1. seriálová série

Téma: Kongruence

Termín odeslání: 12. ledna 1998

1. Úloha

Nechť p je liché prvočíslo a $0 < k < p$, pak $(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$. Dokažte.

2. Úloha

Nechť $(m,n) = 1$. Pak $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$. Dokažte.

3. Úloha

Určete poslední tři číslice v dekadickém zápise čísla $6^{5^{4^{3^{2^1}}}}$.

2. seriálová série

Téma: Diofantické rovnice

Termín odeslání: 16. března 1998

4. Úloha

Nalezněte[1] všechna přirozená čísla n, x, y, z, pro která platí $n^x + n^y = n^z$.

5. Úloha

Dokažte, že diofantická rovnice $1999x^2 - 1997y^2 = 2$ má nekonečně mnoho řešení.

6. Úloha

Dokažte, že neexistují přirozená čísla x, y, z, taková, že $x^4 - y^4 = z^2$.

[1]Diofantická rovnice uvedená v zadání této úlohy vznikne „výměnou“ základů a exponentů ve Fermatově větě. To je však asi jediné, co tyto úlohy spojuje, neboť obtížností se vůbec nedají srovnávat.

3. seriálová série

Téma: Řetězové zlomky

Termín odeslání: 18. KVĚTNA 1998

7. ÚLOHA

Vyřešte lineární kongruenci $103x \equiv 62 \pmod{97}$, to znamená nalezněte všechna taková x z množiny $0, 1, 2, \ldots, 96$, která splňují uvedenou kongruenci. (Při řešení zkuste použít postup uvedený v textu seriálu.)

8. ÚLOHA

Ukažte, jak vypadají řetězové zlomky čísel[2]

(a) $\sqrt{9n^2 + 2n}$, kde n je přirozené číslo;
(b) $\sqrt{n^2 + 4}$, kde n je liché číslo;
(c) $\sqrt{490n^2 + 198n + 2}$, kde n je přirozené číslo.

9. ÚLOHA

Nechť α je iracionální číslo, n přirozené číslo. Dokažte,[3] že pak platí alespoň jedna z nerovností

$$|\alpha - \frac{A_k}{B_k}| < \frac{1}{\sqrt{5}B_k^2}, \qquad \text{kde} \quad k = n, n+1, n+2,$$

kde $\frac{A_k}{B_k}$ jsou sblížené zlomky k číslu α.

---

[2]Při hledání řetězových zlomků druhých odmocnin lze vycházet buď přímo z definice, či využít nějaké zajímavé vlastnosti uvažovaných čísel. Například snadno ověříš, že platí $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$, odtud $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ a pokud za $\sqrt{2}$, která je v posledním výrazu uvedená vpravo dosadíš opět celý tento výraz obdržíš $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$, odtud už snadno nahlédneš, že řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ je tvaru $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, 2, \ldots)$. (Stejně lze zřejmě postupovat pro všechna čísla tvaru $\sqrt{n^2+1}$, kde n je přirozené.)

[3]Pokud by Ti 9. úloha dělala problémy, zkus si ve výše uvedených nerovnostech nahradit číslo $\sqrt{5}$ číslem 2, úloha se Ti zjednoduší. Konstanta $\sqrt{5}$ je v podstatě ta nejlepší konstanta, pro kterou znění úlohy platí, takže je potřeba trochu „jemnější“ přístup při řešení. V případě konstanty 2 není těžké dokázat i tvrzení, že z každých dvou uvažovaných nerovností, pro $k = n$ a $k = n + 1$, je alespoň jedna splněna.

Řešení seriálové série

1. úloha

Nechť p je liché prvočíslo a $0 < k < p$, pak $(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^k \pmod p$. Dokažte.

Nechť p je libovolné liché prvočíslo. Budeme postupovat matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme tvrzení $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, což je tvrzení Wilsonovy věty (*lemma 4*). Nechť nyní naše tvrzení platí pro $k = n$, ukážeme, že platí i pro $k = n+1$ (samozřejmě za předpokladu $n+1 < p$). Máme

$$(p-(n+1))! \cdot ((n+1)-1)! = n \cdot (p-(n+1))! \cdot (n-1)! \equiv$$

$$\equiv n \cdot (p-(n+1))! \cdot (n-1)! - p \cdot (p-(n+1))! \cdot (n-1)! = -(p-n) \cdot (p-(n+1))! \cdot (n-1)! =$$
$$= -(p-n)! \cdot (n-1)! \equiv -(-1)^n = (-1)^{n+1} \pmod p,$$

kde v posledním řádku jsme využili indukční předpoklad. Tím je hotov druhý indukční krok.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé úlohu řešili tak, že buď vynásobili $k-1$ kongruencí $i \equiv -(p-i) \pmod p$ a upravili výsledek, anebo použili matematickou indukci. Nejkratší řešení měl Z. Dvořák, vypadalo asi takto:

$$(p-k)!(k-1)! \equiv \frac{(p-1)!(k-1)!}{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)} \equiv$$
$$\equiv (-1)\frac{1.2\cdots(k-1)}{(-1)(-2)\cdots(-(k-1))} \equiv (-1)^k \pmod p$$

Přitom si ovšem spolu s několika ostatními řešiteli neuvědomil, že by asi bylo třeba říct, co se míní zlomky v kongruencích a proč jsou příslušné úpravy korektní.

A. Kovárová si všimla, že s ohledem na Wilsonovu větu stačí dokázat, že $\binom{p-1}{k-1} \equiv (-1)^{k-1}$, což se ovšem snadno nahlédne, neboť v řadě $\binom{p-1}{0}, \binom{p-1}{1}, \dots, \binom{p-1}{k-1}$ je první člen 1 a součet dvou následujících členů je dělitelný číslem p. Z toho už vyplývá, že čísla v řadě jsou kongruentní s $1, -1, 1, \dots, (-1)^{k-1}$

D. Šumský využil toho, že polynom $f(x) = x^{p-1} - 1 - (x-1)\cdots(x-p+k)(x+1)\cdots(x+k-1)$ má víc kořenů $\pmod p$ než je jeho stupeň, a tudíž jsou všechny jeho koeficienty kongruentní s nulou. Absolutní koeficient nám dá to, co potřebujeme.

2. úloha

Nechť $(m,n) = 1$. Pak $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$. Dokažte.

Dle Eulerovy věty (*lemma 2(a)*) máme $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ a $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$. Tyto vztahy můžeme dle definice kongruence přepsat na $m^{\varphi(n)} - 1 = q_1 n$, $n^{\varphi(m)} - 1 = q_2 m$, kde

q_1 a q_2 jsou nějaká celá čísla. Vynásobením posledních dvou rovností máme $(m^{\varphi(n)} - 1) \cdot (n^{\varphi(m)} - 1) = q_1 q_2 mn$, proto opět z definice kongruence máme

$$m^{\varphi(n)} \cdot n^{\varphi(m)} - m^{\varphi(n)} - n^{\varphi(m)} + 1 = (m^{\varphi(n)} - 1) \cdot (n^{\varphi(m)} - 1) \equiv 0 \pmod{mn},$$

a uvědomíme-li si nyní, že $mn | m^{\varphi(n)} \cdot n^{\varphi(m)}$, dostaneme po převedení jedničky vpravo dokazovaný vztah.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu měla většina řešitelů správně. Chyby se většinou vyskytovaly při formální manipulaci s kongruencemi. Při pevném modulu lze totiž kongruence stejně jako rovnice násobit, sčítat, násobit číslem, ... , ale nelze je vždy krátit číslem (i když je nenulové). Abychom je mohli bez problémů číslem vykrátit, musí toto číslo být nesoudělné s modulem. Pár řešitelů si to neuvědomilo, a tak o nějaký ten bod přišli.

3. úloha

Určete poslední tři číslice v dekadickém zápise čísla $6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}$.

Libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$, které v dekadickém zápise končí na dvojčíslí 76 si můžeme zapsat ve tvaru $n = 100 \cdot r + 76$, kde $r \in \mathbb{N}$. Z binomické věty máme

$$n^5 = (100 \cdot r + 76)^5 \equiv \binom{5}{5} 76^5 \equiv 376 \pmod{1000},$$

neboť všechny členy v uvedeném binomickém rozvoji jsou až na poslední dělitelné číslem 1000 a $76^5 \equiv 376 \pmod{1000}$, jak můžeme ověřit přímým výpočtem. Jelikož číslo 6^5 končí v dekadickém zápise na dvočíslí 76 je hledané poslední trojčíslí v dekadickém zápise našeho čísla (dle výše uvedených úvah) rovno číslu 376.

Poznámky opravovatele: Nejčastější chyba bylo špatné pochopení zadání. Zápisem typu a^{b^c} se totiž myslí $a^{(b^c)}$, nikoliv $(a^b)^c$.

Několik řešitelů nesprávně použilo Eulerovu větu — zapomněli, že mocněné číslo musí být nesoudělné s modulem kongruence.

4. úloha

Nalezněte[4] všechna přirozená čísla n, x, y, z, pro která platí $n^x + n^y = n^z$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \leq y < z$. Přímým dosazením vidíme, že nemůže být $n = 1$, proto $n \geq 2$. Jednoduchými úpravami naší rovnice dostáváme $n^x = n^z - n^y = n^x(n^{z-x} - n^{y-x})$, a po vydělení číslem n^x nakonec máme $n^{z-x} - n^{y-x} = 1$. Kdyby tedy bylo $y > x$, pak by nám poslední rovnice dávala, že $n|1$, což být nemůže, proto $x = y$

[4] Diofantická rovnice uvedená v zadání této úlohy vznikne „výměnou“ základů a exponentů ve Fermatově větě. To je však asi jediné, co tyto úlohy spojuje, neboť obtížností se vůbec nedají srovnávat.

a tedy $n^{z-x} = 2$, z čehož vyplývá $n = 2$ a $z = x + 1$. Na druhou stranu přímým dosazením snadno ověříme, že čtveřice $(n, x, y, z) = (2, x, x, x + 1)$ je řešením naší diofantické rovnice. Tím jsme ukázali, že všechna řešení naší rovnice jsou tvaru $(n, x, y, z) = (2, x, x, x + 1)$.

5. úloha

Dokažte, že diofantická rovnice $1999x^2 - 1997y^2 = 2$ má nekonečně mnoho řešení.

Snadno nahlédneme, že jedním řešením naší rovnice je $x = y = 1$. Roznásobením též snadno nahlédneme, že platí rovnost
$1999(1998a+1997b)^2-1997(1999a+1998b)^2 = 1999a^2-1997b^2$. Pokud tedy čísla $x = a$, $y = b$ splňují rovnici $1999x^2-1997y^2 = 2$, splňují ji také čísla $x = 1998a+1997b$, $y = 1999a+1998b$, tedy z jednoho řešení $x = y = 1$ dostaneme takto postupně nekonečně mnoho řešení.

Poznámka: Uvedené řešení bylo postaveno na jisté rovnosti, která není na první pohled moc uhádnutelná. Pokusím se zde proto trochu naznačit, jak se dá objevit. Předně chceme tedy nalézt rovnost tvaru $1999(x_1a+x_2b)^2-1997(x_3a+x_4b)^2 = 1999a^2-1997b^2$, kde x_1, x_2, x_3, x_4 jsou neznámá přirozená čísla. Roznásobíme-li levou stranu a porovnáme-li koeficienty stojící u a^2 na obou stranách naší rovnosti, dostaneme vztah $1999x_1^2 - 1997x_3^2 = 1999$, z toho je vidět, že číslo x_3 musí být násobkem čísla 1999. Analogicky porovnáním koeficientů stojících u b^2, dostaneme, že x_2 je násobkem čísla 1997. Tím jsme našli nějaké nutné podmínky na čísla x_3, x_2. Když však nyní přímo položíme $x_2 = 1997$, $x_3 = 1999$, snadno nalezneme již čísla x_1, x_4, aby platila požadovaná rovnost.

Poznámky opravovatele: Asi polovina řešitelů vykouzlila z nebe spadlou identitu
$1999(1998x+1997y)^2-1997(1999x+19998y)^2 = 1999x^2-1997y^2$, a poznamenala, že z toho plyne nekonečný počet řešení. Zmíněná druhá polovina řešitelů hledala identitu ve tvaru $1999(ax+by)^2-1997(cx+dz)^2 = 1999x^2-1997y^2$, dostali jakési rovnice a z nich vypočítali koeficienty a, b, c, d. Jediné skutečně elegantní řešení měl P. Kozák: Identitu $1999 - 1997 = 2$ si přepsal do tvaru

$$\left(\sqrt{\frac{1999}{2}} + \sqrt{\frac{1997}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1999}{2}} - \sqrt{\frac{1997}{2}}\right) = 1,$$

umocnil ji na n-tou, kde n je liché:

$$\left(\sqrt{\frac{1999}{2}} + \sqrt{\frac{1997}{2}}\right)^n \left(\sqrt{\frac{1999}{2}} - \sqrt{\frac{1997}{2}}\right)^n = 1$$

Z binomické věty dostaneme (n je liché) přirozená čísla A, B taková, že

$$\left(\sqrt{\frac{1999}{2}} + \sqrt{\frac{1997}{2}}\right)^n = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{1999}{2}} + \frac{B}{2}\sqrt{\frac{1997}{2}}$$
$$\left(\sqrt{\frac{1999}{2}} - \sqrt{\frac{1997}{2}}\right)^n = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{1999}{2}} - \frac{B}{2}\sqrt{\frac{1997}{2}}$$

Po vynásobení dostaneme $1999(\frac{A}{2})^2 - 1997(\frac{B}{2})^2 = 2$, neboť, jak snadno zjistíme, A, B musí být sudá. Každé liché n nám takto dá nějaké nové řešení naší rovnice.

6. úloha
Dokažte, že neexistují přirozená čísla x, y, z, taková, že $x^4 - y^4 = z^2$.

Předpokládejme, že taková x, y, z existují. Bez újmy na obecnosti můžeme brát, že $(x, y) = 1$ (jinak bychom mohli celou rovnici vydělit číslem $(x, y)^4$ a dostali bychom nové řešení naší rovnice, které by již tuto podmínku splňovalo). Tedy platí $y^4 + z^2 = x^4$, kde $(x, y) = 1$ a proto čísla y^2, z, x^2 jsou řešením diofantické rovnice uvedené v lemmatu 6. Dle tohoto lemmatu víme, že existují přirozená čísla $a, b, a > b$, že platí $x^2 = a^2 + b^2$ a nastává právě jeden z případů: $y^2 = a^2 - b^2$, nebo $y^2 = 2ab$. První případ však nastat nemůže, neboť by to odporovalo lemmatu 7. Druhý případ rovněž nastat nemůže, neboť po drobné úpravě máme $x^2 + y^2 = (a + b)^2$ a $x^2 - y^2 = (a - b)^2$, což je opět spor s lemmatem 7. Předpoklad existence řešení naší rovnice vedl ke sporu, a proto tato rovnice nemůže žádné řešení mít.[5]

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu vyřešila většina řešitelů jedním ze způsobů, jaké jsem uvedl v autorském řešení. Někteří se též pokusili o přímé použití metody nekonečného klesání (FMD). Jedinou chybou, která se mezi řešeními objevila vícekrát, byla skutečnost, že si řešitel neuvědomil, že z předpokladu nesoudělnosti čísel x, y (tj. $(x, y) = 1$), ještě obecně neplyne nesoudělnost čísel x^2+y^2 a x^2-y^2. Protipříkladem mohou být libovolná dvě lichá nesoudělná čísla, např. $x = 3$ a $x = 5$, kde největší společný dělitel $(x^2 + y^2, x^2 - y^2) = 2$.

7. úloha
Vyřešte lineární kongruenci $103x \equiv 62 \pmod{97}$, to znamená nalezněte všechna taková x z množiny $0, 1, 2, \ldots, 96$, která splňují uvedenou kongruenci. (Při řešení zkuste použít postup uvedený v textu seriálu.)

Budeme postupovat přesně podle návodu uveřejněného v textu seriálu. Čísla 103 a 97 jsou nesoudělná, proto podle *lemmatu 10* existuje právě jedno řešení této kongruence. Snadno spočteme, že řetězový zlomek čísla $\frac{97}{103}$ je $(0, 1, 16, 6)$, jeho předposlední sblížený zlomek pak je $(0, 1, 16) = \frac{16}{17}$, proto naši kongruenci řeší číslo $x = (-1)^3 \cdot 16 \cdot 62 = -992$ (viz. vzoreček z textu seriálu). Přičtením čísla $97 \cdot 11 = 1067$ k číslu x dostaneme hledané (jediné) řešení naší kongruence mezi čísly $0, 1, 2, \ldots, 96$, a to je číslo 75.

[5] Tuto úlohu můžeme řešit i bez použití lemmatu 6. Stačí si diofantickou rovnici přepsat na ekvivalentní tvar $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = z^2$. Pokud by nyní činitele na levé straně byly nesoudělné, pak jsou oba dva rovny druhé mocnině přirozeného čísla, což je spor s lemmatem 7. Takže jsou soudělné a snadno nahlédneme, že jejich největší společný dělitel musí být roven číslu 2. Proto existují $m, n \in \mathbb{N}$, že $x^2 - y^2 = 2m^2, x^2 + y^2 = 2n^2$. Sečtením těchto rovností již snadno dospějeme opět ke sporu s lemmatem 7.

8. úloha

Ukažte, jak vypadají řetězové zlomky čísel[6]

(a) $\sqrt{9n^2+2n}$, kde n je přirozené číslo;
(b) $\sqrt{n^2+4}$, kde n je liché číslo;
(c) $\sqrt{4900n^2+198n+2}$, kde n je přirozené číslo.

U této úlohy zde ukáži podrobně výpočet v části (a). U bodů (b) a (c) je postup víceméně analogický, uvádíme proto jen výsledek.

(a) Vyjdeme ze zřejmé rovnosti, kterou snadno ověříš roznásobením výrazů vlevo $(\sqrt{9n^2+2n}+3n)(\sqrt{9n^2+2n}-3n)=9n^2+2n-9n^2=2n$, kde n je přirozené číslo. Vydělíme-li tuto rovnost výrazem $(\sqrt{9n^2+2n}+3n)$, dostaneme $\sqrt{9n^2+2n}-3n=\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}$, což po jednoduché úpravě dává vztah, ze kterého budeme vycházet

$$\sqrt{9n^2+2n}=3n+\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}. \qquad (*)$$

Nejprve si trochu upravíme pravou stranu vztahu $(*)$, snadno dostaneme

$$\sqrt{9n^2+2n}=3n+\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}=3n+\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9n^2+2n}}{2n}}.$$

Na pravé straně poslední rovnosti máme výraz $\sqrt{9n^2+2n}$. Pokud místo tohoto výrazu dosadíme jeho vyjádření pomocí vztahu $(*)$, dostaneme

$$\sqrt{9n^2+2n}=3n+\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9n^2+2n}}{2n}}=3n+\frac{1}{3+\frac{1}{3n+\sqrt{9n^2+2n}}}.$$

Nyní můžeme v naznačeném postupu pokračovat, opět za člen $\sqrt{9n^2+2n}$, který je vpravo, můžeme dosadit ze vztahu $(*)$ a odtud již snadno vidíme, že řetězový zlomek čísla $\sqrt{9n^2+2n}$ je periodický (to jsme z obecných vět mohli usoudit ještě před řešením příkladu) a platí $\sqrt{9n^2+2n}=(3n,3,6n,3,6n,3,6n,3,6n,3,6n,3,6n,\dots)$.

(b) $\sqrt{n^2+4}=(n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},$ $2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\frac{n-1}{2},1,1,\frac{n-1}{2},2n,\dots)$, kde n je liché číslo;

---

[6] Při hledání řetězových zlomků druhých odmocnin lze vycházet buď přímo z definice, či využít nějaké zajímavé vlastnosti uvažovaných čísel. Například snadno ověříš, že platí $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, odtud $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ a pokud za $\sqrt{2}$, která je v posledním výrazu uvedená vpravo dosadíš opět celý tento výraz obdržíš $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$, odtud už snadno nahlédneš, že řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ je tvaru $\sqrt{2}=(1,2,2,2,2,\dots)$. (Stejně lze zřejmě postupovat pro všechna čísla tvaru $\sqrt{n^2+1}$, kde n je přirozené.)

(c) $(70n+1,2,2,2,2,2,2,140n+2,2,2,2,2,2,2,140n+2,2,2,2,2,2,2,140n+2,2,2,2,2,2,2,\dots)$.

Poznámky opravovatele: V řešení částí (a) a (b) se chyby téměř nevyskytovaly. Část (c) byla bohužel zadána s malým překlepem. Nevyřešil ji proto nikdo. Za správně vyřešenou část (a) jsem uděloval dva body, nevyřešení části (c) jsem odpouštěl. Znovu připomínám, že odhadnuté řešení je potřeba dokázat. Také se mi nelíbilo, když jste nechávali na opravovateli upravovat šestipatrový zlomek. Příště prosím všechny úpravy rozepisujte, snad vás to bude motivovat psát elegantnější řešení. Těm, co si šetřili práci, jsem strhával podle uvážení přibližně polovinu bodů.

9. úloha

Nechť α je iracionální číslo, n přirozené číslo. Dokažte,[7] že pak platí alespoň jedna z nerovností

$$|\alpha - \frac{A_k}{B_k}| < \frac{1}{\sqrt{5}B_k^2}, \qquad \text{kde} \quad k = n, n+1, n+2,$$

kde $\frac{A_k}{B_k}$ jsou sblížené zlomky k číslu α.

Číslo α je iracionální, proto mu přísluší nekonečný řetězový zlomek, který označíme $\alpha = (q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)$. Definujeme-li nyní pro n přirozené n-tý zbytek čísla α vztahem $r_n = (q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, q_{n+3}, \dots)$, pak snadno upravíme rozdíl

$$\alpha - \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_n \cdot r_{n+1} + A_{n-1}}{B_n \cdot r_{n+1} + B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{B_n(B_n \cdot r_{n+1} + B_{n-1})},$$

kde v poslední úpravě jsme po převedení na společného jmenovatele využili vztah z *lemmatu 9(a)*. Nyní tudíž vidíme, že vzdálenost čísla α od jeho n-tého sblíženého zlomku je rovna

$$|\alpha - \frac{A_n}{B_n}| = \frac{1}{B_n(B_n \cdot r_{n+1} + B_{n-1})} = \frac{1}{B_n^2(r_{n+1} + \frac{B_{n-1}}{B_n})} = \frac{1}{B_n^2 \cdot \psi_{n+1}},$$

kde symbolem ψ_{n+1} jsme označili $\psi_{n+1} = r_{n+1} + \frac{B_{n-1}}{B_n}$. Pro jednoduchost dalšího zapisování ještě položíme $\xi_{n+1} = \frac{B_{n-1}}{B_n}$, pak si snadno indukcí může laskavý čtenář dokázat vztah $\xi_n = (0, q_{n-1}, \dots, q_1)$.

Po těchto pomocných úvahách přistoupíme k řešení naší úlohy. S ohledem na předchozí značení máme vlastně ukázat, že pro každé přirozené číslo n platí $\max(\psi_n, \psi_{n+1}, \psi_{n+2}) >$

[7] Pokud by Ti 9. úloha dělala problémy, zkus si ve výše uvedených nerovnostech nahradit číslo $\sqrt{5}$ číslem 2, úloha se Ti zjednoduší. Konstanta $\sqrt{5}$ je v podstatě ta nejlepší konstanta, pro kterou znění úlohy platí, takže je potřeba trochu „jemnější“ přístup při řešení. V případě konstanty 2 není těžké dokázat i tvrzení, že z každých dvou uvažovaných nerovností, pro $k = n$ a $k = n+1$, je alespoň jedna splněna.

$\sqrt{5}$. Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje n takové, že platí $\psi_n \le \sqrt{5}$, $\psi_{n+1} \le \sqrt{5}$, $\psi_{n+2} \le \sqrt{5}$.

Nechť nyní je k přirozené číslo, pak s ohledem na výše učiněné značení máme $\psi_k = r_k + \xi_k$. Z definice r_k máme $r_k = q_k + \frac{1}{r_{k+1}}$, ze vztahu pro ξ_n, který jsme nechali dokázat čtenáři zase máme $\xi_{k+1} = \frac{1}{q_k+\xi_k}$ a z toho máme $\psi_k = r_k + \xi_k = \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{\xi_{k+1}}$. Nyní předpokládejme, že platí $\psi_{k-1} \le \sqrt{5}$ a $\psi_k \le \sqrt{5}$, pak $\psi_k = r_k + \xi_k \le \sqrt{5}$ a $\psi_{k-1} = r_{k-1} + \xi_{k-1} = \frac{1}{r_k} + \frac{1}{\xi_k} \le \sqrt{5}$. Poslední nerovnosti jsou ekvivalentní s $r_k \le \sqrt{5} - \xi_k$ a $\frac{1}{r_k} \le \sqrt{5} - \frac{1}{\xi_k}$. Vynásobením těchto nerovností máme

$$1 \le (\sqrt{5} - \xi_k)(\sqrt{5} - \frac{1}{\xi_k}) \Leftrightarrow \left(\xi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\xi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le \xi_k \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Použijeme-li nyní předcházející úvahy pro $k = n+1$ a $k = n+2$, dostaneme $\xi_{n+1} \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ a $\xi_{n+2} \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ta druhá nerovnost nám dává $\frac{1}{\xi_{n+2}} \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Klíčem k úspěchu pro nás bude všimnout si, že v uvedených nerovnostech platí dokonce ostrá nerovnost (namísto $\le$), to je však jasné z toho, že na jedné straně stojí číslo racionální a na druhé iracionální. Proto využijeme-li již výše zmíněný vztah $\xi_{n+2} = \frac{1}{q_{n+1}+\xi_{n+1}}$, máme

$$q_{n+1} = \frac{1}{\xi_{n+2}} - \xi_{n+1} < \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

což je však spor s tím, že členy posloupnosti q_n jsou přirozená čísla a tedy nutně větší nebo rovna jedné.

Poznámka (pro náročného čtenáře): Konstanta $\sqrt{5}$ je v naší úloze nejlepší možná, tj. nedá se nahradit větší, aby tvrzení úlohy platilo. Z toho je též patrné, proč jsme v řešení používali skutečně velice jemné odhady. Klasickým příkladem čísla α, pro které je této konstanty $\sqrt{5}$ skutečně třeba, je číslo $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pokud bychom však nebrali v úvahu toto číslo a všechna ta čísla, pro která je od jistého indexu jejich řetězový zlomek tvořen samými jedničkami, mohli bychom tuto konstantu zlepšit na $\sqrt{8}$. Jak je vidět čísla obsahující v řetězovém zlomku jedničky jsou v jistém smyslu nejhůře aproximovatelná iracionální čísla čísly racionálními. Těmito a podobnými otázkami (třeba jaké další konstanty přicházejí do úvahy po $\sqrt{5}$ a $\sqrt{8}$) se zabývá část teorie čísel zkoumající tzv. diofantické aproximace.

Poznámky opravovatele: Ze tří došlých řešení všichni vyřešili zjednodušenou verzi (s dvojkou místo $\sqrt{5}$). Úlohu samotnou vyřešili dva. K řešitelům (nejen této úlohy) mám naléhavou výzvu: Nespokojte se s první verzí svého řešení, zkuste vymyslet, jak co nejvíce zredukovat pracné roznásobování gigantických závorek a jak co možná nejlépe své řešení vysvětlit. Důkaz by měl mít kvalitní také svoji estetickou stránku.