b tak, že a^b je racionální?

---

[4] Ve vylučovacím smyslu.

[5] tak říkáme pravoúhlému trojúhelníku s celočíselnými stranami

Lemma. *Číslo $\sqrt{n}$ je iracionální, nebo přirozené.*

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že číslo $\sqrt{n}$ je racionální, avšak není přirozené. Existují tedy *nesoudělná*[6] přirozená čísla p, $q \neq 1$ taková, že

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}.$$

Umocněním této rovnosti na druhou vidíme, že

$$nq^2 = p^2.$$

V tomto vztahu se však v prvočíselném rozkladu pravé strany vyskytují všechna prvočísla v sudé mocnině, ne tak již v prvočíselném rozkladu strany levé. Tím dostáváme kýžený spor.

Nyní k samotné úloze. Ukážeme, že odpověď na naši otázku je kladná. Víme (dle lemmatu), že $\sqrt{2}$ je iracionální. Pokud je číslo $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionální, máme vyhráno, neboť jsme nalezli taková dvě iracionální čísla a, b, že a^b je racionální. Nechť tedy x je iracionální, pak uvažujme číslo

$$y = x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

tedy y je racionální číslo a čísla x, $\sqrt{2}$ mají požadované vlastnosti.

Poznámky k došlým řešením: Nejčastější chybou bylo to, že mnozí nedokázali iracionalitu čísel $\sqrt{2}$, e, $\log_a b$, $\sqrt[\sqrt{a}]{b}$, … Podle toho, o jaké číslo se jednalo a co dalšího řešení obsahovalo, jsem za toto opomenutí strhnul 1 až 4 body. æ

[6] Jsou-li soudělná, mohu zlomek p/q krátit na základní tvar.