5th series

Topic: Probability

Date due: 21 February, 2000

PROBLEM 1 (3 points)
We throw a fair six-sided dice three times in a row. How does the probability of the total number of spots being odd compare with the probability of the number being even?

PROBLEM 2 (3 points)
A ground floor building has 3×3 rooms. Between every two adjacent rooms there is a door. In each but the middle room there is a window. There are also many villains in every room. Arnie Schwarzenegger's plan is this: He will jump through the window into one of the corner rooms, he will drop a nerve gas grenade there and he will quickly leave by a randomly chosen door. In every next room he has not been to he will repeat his plan. To exit, he will not use the door by which he entered the room. If he enters a room he has already been to, Arnie dies poisoned by the gas. Otherwise, he needs to leave the building through the last room's window.
(a) What is the probability that the whole plan goes all right (that means that he kills all the villains and survives)?
(b) What is the probability that he will kill all the villains but die himself?

PROBLEM 3 (3 points)
David and Radek play cards with a usual pack of 32 cards. Because Radek is a real dummy and he is not able to learn the rules of any common game, David suggests these rules: After they shuffle the cards, they will lay them on the table in a row. If there are at least two aces between the seven of hearts and the nine of spades, David wins the game, otherwise Radek wins. Radek complains the game is not fair. Is he right?

PROBLEM 4 (5 points)
Frank is shooting at a target with the area of P. He hits it with a probability of p. If he hits it, he hits each point of the target with the same probability (the target is too far, so Frank is not able to aim very well). The bullets that he uses leave on the target a circular mark with the radius of r. Luis came with this suggestion: Frank may draw a drawing with the area of S (S is much smaller than P) and with the shape either of a square, a circle or an equilateral triangle on the target. After that, Frank will shoot at the target N-times (N is very big). When the shot hits the drawing and the mark of the shot does not cross the border of the drawing, Frank gets a point. If it crosses the border of the drawing (it doesn't matter whether the middle of the shot is inside or outside the drawing) Frank gets half a point. Which shape of the drawing is the most advantageous for Frank to get as many points as possible?

PROBLEM 5 (5 points)
A group of n friends called their meeting between 5^{00}pm and 6^{00}pm at an exact place. Each one of the friends comes to this place at a random time between 5^{00} and 6^{00} and waits for ten minutes. If all guys don't meet during the ten minutes he is waiting, he leaves (if he came at 5^{50}pm he leaves already at 6^{00}pm). What is the probability that all n friends meet together?

PROBLEM 6 (5 points)
Let ABCD be a given square. We take three random points $P, Q \in AB$, $R \in CD$ independently. What is the probability that the triangle PQR is acute?

PROBLEM 7 (5 points)
Winnie the Pooh has two pots of honey in his larder. In each one there are exactly 20 spoonfuls of honey. Every night, Pooh wakes up, gets up, prowls into the larder, and eats a spoonful of honey from a randomly chosen pot. Pooh does not notice that he has eaten all the honey in a pot until he wants to eat another spoonful from it. What is the probability that when Pooh notices the glass is empty, there will be no honey in the other pot either?

PROBLEM 8 (5 points)
There are n lambs and one wolf located equidistantly on a circle. Each time the wolf randomly decides whether he moves to the left or to the right. If there is a lamb on his new position, the wolf eats it. Where should the clever lamb stand, so that it has the biggest possible probability to be eaten as the last one?

La 5. série

Sujet:	La Probabilité
Date d'expedition:	21. FÉVRIER 2000

PROBLÈME 1 (3 points)
Nous jetons trois fois le dé classique (de six côtés). Quelle est la probabilité plus grande, celle d'obtenir la somme des chifres jetés paire ou impaire?

PROBLÈME 2 (3 points)
Le petit bâtiment de rez-de-chaussé a 3×3 chambres. Entre chaques chambres voisines, il y a la porte. Il y a la fenêtre dans chaque chambre de côté. Dans toutes les chambres, il y a des ennemies dangereux. Jean-Paul Belmondo a une idée suivante: Il saute dedans par la fenêtre d'une des chambres au coin du bâtiment, il y jette la grenade à main avec le gaz empoisonant et il quitte la chambre par la porte choisit par hasard. Dans chaque chambre

suivante, pas encore visitée, il repète la même chose (mais il ne quitte aucune chambre par la porte d'entrée). S'il arrive dans la chambre déjà visitée, il est empoisoné par le gaz et il meurt. Il sorte de la dernière (neuvième) chambre par la fenêtre.
(a) Quelle est la probabilité, qu'il va tuer tous les ennemies et il reste en vie?
(b) Quelle est la probabilité, qu'il va tuer tous les ennemies, mais il va mourir (ça veut dire, qu'il va finir dans la chambre sans fenêtre)?

PROBLÈME 3 (3 points)
Pierre et Paul jouent aux cartes avec le paquet classique de 32 cartes. Mais Paul, totalemet stupide, est incapable d' apprendre les régles difficiles. Pierre lui propose, qu'aprés le mélange du paquet des cartes ils placent les cartes successivement dans une ligne sur la table, et s'ils trouvent au moins deux as entre le sept piques et neuf piques, c'est Pierre qui gagne, Paul gagne le jeu dans tous les autres cas. Paul proteste, que le jeu n'est pas juste. A-t-il raison?

PROBLÈME 4 (5 points)
François tire sur la cible de surface P, il la touche avec la probabilité p. S'il la touche, il peut toucher chaque point de la cible avec la même probabilité (la cible est trés loin, alors in ne peut pas tirer précisement). Les cartouches, qu'il utilise, laissent sur la cible la trace circulaire du rayon r. Lionel lui propose: François peut tracer sur la cible la figure avec le surface S (S est beaucoup plus petit que P) et il peut choisir la forme de la figure - le carré, le cercle ou le triangle équilatéral. Puis François va tirer sur la cible N-fois (N est très grande). Quand la cartouche touche la figure et sa trace ne touche pas la frontière de la figure, François gagne le point. Si la trace de la cartouche touche la frontière de la figure(le centre de la trace peut être dedans ou dehors de la figure) François gagne le demi-point. Quelle forme de la figure est la plus avantageuse pour François d'obtenir le plus des points possibles?

PROBLÈME 5 (5 points)
n des amis se sont accordés, de se rencontrer entre 5^{00} et 6^{00} aprés-midi à l'endroit donné. Chaque'un des amis arrive par hasard entre 5^{00} et 6^{00} et il va attendre dix minutes. S'il ne va pas rencontre tous ses amis, il parte (dans le cas d'arrivée après 5^{50}, il parte à 6^{00}). Quelle est la probabilité, que tous les amis se renconrent?

PROBLÈME 6 (5 points)
Ayons le carré donné $ABCD$. Prenons par hasard $P,\ Q \in AB,\ R \in CD$. Quelle est la probabilité, que le triangle PQR est estacutangle?

PROBLÈME 7 (5 points)
Le petit ourson Pooh cache dans sa garde-manger deux marmites du miel. Il y a exactement vingt portions du miel dans chaque marmite. Pooh se léve chaque nuit, il choisit par hasard une marmite dans la garde-manger et il mange une portion du miel de ce marmite. S'il vide la marmite en mangant la dernière portion, il ne le reconait pas. Il le reconait s'il veut prendre

du miel de la marmite dèja vidée. Quelle est la probabilité, que toutes les deux marmites sont vides quand Pooh reconait que la marmite choisit est vide?

PROBLÈME 8 (5 points)
Plaçons sur le cercle n des petits moutons et un loup en équidistance. Dans chaque pas, le loup choisit par hasard d'aller à gauche ou à droite, il se bouge et s'il trouve sur la place le pauvre mouton, il va le manger. Quelle est la place la plus avantageuse (pour le mouton intéligent) ayant la probabilité la plus grande possible d'y être mangé comme le dernièr?

Serie N. 5

Thema: Die Wahrscheinlichkeit

Termin der Absendung: 21. FEBRUAR 2000

AUFGABE N. 1 (3 punkte)
Wir werfen dreimal mit dem sechswändigen Würfel. Sei n die Summe der geworfennen Zahlen. Welche Wahrscheinlichkeit ist größer : die, daß n geradezählig, oder die, daß n ungeradezählig ist.

AUFGABE N. 2 (3 punkte)
Das Haus mit quadratischem Grundriss hat 3×3 Zimmer. Zwischen allen benachbarten Zimmern ist die Tür und in jedem Zimmer am Rande ist ein Fenster. In jedem Zimmer sind auch vielen Terroristen. Horst Schimanski hat einen folgenden Plan: Er wird durch ein Fenster in eine der Zimmern am Eck springen, hinterläßt dort Nervgasshandgranat und verläßt den Zimmer durch beliebiges Tür. In jedem weiteren Zimmer, wo er noch nicht war, wiederholt er den Plan (verläßt aber kein Zimmer durch dasselbe Tür durch die er gekommen war). Wenn er die Zimmer betretet, wo er schon war, stirbt er an Vergiftung. Von der letzten (neunten) Zimmer springt er durch das Fenster hinaus.
(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß er das alles überlebt und alle Terroristen tot sind?
(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Terroristen tot sind, aber er auch (endete in Zimmer ohne Fenster)?

AUFGABE N. 3 (3 punkte)
David und Radek spielen Karten mit dem klassischen Paket von 32 Karten. Weil Radek total blöd ist und kann kein normales Spiel begreiffen, schägt David vor, daß sie immer nach der Vermischung die Karten vor sich vorlegen und ob zwischen Hertzsieben und Kreutzneun minimal zwei Asses sind, gewinnt David, anders Radek. Radek beschwert sich, daß es nicht gerecht ist. Hat er Recht?

AUFGABE N. 4 (5 punkte)
Hänsel schießt auf die Scheibe von der Fläche P. Er trifft mit der Wahrscheinlichkeit p. Wenn er trifft, trifft er jeden Punkt der Scheibe mit derselben Wahrscheinlichkeit (die Scheibe ist zu weit, und Hänsel kann nich genau zielen.) Die Pfeile, die er benützt, hinterlassen auf der Scheibe eine runde Spur von Diameter r. Grethel kommt mit diesem Vorschlag : Hänsel kann auf die Scheibe ein Bild von der Fläche S malen (S ist viel kleiner als P) und zwar in der Form eines Quadrats, eines Kreises oder eines gleichseitigen Dreiecks. Hänsel wird dann auf die Scheibe N mals schießen (N ist sehr groß). Wenn der Pfeil trifft den Bild aber durchschneidet die Grentze des Bildes nicht, hat Hänsel ein Punkt. Wenn der Pfeil durchschneidet die Grentze des Bildes (egal, ob die Mitte des Pfeiles in dem Inneren oder in dem Ausseren des Bildes ist) hat Hänsel ein halbes Punkt. Welches Bild ist für Hänsel am günstigsten, so daß er am meisten Punkte gewinnt?

AUFGABE N. 5 (5 punkte)
Eines Tages haben sich n Kameraden verabredet, daß sie sich zwischen 5^{00} und 6^{00} Uhr nachmitags in der Kneippe treffen werden. Jeder Kamerad wird in der beliebigen Zeit zwischen 5^{00} und 6^{00} in der Kneippe ankommen, ein Bier bestellen und 10 Minuten (oder bis 6^{00}) warten für den Rest. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich alle n Kameraden treffen werden?

AUFGABE N. 6 (5 punkte)
Sei ein Quadrat $ABCD$. Wir nehmen nach Belieben zwei Punkten $P, Q \in AB$ und ein Punkt $R \in CD$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Dreieck scharfeckig wird?

AUFGABE N. 7 (5 punkte)
Der Bärchen Pooh hat in dem Vorratskammer zwei Gläser von Hönig. In jedem von den Gläsern sind genau zwanzig Löffeln. Jede Nacht erwacht Pooh, kriecht in den Vorratskammer und frisst ein Löffel von beliebigen Glas von Honig. Er beachtet, daß das Glas leer ist erst wenn er wieder schöpfen will. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenn Pooh erstens erfährt daß in dem Glas kein Honig mehr ist, ist auch das zweite leer?

AUFGABE N. 8 (5 punkte)
Bei dem Zaun auf einer runden Weide sind gleichmäsig n Schafen und ein Wolf plaziert. Jeden Tag entscheidet sich der Wolf nach Belieben, ob er an die benachbarte Stelle nach links oder nach rechts geht. Wenn er an dem neuen Platz ein Schaf findet, frist er es. Wohin sollte sich ein kluges Schaf stellen, so daß es die höchste Wahrscheinlichkeit hat, daß es als letzte gefressen wird?

5. série

Téma:	Pravděpodobnost
Termín odeslání:	21. února 2000

1. ÚLOHA (3 BODY)

Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou. Je větší pravděpodobnost, že součet bude sudé číslo, nebo že součet bude liché číslo?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Přízemní budova má 3×3 místnosti. Mezi každými sousedními místnostmi jsou dveře, v každé obvodové místnosti je okno. V každé místnosti je spousta podlých padouchů. Arnold Schwarzenegger má následující plán: Vskočí oknem do jedné z rohových místností, upustí odjištěný granát s nervovým plynem a opustí místnost náhodně vybranými dveřmi. V každé další místnosti, ve které ještě nebyl opakuje svůj plán (žádnou místnost však neopouští stejnými dveřmi, kterými přišel). V případě, že vstoupí do místnosti, kde už byl, umírá na otravu nervovým plynem. Z poslední (tj. deváté) místnosti vyskočí oknem.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že se mu vydaří celý plán (tj. vybije všechny podlé padouchy a sám přežije)?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se mu podaří vybít všechny podlé padouchy, ale sám při tom zahyne (tj. skončí v místnosti bez okna)?

3. ÚLOHA (3 BODY)

David a Radek hrají karty s klasickým balíčkem 32 karet. Protože Radek je úplně blbej a není schopen se naučit žádnou normální hru, navrhne David, že vždy po zamíchání vyskládají karty za sebe a pokud jsou mezi srdcovou sedmou a pikovou devítkou alespoň dvě esa, vyhrává David, jinak vyhrává Radek. Radek si stěžuje, že to není spravedlivá hra. Má pravdu?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Franta střílí na terč plochy P, zasáhne ho s pravděpodobností p. Pokud ho zasáhne, trefí se do každého místa terče se stejnou pravděpodobností (terč je daleko, takže Franta není schopen přesně mířit). Náboje, které používá, zanechají na terči stopu ve tvaru kruhu o poloměru r. Přišel za ním Lojza s tímto návrhem: Franta může na terč nakreslit obrazec s plochou S (S je o hodně menší než P) a to buď ve tvaru čtverce, kruhu, nebo rovnostranného trojúhelníku. Franta pak bude na terč střílet N-krát (N je hodně velké). Když střela zasáhne obrazec a stopa střely neprotne hranici obrazce, má Franta bod. Pokud stopa střely protne hranici obrazce (nezáleží na tom, zda je střed střely uvnitř, či vně obrazce) má Franta půl bodu. Který z obrazců je pro Frantu nejvýhodnější, aby nastřílel co nejvíce bodů?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Skupina n kamarádů se domluvilo, že se sejdou mezi 5^{00} a 6^{00} odpoledne na přesně určeném místě. Každý z kamarádů na místo přijde náhodně mezi 5^{00} a 6^{00} a počká deset minut. Pokud se do té doby všichni nesejdou, odchází (v případě, že přišel po 5^{50}, odejde už v 6^{00}). Jaká je pravděpodobnost, že se všech n kamarádů sejde?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je dán čtverec $ABCD$. Zvolme náhodně P, $Q \in AB$, $R \in CD$. Jaká je pravděpodobnost, že trojúhelník PQR je ostroúhlý?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Medvídek Pú má ve spíži dvě sklenice medu, v každé z nich je přesně dvacet lžic. Každou noc se Pú probudí, vstane, vplíží se do spíže a ují lžíci medu z náhodně vybrané sklenice. Když Pú dojí med z nějaké sklenice, nevšimne si toho. Všimne si ale, že ve sklenici není žádný med, pokud si chce zrovna nabrat. Jaká je pravděpodobnost, že když Pú poprvé zjistí, že ve sklenici není žádný med, nebude už ani ve druhé sklenici?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na kružnici je rovnoměrně rozmístěno n oveček a jeden vlk. V každém tahu se vlk nahodně rozhodne, zda půjde doleva, nebo doprava, přemístí se a pokud na novém místě nalezne ovečku, sežere ji. Kam se má postavit chytrá ovečka, aby měla největší možnou pravděpodobnost, že ji vlk sežere jako poslední?

Řešení 5. série

1. úloha

Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou. Je větší pravděpodobnost, že součet bude sudé číslo, nebo že součet bude liché číslo?

Všechny možné výsledky trojice hodů uspořádáme do dvojic: k trojici $[k, l, m]$ přiřadíme trojici $[7-k, 7-l, 7-m]$ (tj. např. k hodu 1, 5, 3 přiřadíme hod 6, 2, 4). Jistě platí, že pokud je $k+l+m$ číslo sudé, je $(7-k)+(7-l)+(7-m)$ číslo liché a naopak. Tím je dokázáno, že je stejně těch případů, kdy součet bude sudý, jako těch, kdy součet bude lichý, a pravděpodobnost obou jevů je tedy stejná.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů rozebírala osm situací, které mohou nastat při třech hodech, rozlišujeme-li pouze sudá a lichá čísla. Obvykle dostali plný počet bodů, pokud nezapomněli uvést, že všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné. Vyskytla se řešení, která rozlišovala všechna čísla, ta byla vesměs v pořádku. Někteří se k výsledku dostali kratší či delší, více či méně srozumitelnou úvahou, která byla přiměřeně bodově oceněna. Řešení využívající skutečnosti, že výsledné součty k a $21-k$ jsou stejně pravděpodobné (ne všichni však dokázali tento fakt dostatečně zdůvodnit), získávala obvykle $+i$.

2. úloha

Přízemní budova má 3×3 místnosti. Mezi každými sousedními místnostmi jsou dveře, v každé obvodové místnosti je okno. V každé místnosti je spousta podlých padouchů. Arnold Schwarzenegger má následující plán: Vskočí oknem do jedné z rohových místností, upustí odjištěný granát s nervovým plynem a opustí místnost náhodně vybranými dveřmi. V každé další místnosti, ve které ještě nebyl opakuje svůj plán (žádnou místnost však neopouští stejnými dveřmi, kterými přišel). V případě, že vstoupí do místnosti, kde už byl, umírá na otravu nervovým plynem. Z poslední (tj. deváté) místnosti vyskočí oknem.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že se mu vydaří celý plán (tj. vybije všechny podlé padouchy a sám přežije)?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se mu podaří vybít všechny podlé padouchy, ale sám při tom zahyne (tj. skončí v místnosti bez okna)?

Pro snažší vyjadřování si místnosti označme jako políčka šachovnice: $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, $b3$, $c1$, $c2$, $c3$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že náš hrdina začne v místnosti $a1$ a bude pokračovat do místnosti $a2$. Potom má dvě možnosti:

Buď půjde na $b2$ (s pravděpodobností 1/2). Aby se mu plán podařil, musí už nutně pokračovat na $b1$, $c1$, $c2$, $c3$, $b3$, $a3$, což dává pravděpodobnost

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}.$$

Druhá možnost je, že půjde na $a3$ (pravděpodobnost 1/2), potom bude jistě pokračovat na $b3$ a pak má zase dvě možnosti. První možnost je, že půjde na $b2$ (pravděpodobnost 1/2) a pak jediná správná cesta je $b1$, $c1$, $c2$, $c3$, což dává pravděpodobnosti

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

Poslední možnost je, že z $b3$ bude pokračovat $c3$ (pravděpodobnost 1/2) a dále $c2$, $b2$, $b1$, $c1$, tj. s pravděpodobností

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Celková pravděpodobnost, že se povede plán (a), je tedy

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{16}.$$

K tomu, aby se povedl plán (b), je možná pouze jediná cesta: po předepsaném začátku $a1$, $a2$ následuje $a3$, $b3$, $c3$, $c2$, $c1$, $b1$, $b2$. Pravděpodobnost této cesty je

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

Poznámky opravovatele: Z asi padesáti řešení byla přibližně polovina správně a druhá polovina si neuvědomila, že když počítají pravděpodobnost jako počet příznivých případů ku počtu všech případů, musí mít všechny případy stejnou pravděpodobnost (což v tomto případě neměly) — těmto řešitelům jsem dával $0 + 0i$. Mezi špatnými řešeními se vyskytly tyto dvojice výsledků: 3/4, 1/4; 3/9, 1/9; 3/10, 1/10; 3/19, 1/19; 3/21, 1/21; 3/24, 1/24; 3/25, 1/25; 3/29, 1/29; 3/48, 1/48; 3/86, 1/86; 3/2592, 1/2592 a dále 1/3, 2/3; 1/6, 1/4; 1/8, 1/8; 1/9, 1/9; 1/9, 2/9; 10/24, –; 10/24, 1/8; 3/25, 3/25; 1/54, 1/81; 1/432, 1/638; 1/864, 1/648 a dokonce i 1/16, 1/16, což je správný výsledek. To je celkem 23 různých výsledků!

3. úloha

David a Radek hrají karty s klasickým balíčkem 32 karet. Protože Radek je úplně blbej a není schopen se naučit žádnou normální hru, navrhne David, že vždy po zamíchání vyskládají karty za sebe a pokud jsou mezi srdcovou sedmou a pikovou devítkou alespoň dvě esa, vyhrává David, jinak vyhrává Radek. Radek si stěžuje, že to není spravedlivá hra. Má pravdu?

Všech možností uspořádání karet je 32!. Všechna uspořádání, kde jsou mezi srdcovou sedmou a pikovou devítkou méně než dvě esa získáme takto: Vybereme si 6 pozic ($\binom{32}{6}$ možností), na které později umístíme 6 důležitých karet — esa, srdcovou sedmu a pikovou devítku. Těchto šest karet musí být rozmístěno tak, že buďto budou sedma a devítka vedle sebe (vyrobíme z nich „dvojkartu“ – $2 \cdot 5!$ možností) nebo mezi nimi bude právě jedno eso (vyrobíme „trojkartu“ - $2 \cdot 4 \cdot 4!$ možností).

Ostatní karty libovolně propermutujeme na zbylých pozicích (26! možností).

Celkem je tedy uspořádání kde jsou mezi srdcovou sedmou a pikovou devítkou méně než dvě esa $26! \cdot \binom{32}{6} \cdot (2 \cdot 5! + 8 \cdot 4!)$. Pravděpodobnost, že vyhraje Radek tedy je

$$\frac{26! \cdot \binom{32}{6} \cdot (2 \cdot 5! + 8 \cdot 4!)}{32!} = \frac{3}{5}$$

Jiná možnost, jak dojít ke stejnému výsledku, je přijít na to, že stačí permutovat esa, sedmičku a devítku a ostatní karty zanedbat.

Správná odpověď tedy zní: Radek má pravdu, hra není spravedlivá (ovšem v jeho prospěch).

Poznámky opravovatele: Málokteří z vás si uvědomili, že vůbec není nutno zkoumat kombinace všech karet, ale jen vzájemnou polohu oněch šesti význačných. Ti, kdož tak neučinili, se až na *Ondřeje Honzla* zamotali do složitého rozebírání možností, kde se nevyhnuli fatálním chybám.

U kombinatorických úloh apeluji ještě více na podrobný popis vašich postupů. Pokud mi dojde řešení skládající se pouze z košatého vzorce plného faktoriálů a kombinačních čísel (v horším případě jen ze čtyřciferných čísel), tak je pro mne opravdu problém pochopit, co tím chtěl básník říci.

V jednom řešení autor nechal počítačem prověřit všechny možnosti a z toho vyvodil pravděpodobnosti výher. Přátelé! Toto je *matematický* seminář, a proto nečekejte, že takováto řešení bodově oceníme.

4. úloha

Franta střílí na terč plochy P, zasáhne ho s pravděpodobností p. Pokud ho zasáhne, trefí se do každého místa terče se stejnou pravděpodobností (terč je daleko, takže Franta není schopen přesně mířit). Náboje, které používá, zanechají na terči stopu ve tvaru kruhu o poloměru r. Přišel za ním Lojza s tímto návrhem: Franta může na terč nakreslit obrazec s plochou S (S je o hodně menší než P) a to buď ve tvaru čtverce, kruhu, nebo rovnostranného trojúhelníku. Franta pak bude na terč střílet N-krát (N je hodně velké). Když střela zasáhne obrazec a stopa střely neprotne hranici obrazce, má Franta bod. Pokud stopa střely protne hranici obrazce (nezáleží na tom, zda je střed střely uvnitř, či vně obrazce) má Franta půl bodu. Který z obrazců je pro Frantu nejvýhodnější, aby nastřílel co nejvíce bodů?

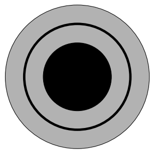
Franta získá při zásahu 1 bod, je-li střed stopy po kulce uvnitř nakresleného obrazce a zároveň ve vzdálenosti aspoň r od jeho hranice. Označme S_1 plochu množiny všech takových středů. Franta získá při zásahu půl bodu, je-li střed stopy po kulce ve vzdálenosti nejvýše r od hranice obrazce. Označme plochu množiny těchto středů S_2.

Pravděpodobnost, že střed vystřelené kulky bude uvnitř obrazce s plochou S, je $p \cdot \frac{S}{P}$. Tedy průměrný počet Frantových bodů po N výstřelech bude

$$Np \cdot \frac{S_1 + \frac{1}{2}S_2}{P}.$$

Protože N, p, P jsou dané konstanty, je třeba maximalizovat číslo $S_1 + \frac{1}{2}S_2$.

Kruh: Je-li $r \leq R$, kde $R = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$ je poloměr nakresleného kruhu, je situace znázorněna na obrázku, přičemž S_1 je plocha černého vnitřního kruhu, S_2 je plocha šedého mezikruží okolo původní kresby. Tedy $S_1 = \pi(R-r)^2$, $S_2 = \pi(R+r)^2 - S_1$,

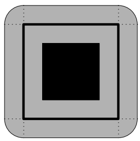


$$S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \pi R^2 + \pi r^2 = S + \pi r^2.$$

Pokud ovšem $r > R$, Franta nemůže získat 1 bod — stopa po kulce se nevejde do obrazce. Platí tedy

$$S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}\pi(R+r)^2 = \frac{1}{2}(S + 2\sqrt{\pi} \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2).$$

Čtverec: Je-li $r \leq \frac{a}{2}$, kde $a = \sqrt{S}$ je hrana nakresleného čtverce, je situace znázorněna na obrázku, přičemž S_1 je plocha černého vnitřního čtverce, S_2 je plocha šedého „pásu s kulatými rohy“ okolo původní kresby. Tedy $S_1 = (a-2r)^2$, $S_2 = 4ar + \pi r^2 + a^2 - S_1$, $S_1 + \frac{1}{2}S_2 = a^2 + (2 + \frac{\pi}{2}) \cdot r^2 = S + (2 + \frac{\pi}{2}) \cdot r^2$.



Pokud ovšem $r > \frac{a}{2}$, Franta nemůže získat 1 bod — stopa po kulce se nevejde do obrazce. Platí tedy

$$S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}(4ar + \pi r^2 + a^2) = \frac{1}{2}(S + 4 \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2).$$

Trojúhelník: Je-li $r \leq \frac{a}{2\sqrt{3}}$, kde $a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}S}$ je strana nakresleného trojúhelníka, je situace znázorněna na obrázku, přičemž S_1 je plocha černého vnitřního trojúhelníku, S_2 je plocha šedého „pásu s kulatými rohy" okolo původní kresby. Tedy $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - 2\sqrt{3}r)^2$, $S_2 = 3ar + \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - S_1$, po analogickém výpočtu

$$S_1 + \frac{1}{2}S_2 = S + \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2.$$

Pokud ovšem $r > \frac{a}{2\sqrt{3}}$, Franta nemůže získat 1 bod — stopa po kulce se nevejde do obrazce. Platí tedy

$$S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}(3ar + \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2) = \frac{1}{2}(S + 2\sqrt{3\sqrt{3}} \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2).$$

Pokud tedy $r \leq \min(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{S}}{2}, \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\sqrt{3}}})$, snadno nahlédneme, že pro libovolné S, r je

$$S + (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot r^2 < S + (2 + \frac{\pi}{2}) \cdot r^2 < S + (\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot r^2.$$

Čili pravidelný trojúheník je nejvýhodnější obrazec.

Mohou však nastat i jiné případy. Pokud $r \geq \max(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{S}}{2}, \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\sqrt{3}}})$, je porovnání také snadné:

$$S + 2\sqrt{\pi} \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2 < S + 4 \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2 < S + 2\sqrt{3\sqrt{3}} \cdot r\sqrt{S} + \pi r^2.$$

Čili pravidelný trojúheník je opět nejvýhodnější obrazec.

Zbylé dva případy si zkuste rozebrat sami. Vedou na řešení kvadratické nerovnice se dvěma neznámými S, r. Opět vyjde nejvýhodněji trojúhelník.

Poznámky opravovatele: S výjimkou *Honzy Houšťka* a *Jana Kynčla* všichni řešitelé ignorovali, že by r mohlo být tak velké, že se stopa náboje nemůže vejít celá dovnitř obrazce na terči. Tím vyřešili jen jednu část úlohy. Přesto jsem za případ dostatečně malého r dával 4 body, neboť to je ten „nejreálnější" případ (a také proto, že jsem tak tu úlohu původně myslel).

Dále bych chtěl upozornit, že je-li pravděpodobnost úspěchu nějakého pokusu p a pokus se opakuje N krát, pak Np *není* počet úspěchů, nýbrž *průměrný* počet úspěchů[1].

5. úloha

Skupina n kamarádů se domluvilo, že se sejdou mezi 5^{00} a 6^{00} odpoledne na přesně určeném místě. Každý z kamarádů na místo přijde náhodně mezi 5^{00} a 6^{00} a počká deset minut. Pokud

[1] Přesněji řečeno střední hodnota počtu úspěchů.

se do té doby všichni nesejdou, odchází (v případě, že přišel po 5^{50}, odejde už v 6^{00}). Jaká je pravděpodobnost, že se všech n kamarádů sejde?

Pokud se mají všichni kamarádi sejít, musí nastat jedna z těchto situací: Buď přijde první kamarád K_1, a to dříve než v 5^{50}, a ostatní přijdou do deseti minut po příchodu prvního — pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Druhá možnost je, že přijde jako první kamarád K_2, a to dříve než v 5^{50}, a ostatní do deseti minut po příchodu prvního — také pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Další možnosti jsou, že první přijde kamarád K_3, K_4, … K_n. Celková pravděpodobnost těchto jevů je

$$n \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Zbývá už jen možnost, že žádný z kamarádů nepřijde dříve než v 5^{50}. Pak už je ale jisté, že se potkají. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

a celková pravděpodobnost, že se setkání podaří, je tedy

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{5n}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{5n+1}{6^n}.$$

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů napsala řešení na první pohled správné, které však bylo už na druhý pohled chybné. Doporučuji proto všem pozorně si přečíst a promyslet vzorové řešení.

6. úloha

Nechť je dán čtverec $ABCD$. Zvolme náhodně P, $Q \in AB$, $R \in CD$. Jaká je pravděpodobnost, že trojúhelník PQR je ostroúhlý?

Nechť je délka strany čtverce rovna jedné. Zvolme tedy náhodně tři čísla x, y, z mezi nulou a jedničkou, které budou udávat po řadě vzdálenosti bodů P, Q od A a vzdálenost R od D. Trojúhelník PQR je ostroúhlý, právě když je buď $x < z < y$, nebo $y < z < x$. Protože všechna uspořádání tří čísel podle velikosti jsou stejně pravděpodobná (a je celkem šest možností), je výsledná pravděpodobnost[2] rovna 1/3.

[2]Musíme si však ještě uvědomit, že případy, kdy se nějaká dvě z čísel rovnají, nastanou s nulovou pravděpodobností.

Poznámky opravovatele: Nejkratší úloha, proto nejlépe překládaná. Kromě jedné řešitelky všichni pochopili zadání správně. Většina řešení se shodovala s autorským. Několik řešitelů použilo integrály (no, tak se to dá řešit taky, ale v tomto příkladu to bylo opravdu zbytečné). Pár řešitelů si aproximovalo úsečky pomocí n rovnoměrně rozmístěných bodů, pro ně spočítalo příslušnou pravděpodobnost a pak provedlo limitní přechod pro $n \to \infty$. Žádný z nich se však ani náznakem nezmínil, proč by takový postup měl fungovat. On totiž obecně nefunguje[3], jen za určitých předpokladů. Těmto jsem tedy udělil 1 bod.

7. úloha

Medvídek Pú má ve spíži dvě sklenice medu, v každé z nich je přesně dvacet lžic. Každou noc se Pú probudí, vstane, vplíží se do spíže a ují lžíci medu z náhodně vybrané sklenice. Když Pú dojí med z nějaké sklenice, nevšimne si toho. Všimne si ale, že ve sklenici není žádný med, pokud si chce zrovna nabrat. Jaká je pravděpodobnost, že když Pú poprvé zjistí, že ve sklenici není žádný med, nebude už ani ve druhé sklenici?

Snadno nahlédneme, že Pú nalezne prázdnou sklenici ve chvíli, kdy už je prázdná i ta druhá právě tehdy, když noc předtím byly prázdné obě sklenice, tzn. tehdy když během 40 nocí sáhne Pú pro med právě $20\times$ do první sklenice a $20\times$ do druhé.

Pokud chce tedy Pú dojíst obě sklenice současně, má $\binom{40}{20}$ možností, jak to učinit (z 40 nocí musí jíst právě $20\times$ z první sklenice). Každá tato možnost nastane s pravděpodobností 2^{-40}, neboť Pú musí $40\times$ zvolit „požadovanou“ sklenici (pokaždé s pravděpodobností $\frac{1}{2}$).

Hledaná pravděpodobnost tedy je $\dfrac{\binom{40}{20}}{2^{40}} \doteq 0{,}125$.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni ti, kteří za tuto úlohu nedostali plný počet bodů, udělali stejnou chybu. Počítali pravděpodobnost jako počet příznivých možností ku počtu nějakých všech možností. Buď došli ke správnému výsledku, ale svůj postup dostatečně nezdůvodnili, nebo si neuvědomili, že takto mohou postupovat, jen jsou-li všechny možnosti stejně pravděpodobné.

8. úloha

Na kružnici je rovnoměrně rozmístěno n oveček a jeden vlk. V každém tahu se vlk nahodně rozhodne, zda půjde doleva, nebo doprava, přemístí se a pokud na novém místě nalezne ovečku, sežere ji. Kam se má postavit chytrá ovečka, aby měla největší možnou pravděpodobnost, že ji vlk sežere jako poslední?

Na úvod musím zklamat všechny chytré ovečky: Ať si stoupnou, kam si stoupnou, vlk je sežere jako poslední vždy se stejnou pravděpodobností. Zkusme to tedy dokázat.

Očíslujme pole $0, \ldots, n$, kde na poli 0 stojí vlk, na ostatních polích ovečky. Dále p_i označme pravděpodobnost, že ovečka na i-tém poli bude sežrána jako poslední. Dále uvažujme jen $n \geq 3$ (pro menší n je důkaz triviální).

---

[3] Zkuste si tímto způsobem spočítat pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je racionální.

Snadno nahlédneme, že „protější ovečky“ budou sežrány se stejnou pravděpodobností, neboli $p_i = p_{n-i+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Teď si nakreslete obrázek, neboť ukázat platnost druhého potřebneho vztahu: $p_i = \frac{p_{i-1}+p_{i+1}}{2}$, $i = 2, \ldots, n-1$ je již komplikovanější.

Vlk se v prvním tahu vydá buď doleva nebo doprava (vždy s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Pokud bychom po prvním tahu „přečíslovali“ ovečky tak, aby vlk byl na nule, byla by i-tá ovečka na místě $i+1$, resp. $i-1$ s pravděpodobnostmi $\frac{1}{2}$. Jediné, co tedy ještě musíme ukázat, je, že pravděpodobnost, že bude i-tá ovečka sežrána poslední nezávisí na tom, že vedle vlka je na začátku „díra“ (ovšem jen pro $i = 2, \ldots, n-1$). To však vyplývá z toho, že každá možnost cesty vlka k vyžrání všech oveček kromě ovečky na místě i vede nutně přes díru a naopak, pokud by ovečka na místě díry měla být poslední přeživší ovečkou, pak by ovečka na i-tém místě jistě nebyla předposlední. Obojí je jasně vidět z obrázku. Tím je druhý vztah dokázán.

Podle druhého vztahu tedy je p_i aritmetickým průměrem p_{i-1} a p_{i+1}, z čehož plyne, že $\{p_i\}_{i=1}^n$ je aritmetická posloupnost. Ovšem podle prvního vztahu $p_1 = p_n$ ($\Rightarrow$ diference je nulová) a tedy $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$.

Poznámky opravovatele: Jak už bylo řečeno ve vzorovém řešení, chytrá ovečka, ať dělá, co dělá, stejně si nepomůže, pravděpodobnost být sežrána jako poslední je na všech místech stejná. Hodně řešení se pokoušelo přímo spočítat tuto pravděpodobnost, což je ovšem trochu komplikované a jen v málo případech se to povedlo, většinou byly opomenuty možnosti, kdy vlk chodí sem a tam, aniž by nějakou ovečku sežral, nebo, že před sežráním poslední ovečky musí vždy obejít celý kruh a podobně. Elegantnější řešení je uvědomit si, že má-li být ovečka sežrána jako poslední, vlk se musí nejprve dostat na místo s touto ovečkou sousedící, tu sežere a pak musí obejít celý kruh a sežrat druhou sousedku a až nakonec naši chytrou ovečku — a pravděpodobnost obejití celého kruhu je nezávislá na poloze ovečky a tedy jsou na tom všechny ovečky stejně (špatně). Ale při tomto způsobu řešení potřebuji nutně použít tvrzení, že vlk se s pravděpodobností 1 dostane v konečném čase na libovolné místo v kruhu, což sice všichni použili, ale ne všichni dokázali a potom dostali o dva body méně.