Povídání ke druhé sérii

V tomto úvodu krátce připomeneme pojmy z teorie čísel, které by se Ti mohly při řešení 2. série hodit (většina z nich je dosti jednoduchá, pravděpodobně jsi se s těmito pojmy již někdy setkal).

Jsou-li a, b celá čísla, pak řekneme, že a *dělí* b (píšeme $a \mid b$), pokud existuje celé číslo d takové, že platí $b = ad$.

Máme-li a, b celá, m přirozené, pak řekneme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b při modulu m, pokud číslo a dává při dělení číslem m stejný zbytek jako číslo b, jinými slovy $m \mid a - b$. Tuto skutečnost zapisujeme ve tvaru $a \equiv b \pmod{m}$, tento zápis pak nazýváme kongruencí.

Snadno si zajisté sám dokážeš (vše plyne přímo z definice), že kongruence mají následující vlastnosti:

(a) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, pak $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$.
(b) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a'd$, $b = b'd$ a $(d, m) = 1$, pak $a' \equiv b' \pmod{m}$.

Tyto dvě vlastnosti nám neříkají nic jiného, než že kongruence lze mezi sebou sčítat, násobit a za jistých předpokladů je lze dělit číslem.

Nechť je nyní p prvočíslo, uvažujme $p - 1$ čísel $1, 2, \dots, p - 1$. Je-li $a \in \mathbb{Z}$ a p nedělí a, je a kongruentní právě s jedním z čísel $1, 2, \dots, p - 1$. Všechna celá čísla nedělitelná p můžeme tedy rozdělit do $p - 1$ disjunktních skupin podle toho, s kterým z čísel $1, 2, \dots, p - 1$ jsou kongruentní.[1] Vybereme-li nyní z každé skupiny po jednom číslu, dostáváme systém p čísel, který nazýváme *redukovaný systém zbytků při modulu p.*

V některých úlohách by Ti mohla pomoci následující poměrně známá (a tedy pro úsporu místa zde nedokázaná) věta:

Věta. (Eulerova) *Buďte a, m libovolná nesoudělná čísla. Nechť*[2] *$\varphi(m)$ je počet čísel z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$, která jsou s m nesoudělná. Pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Speciálně tedy rovnice $a^l \equiv 1 \pmod{m}$ má řešení.

Jako speciální případ, uvažujeme-li navíc, že m je prvočíslo, dostáváme následující též známou větu:

Věta. (Malá Fermatova) *Nechť p je prvočíslo a a přirozené číslo nedělitelné p. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

[1] Do první skupiny dáme čísla dávající při dělení p zbytek 1, do druhé ta se zbytkem 2, . . . , do $(p - 1)$. čísla, která při dělení p dají zbytek $p - 1$.

[2] Funkce $\varphi(m)$ se nazývá *Eulerova*.

2. série

Téma: Teorie čísel

Termín odeslání: 30. ŘÍJNA 2000

1. ÚLOHA (3 BODY)

Čísla 37673, 151, 689986 a 135797531 mají jedno společné. Když je přečteme pozpátku, dostaneme stejné číslo, jako bylo původní číslo. Číslo s touto vlastností se nazývá palindrom. Prvních dvanáct palindromů jsou tedy čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, ... Najděte (bez použití počítače) dvoutisícíprvní palindrom.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Platí $31 \mid 5^{2001} - 1$?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které má právě 20 (kladných) dělitelů.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď n přirozené číslo. Určete poslední tři číslice (v dekadickém zápisu) čísla

$$(n+1)^{2001} + (n+2)^{2001} + \cdots + (n+1000)^{2001}\,.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte nejmenší n takové, že

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} S(k)\right) = 49,$$

kde $S(k)$ je ciferný součet čísla k (tj. součet číslic v jeho dekadickém zápisu).

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

K danému přirozenému číslu n najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y, aby platilo

$$2(2^{2^n} + 1) = x^2 + y^2 + x + y\,.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro každé prvočíslo p existuje nekonečně mnoho různých přirozených čísel n takových, že $p \mid 2^n - n$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Přirozené číslo n nazveme *vlnité*, jestliže se v jeho dekadickém zápise pravidelně střídají nenulové a nulové číslice, přičemž na místě jednotek je číslice nenulová. Např. 20603, 106, 4 jsou vlnitá čísla, 17, 120045, 5040 nejsou. Najděte všechna přirozená čísla n, která nejsou dělitelem žádného vlnitého čísla.

Řešení 2. série

1. úloha

Čísla 37673, 151, 689986 a 135797531 mají jedno společné. Když je přečteme pozpátku, dostaneme stejné číslo, jako bylo původní číslo. Číslo s touto vlastností se nazývá palindrom. Prvních dvanáct palindromů jsou tedy čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, ... Najděte (bez použití počítače) dvoutisícíprvní palindrom.

Nejdříve spočítáme, kolik existuje n-ciferných palindromů. Palindrom je číslo tvaru

$$a_0a_1\dots a_1a_0,$$

pro každé a_l, $l > 0$ máme 10 možností, pro $l = 0$ máme 9 možností. Nyní rozlišíme případ, kdy n je sudé a kdy n je liché (tyto případy se liší tím, zda se prostřední číslice v palindromu opakuje) a vidíme, že pro $n = 2k - 1$ i pro $n = 2k$ máme $9 \cdot 10^{k-1}$ různých n-ciferných palindromů.

Jednociferných a dvojciferných palindromů je tedy po 9, pro $n = 3$ a $n = 4$ dostáváme po 90 palindromech, pro $n = 5$ a $n = 6$ po 900. Celkem tedy máme 1998 palindromů s nejvýše šesti ciframi. Náš hledaný palindrom je tedy třetí nejmenší sedmiciferný. Stačí si uvědomit, že tři nejmenší sedmiciferné palindromy jsou čísla 1000001, 1001001, 1002001, a vidíme, že poslední z nich je náš hledaný palindrom.

Poznámky opravovatele: S úlohou ste si poradili prevažne dobre. Niektorí ste robili chyby z nepozornosti, ako napríklad „$1010101 < 1002001$“. Keďže úloha bola dosť jednoduchá, kládol som dôraz hlavne na eleganciu a jednoduchosť riešení. Za najzásadnejšiu chybu považujem hľadanie nejakého palindrómu pomocou počítačového programu. Ani najlepší počítač sa totiž nevyrovná nejakej jednoduchej úvahe, pomocou ktorej možno nájsť ľubovoľný palindróm krátkym výpočtom.

2. úloha

Platí $31 \mid 5^{2001} - 1$?

Jednoduchými úpravami lze nahlédnout, že číslo 31 dělí číslo $5^{2001} - 1$. Zde si předvedeme jeden ze způsobů, jak tuto skutečnost zdůvodnit:

$$5^{2001} - 1 = 5^{3\cdot 667} - 1 = \left(5^3\right)^{667} - 1 =$$
$$= 125^{667} - 1 = (31 \cdot 4 + 1)^{667} - 1.$$

Roznásobíme-li závorku $(31 \cdot 4 + 1)^{667}$podle binomické věty, dostaneme součet spousty členů, z nichž téměř všechny jsou dělitelné číslem 31 (až na jeden jediný sčítanec rovný jedné). Lze tedy psát

$$(31 \cdot 4 + 1)^{667} = 31 \cdot r + 1,$$

kde r je nějaké celé číslo. Dohromady s předcházejícím tedy máme

$$5^{2001} - 1 = (31 \cdot 4 + 1)^{667} - 1 = (31 \cdot r + 1) - 1 = 31 \cdot r,$$

tj. číslo $5^{2001} - 1$ je dělitelné číslem 31.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů vyřešila tuto úlohu správně. Ti, kteří si všimli, že $31|(5^{3k} - 1)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, ale nedokázali to, obdrželi jeden bod. Pokud někteří z vás používali kongruence a bez důkazu je mocnili či násobili, obdrželi body dva.

3. úloha

Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které má právě 20 (kladných) dělitelů.

Nechť $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Pak n má $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ dělitelů a toto číslo má být rovno dvaceti. Protože všechny způsoby, jak zapsat 20, jako součin několika čísel, jsou $20 = 20 \cdot 1 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 4 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, máme čtyři možnosti, jak může vypadat nejmenší číslo, které má dvacet dělitelů. Jistě, aby n bylo nejmenší, musíme volit $p_1 = 2$ a umocnit jej na největší mocninu, $p_2 = 3$ a tak dále. Tj. první možnost dává $n = 2^{19}$, druhá možnost $n = 2^9 \cdot 3^1$, třetí $n = 2^4 \cdot 3^3$ a poslední $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Stačí tedy porovnat tato čtyři čísla a zjistit, že $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ je nejmenší.

Poznámky opravovatele: Väčšina z vás dospela k správnemu výsledku podľa vzorového riešenia; našli sa aj takí, ktorí rozoberali prípady podľa počtu rôznych prvočísel v rozklade alebo podľa počtu činiteľov v prvočíselnom rozklade.

4. úloha

Buď n přirozené číslo. Určete poslední tři číslice (v dekadickém zápisu) čísla

$$(n + 1)^{2001} + (n + 2)^{2001} + \cdots + (n + 1000)^{2001}.$$

Symbol $a \equiv b$ zde značí, že čísla a a b dávají týž zbytek po dělení 1000.

Při výpočtu využijeme tvrzení, které se dá snadno dokázat z binomické věty (mimo to je snadným důsledkem tvrzení uvedeného v úvodu k této sérii):

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n.$$

Z čísel $n+1, n+2, \dots, n+1000$ právě jedno dává zbytek 0 po dělení tisícem, právě jedno dává zbytek 1, atd. Takže máme:

$$(n+1)^{2001} + (n+2)^{2001} + \cdots + (n+1000)^{2001} \equiv$$
$$0^{2001} + 1^{2001} + \cdots + 999^{2001} =$$
$$= (1^{2001} + 999^{2001}) + (2^{2001} + 998^{2001}) + \cdots + (499^{2001} + 501^{2001}) + 500^{2001} \equiv$$
$$\equiv (1^{2001} + (-1)^{2001}) + (2^{2001} + (-2)^{2001}) + \cdots + (499^{2001} + (-499)^{2001}) \equiv$$
$$\equiv 0.$$

Tedy poslední tři číslice jsou nuly.

Poznámky opravovatele: Úloha byla jednoduchá. Většina řešitelů ji vyřešila podobně jako v autorském řešení, jiní rozdělili čísla podle soudělnosti se 2 a 5 a pak sečetli tyto skupiny zvlášť. Nejčastější chybou bylo to, že řada řešitelů mlčky předpokládala, že když je součet cifer na místě jednotek dělitelný 1000, je 1000 dělitelný i celý součet, což samozřejmě nemusí být pravda.

2 body jsem uděloval za důkaz, že výsledek nezávisí na n, a po bodu za každou *dokázanou* nulu.

5. úloha

Najděte nejmenší n takové, že

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} S(k)\right) = 49,$$

kde $S(k)$ je ciferný součet čísla k (tj. součet číslic v jeho dekadickém zápisu).

Je známo, že ciferný součet čísla n dává po dělení devíti stejný zbytek jako samo číslo n. Stačí tedy ukázat, že výraz na levé straně nikdy nemůže mít zbytek 4 po dělení devíti. Když si napíšeme, jaké zbytky dostaneme pro prvních pár n (1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, ...), vidíme, že pro $n = 9$ máme zbytek 0. Když pak přičítáme $S(10)$, je to jako bychom přičítali $S(1)$, začínáme tedy znova od začátku, tyto zbytky se budou periodicky opakovat a žádná čtyřka se mezi nimi nevyskytuje.

Poznámky opravovatele: Príklad bol pomerne jednoduchý, hlavný problém bol však v tom, že väčšina riešiteľov si neuvedomila, že riešenie vôbec nemusí mať, a veľmi pracne sa ho snažila nájsť. Makačka celkom slušná, ale k výsledku nevedie. Pre budúcnosť radím, keď riešenie nie a nie nájsť, treba sa pokúsiť ukázať, že neexistuje, napr. nájsť podmienku, ktorú spĺňajú všetky hodnoty, pre ktoré príklad má riešenie, ale nespĺňa ju hodnota, pre ktorú riešenie hľadáme.

6. úloha

K danému přirozenému číslu n najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y, aby platilo

$$2(2^{2^n} + 1) = x^2 + y^2 + x + y\,.$$

Ukážeme, že k žádnému přirozenému číslu n neexistují přirozená čísla x, y taková, že je splněna rovnice

$$2\left(2^{2^n}+1\right)=x^2+y^2+x+y. \tag{$*$}$$

Za tímto účelem si označme levou stranu rovnice $(*)$ pro přirozené číslo n jako l_n, tj.

$$l_n=2\left(2^{2^n}+1\right).$$

Přímým dosazením snadno nahlédneme, že posloupnost l_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$ splňuje rekurentní vztah

$$l_{n+1}=\frac{(l_n-2)^2}{2}+2. \tag{$**$}$$

Počítejme nyní zbytky, které dává posloupnost l_n při dělení číslem 9. Platí $l_1=10$, tj. zbytek čísla l_1 při dělení číslem 9 je číslo 1. Zbytek čísla $l_2=34$ je 7. Zbytek čísla $l_3=514$ je 1, to by nám mohlo napovědět o platnosti následujícího tvrzení:

Pomocné lemma: Při dělení číslem 9 dává pro libovolné n číslo l_n zbytek 1 nebo 7.

Důkaz pomocného lemmatu: Lemma dokážeme matematickou indukcí. Pro $n=1$ dokazované tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro $n=k$, a budeme dokazovat, že pak platí i pro $n=k+1$.

Nechť tedy nejprve dává číslo l_k při dělení číslem 9 zbytek 1. Pak se dá zjevně psát ve tvaru $l_k=9\cdot c+10$, kde c je nějaké celé číslo. Dosadíme-li tento tvar do předpisu $(**)$ vidíme, že číslo l_{k+1} dává při dělení číslem 9 zbytek 7, tj. v tomto případě naše tvrzení platí i pro $n=k+1$.

Předpokládejme proto nyní, že číslo l_k má při dělení číslem 9 zbytek 7, pak se ovšem dá psát ve tvaru $l_k=9\cdot d+16$. Opětovným dosazením do rekurentního předpisu $(**)$ dostáváme, že l_{k+1} je dělitelné devíti se zbytkem 1.

Celkově jsme tedy ukázali, že číslo l_{k+1} dává při dělení číslem 9 zbytek 1 nebo 7, což jsme chtěli.

konec důkazu pomocného lemmatu

Pro libovolné n dává tedy levá strana naší rovnice při dělení devíti zbytek 1 nebo 7. Nyní sporem ukážeme, že ani v jednom z těchto případů neexistují přirozená čísla x, y taková, že by byla splněna rovnice $(*)$.

Mějme tedy přirozené číslo n a nechť číslo l_n dává při dělení číslem 9 zbytek Z. Dle předešlého je Z rovno buď číslu 1, nebo číslu 7. Uvažujme dále, že existují taková čísla x, y, že je splněna rovnice $(*)$.

Pak se dá psát $l_n=9\cdot f+Z$, kde f je nějaké přirozené číslo, dosazením tohoto do rovnice $(*)$ máme

$$9\cdot f+Z=x^2+y^2+x+y,$$

což po vynásobení čtyřmi dává po drobné úpravě vztah

$$36\cdot f+4\cdot Z+2=(2x+1)^2+(2y+1)^2. \tag{$***$}$$

Dosazením za Z vidíme, že levá strana rovnosti $(***)$ dává při dělení číslem 9 zbytek 3 nebo 6. To však už je hledaný spor, neboť pravá strana nemůže při dělení číslem 9 nikdy dávat zbytek 3 nebo 6.

Skutečně, na pravé straně rovnosti $(***)$ je součet dvou druhých mocnin přirozených čísel. Druhá mocnina dává při dělení číslem 9 jen zbytky 0, 1, 4 a 7, jak si čtenář snadno ověří prostým spočítáním. Součet dvou druhých mocnin pak může při dělení devíti dávat jen zbytky 0, 1, 2, 4, 5, 7 a 8.

Tím jsme nalezli hledaný spor a ukázali jsme, že k žádnému přirozenému číslu n neexistují přirozená čísla x, y taková, že je splněna rovnice $(*)$.

Poznámky opravovatele: Riešitelia sa až na dve výnimky rozpadli do troch tried. Tí, čo našli riešenia rovnice, dostali 0 bodov a kurz sčítavania. Tí, ktorím sa nepodarilo dokázať neexistenciu riešenia rovnice, najčastejšie vďaka predpokladu, že 4 delí súčet každých dvoch párnych čísel, dostali iba 0 bodov. A konečne piati, ktorí ukuchtili odvar vzorového riešenia, dostali 5 bodov.

7. úloha

Dokažte, že pro každé prvočíslo p existuje nekonečně mnoho různých přirozených čísel n takových, že $p \mid 2^n - n$.

Je-li $p = 2$, pak úlohu řeší všechna sudá přirozená čísla n, tedy máme nekonečně mnoho řešení $n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ Pokud p je liché prvočíslo, pak čísla 2 a p jsou nesoudělná a podle Malé Fermatovy věty (kterou nalezneš např. v úvodu k této sérii) je $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, tedy i $2^{l(p-1)} \equiv 1 \pmod p$ pro každé l. Zvolíme-li $n = (p-1)^{2k}$, dostáváme $2^n - n \equiv 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} \equiv 1 - (-1)^{2k} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod p$. Pro $n = (p-1)^{2k}$, kde k je libovolné přirozené číslo, p dělí číslo $2^n - n$. Našli jsme tedy nekonečně mnoho řešení naší úlohy.

Poznámky opravovatele: Úloha bola pomerne jednoduchá. V podstate stačilo nájsť vzťah pre n pomocou p a nejakej voľnej konštanty k (aby ich bolo nekonečne mnoho) a ukázať, že splňuje podmienky zadania úlohy. Vyskytli sa v podstate 4 druhy riešení:
(*i*) väčšina riešiteľov mala riešenie v tvare $(kp-1)(p-1)$,
(*ii*) 2 riešenia podľa vzoráku,
(*iii*) iné riešenia v tvare obdobnom ako (*i*),
(*iv*) zopár odvážlivcov sa to natvrdo snažilo dokázať pomocou periodičnosti zbytkov podielu $2^n/p$ a n/p a na veľké prekvapenie sa v tom ani veľmi nezamotali.

8. úloha

Přirozené číslo n nazveme *vlnité*, jestliže se v jeho dekadickém zápise pravidelně střídají nenulové a nulové číslice, přičemž na místě jednotek je číslice nenulová. Např. 20603, 106, 4 jsou vlnitá čísla, 17, 120045, 5040 nejsou. Najděte všechna přirozená čísla n, která nejsou dělitelem žádného vlnitého čísla.

K řešení úlohy budeme používat kongruence a Eulerovu větu. Tyto pojmy jsme si připomenuli v úvodu k této sérii; pokud se chceš dozvědět více, zkus nahlédnout do libovolné knížky o teorii čísel nebo si přečíst seriál o teorii čísel (v ročence 17. ročníku našeho semináře).

Pokud n je dělitelné deseti, pak každý jeho násobek končí nulou, tedy není vlnitý. Pokud je n dělitelné 25, pak každý jeho násobek končí na 00, 25, 50 nebo 75, čili není vlnitý. Tudíž násobky 10 a 25 patří mezi hledaná čísla. Ukážeme, že žádná další n už nevyhovují.

Mějme nejprve n liché, nedělitelné pěti. Použijeme nyní Eulerovu větu pro $a = 10$ a $m = (10^k - 1)n$. Najdeme tak l, pro něž $10^l \equiv 1 \pmod{m}$, a tedy i $10^{kl} \equiv 1 \pmod{m}$. Tudíž číslo

$$10^{kl} - 1 = (10^k - 1)(10^{k(l-1)} + \cdots + 10^k + 1)$$

je dělitelné $(10^k - 1)n$, a proto číslo $x_k(n) = 10^{k(l-1)} + \cdots + 10^k + 1$ je dělitelné n. Pro $k = 2$ jsme tak dostali kýžený vlnitý násobek čísla n.

Nechť je n liché, dělitelné pěti. Protože není dělitelné 25, je $n = 5n'$, kde n' je liché, nedělitelné pěti. Číslo $5x_2(n')$ je vlnitý násobek n.

Nyní se zaměřme na mocniny dvou. Indukcí ukážeme, že pro každé $t \geq 1$ existuje v_t – vlnitý násobek 2^{2t+1} (odtud už poplyne, že existuje vlnitý násobek každé mocniny dvou). Aby nám indukce dobře fungovala, dokážeme o něco více, a sice to, že v_t má $2t - 1$ cifer. Pro $t = 1$ volme $v_1 = 8$. V indukčním kroku vytvoříme v_{t+1} z v_t tak, že před něj napíšeme cifry $c0$ (c určíme později), neboli položíme $v_{t+1} = v_t + c10^{2t}$. Z indukčního předpokladu víme, že $v_t/2^{2t+1}$ je celé číslo, označme jej d. Chceme, aby

$$\frac{v_{t+1}}{2^{2t+3}} = \frac{v_t + c2^{2t}5^{2t}}{2^{2t+3}} = \frac{2d + c5^{2t}}{8}$$

bylo celé číslo. K tomu ovšem stačí zvolit $c \equiv -2d \pmod{8}$. Takové c mezi 1 a 9 vždy existuje.

Poslední zbývající případ je násobek mocniny dvou, nedělitelný pěti, tj. $n = 2^t n'$, kde n' je liché a nedělitelné pěti. Podle předchozího odstavce existuje vlnitý násobek v čísla 2^t, označme k počet jeho cifer. Číslo $vx_{k+1}(n')$ je vlnitý násobek n.

Jak na to přijít? Volba $m = (10^k - 1)n$ může vypadat jako z nebe spadlá. Dá se na ni ovšem poměrně snadno přijít: zkusíme-li najít vlnitý násobek v co nejjednodušším tvaru, vyzkoušíme číslo 10101 ... 101, neboli $(10^{2l} - 1)/(10^2 - 1)$. Chceme, aby toto číslo bylo dělitelné n, tedy chceme, aby $(10^2 - 1)n$ dělilo $10^{2l} - 1$, což přímo vede k použití Eulerovy věty (k jsme do toho připletli pro vyřešení sudých čísel v posledním odstavci). Také čísla v_t jsme vlastně konstruovali nejjednodušším možným způsobem – vždy jsme před číslo přidali jednu nulu a jednu nenulu.

Poznámky opravovatele: Přestože počet řešení byl na osmou úlohu neobvykle velký, pouze *Katka Quittnerová*, *Honza Kynčl* a *Martin Tancer* je měli zcela správně (tj. za 5 bodů). Většina ostatních řešitelů zapomněla na zcela zásadní věc. Mají-li se najít nějaká čísla daných vlastností, musí se

(i) nalezená čísla popsat tak, že je již zřejmé, která čísla to jsou (v této úloze to byla čísla dělitelná 10 nebo 25), a dokázat o nich, že podmínky úlohy splňují,

(ii) dokázat, že jiná čísla už to být nemohou.

Většina řešitelů nalezená čísla pouze popsala, ale nedokázala nic (0 bodů). Asi 10 řešitelů dokázalo jen (i) (1 bod). Pouze tři výše jmenovaní dokázali i (ii).