Povídání ke třetí sérii

Pod tímto honosným názvem se skrývá zcela banální tvrzení[1]:

Pokud do n důlků umístíme $n+1$ kuliček, tak v některém důlku budou alespoň dvě kuličky. Pokud tam umístíme $kn+1$ kuliček, bude v některém důlku více než k kuliček.

Kupodivu lze takovéhle jednoduché pozorování použít k velice rafinovaným a netriviálním důkazům. Jedna z nejsložitějších částí kombinatoriky, takzvaná Ramseyova teorie, se (trochu zjednodušeně řečeno) zabývá používáním a zobecňováním Dirichletova principu.

Někdy se místo „Dirichletův princip“ říká „přihrádkový princip“ nebo též „princip holubníku“ (v jednom oblíbeném znění se hovoří o umisťování $n+1$ holubů do n částí holubníku). My se přidržíme názvu Dirichletův princip, dále jen DP.

DP lze obvykle použít tehdy, když máme dokázat existenci něčeho, zejména když máme co do činění s konečnými množinami. Hlavní problém je poznat, co jsou přihrádky a co kuličky. Ukažme si nyní několik jednoduchých aplikací DP.

(1) Na matfyzu studují dva lidé, kteří mají narozeniny v týž den.
Důkaz: Rozdělíme matfyzáky (kuličky) do skupin (důlků) podle toho, kdy mají narozeniny. Máme 366 důlků a alespoň 367 kuliček (matfyzáků je více než dva tisíce). Aplikací DP je důkaz hotov.

(2) V Praze žijí dva lidé, kteří mají na hlavě stejný počet vlasů.
Důkaz: Každý člověk má totiž na hlavě nejvýše 300 000 vlasů, obyvatel Prahy je více než 1 200 000. Dokonce takto dokážeme, že existuje pět lidí se stejným počtem vlasů.[2]

(3) Mezi dvanácti celými dvojcifernými čísly najdeme dvě, jejichž rozdíl je dvojciferné číslo s oběma ciframi stejnými.
Důkaz: Chceme vlastně najít dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný 11. Rozdělíme tedy našich 12 čísel do 11 přihrádek podle zbytku po dělení 11, v některé přihrádce budou (podle DP) dvě čísla, jejich rozdíl je dělitelný 11.

(4) Pokud jsou a a b nesoudělná, tak desítkový zápis čísla a/b je buď ukončený, nebo periodický s periodou nejvýše $b-1$.
Důkaz: Uvažme postup pro písemné dělení a/b – v každém kroku získáme nějaký zbytek, což je jedno z čísel $0, 1, \dots, b-1$. Pokud někdy budeme mít zbytek 0, zápis podílu je ukončený. Jinak se mezi zbytky vyskytuje jen $b-1$ různých čísel, tedy (podle DP) mezi b po sobě jdoucími zbytky jsou dva stejné, označme počet kroků mezi nimi jako k ($k<b$). Protože zbytek jednoznačně určuje další postup dělení, je zápis a/b periodický s periodou k (a možná i s nějakou menší).

(5) Máme za sebou v nějakém pořadí napsána čísla $1, 2, \dots, 101$. Dokažte, že můžeme vyškrtnout 90 z nich tak, že zbylých 11 tvoří rostoucí nebo klesající posloupnost.
Důkaz: Dokážeme rovnou zobecnění: místo 101 uvažujme k^2+1 čísel $x_0, \dots, x_{k^2}$, najdeme rostoucí nebo klesající podposloupnost délky $k+1$. Pro každé i označme a_i délku nejdelší

[1] Jako první ho výslovně použil pan Dirichlet (1805–1859) v teorii čísel.

[2] Zde se ovšem Robert dopustil drobné chyby. Abychom dokázali existenci pěti lidí se stejným počtem vlasů na hlavě, potřebujeme alespoň 1 200 205 obyvatel Prahy – musíme totiž počítat i s holohlavými jedinci (pozn. aut.).

rostoucí podposloupnosti končící x_i a b_i délku nejdelší klesající podposloupnosti číslem x_i začínající. Takto získáme $k^2 + 1$ dvojic čísel. Pokud všechny monotónní podposloupnosti mají délku nejvýše k, tak různých dvojic je nejvýše k^2, čili (DP!) nějaká dvojice se opakuje, najdu $i < j$, že $a_i = a_j$ a $b_i = b_j$. Pokud je však $x_i < x_j$, tak musí být $a_j \geq a_i + 1$ (rostoucí podposloupnost končící x_i můžeme prodloužit o x_j). Pokud je $x_i > x_j$, tak $b_i \geq b_j + 1$, v obou případech dostáváme spor.

3. série

Téma: Dirichletův princip

Termín odeslání: 11. prosince 2000

1. úloha (3 body)

Na šachovnici 8×8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.

2. úloha (3 body)

Hrací plán na „Člověče, nezlob se“ je tvořen kružnicí s 36 políčky. Kolik nejméně potřebujeme figurek, abychom při jejich libovolném rozmístění a libovolném hodu kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou vyhodit?

3. úloha (3 body)

Město New York se skládá ze 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které tvoří pravidelnou čtvercovou síť o hraně 100 metrů (šířku ulic zanedbáváme). V ulicích města je 11401 telefonních automatů. Ukažte, že ve městě existuje dvojice telefonních automatů, které jsou od sebe vzdáleny nejvýše 200 metrů chůze po ulici.

4. úloha (5 bodů)

Šachový velmistr Pavel se chystá na důležitý turnaj. Na trénink má 76 dnů, každý den chce sehrát alespoň jednu partii, celkem však ne více než 132. Ukažte, že v nějakých po sobě jdoucích dnech sehrál přesně 21 partií.

5. úloha (5 bodů)

Na stole tvaru čtverce 1×1 metr je umístěno několik koláčků[3] (možná se někde překrývají, ale jistě nepřesahují okraj stolu). Celkový obvod všech koláčků je 10 metrů. Ukažte, že je možné jedním řezem nožem (tj. jednou přímkou) protnout alespoň 4 koláčky.

6. úloha (5 bodů)

Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze z rostoucí posloupnosti všech prvočísel vybrat několik bezprostředně po sobě následujících členů tak, že tyto napsané za sebou v desítkové soustavě (například 35711, 7111317 a pod.) tvoří číslo, které je dělitelné n.

7. úloha (5 bodů)

Nechť n je přirozené číslo. Z čísel $1,\ 2,\ \dots,\ 2n$ vybereme libovolných $n+1$. Dokažte, že mezi vybranými čísly vždy existují dvě různá čísla, z nichž jedno dělí druhé.

---

[3] Jak každý ví, koláček má tvar kruhu.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Dokažte, že existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000. Pro náročnější: Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000 a končí na 009 (k plnému počtu bodů ale stačí vyřešit první část úlohy).

Řešení 3. série

1. úloha
Na šachovnici 8×8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.

Dříve než přistoupíme k řešení naší úlohy, zastavme se trochu u jejího zadání. Zadání naší úlohy se dá totiž chápat dvěma způsoby, hlavním problémem je, co si přesně člověk představí pod pojmem „dvě věže se neohrožují“. Většina řešitelů brala, že se dvě věže neohrožují právě tehdy, když stojí v různých řadách a zároveň v různých sloupcích. Nejprve si proto ukážeme autorské řešení v tomto případě, pak se budeme zabývat nejčastějšími chybami, které se u řešitelů vyskytovaly a poté přejdeme na druhý způsob, jak bylo možno zadání úlohy pochopit.

Jak tedy úlohu elegantně vyřešit? Rozdělme si pole šachovnice na osm skupin po osmi polích a to následujícím způsobem (pole ve stejné skupině mají stejná čísla):

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Snadno nyní nahlédneme (šachovnici jsme totiž v podstatě rozdělili po úhlopříčkách), že věže stojící jen v jedné z osmi skupin se vzájemně neohrožují. Stačí proto ukázat, že alespoň jedna ze skupin obsahuje alespoň pět věží. K tomu použijeme Dirichletův princip.

Celkově máme na šachovnici 33 věží, z nichž každá může být v jedné z osmi skupin. Jelikož $33 > 4 \cdot 8$, vidíme z Dirichletova principu, že existuje skupina, která obsahuje pět věží, těchto pět věží se vzájemně neohrožuje a úloha je vyřešena.

Úlohu lze samozřejmě řešit i mnoha jinými způsoby. Bohužel velká část řešitelů dělala ve svých úvahách logické chyby. Tu nejčastější bych zde vysvětlil.[4]

V čem byl tedy zakopaný pes? V zadání úlohy jsi měl napsáno, abys *dokázal*, že z 33 věží na šachovnici lze vybrat pět, které se neohrožují. Ukažme si, jak řešitelé postupovali:

„Jelikož máme na šachovnici 33 věží, musí ležet alespoň v pěti různých řadách a alespoň v pěti různých sloupcích. Z toho zřejmě plyne, že existuje pět věží, které se neohrožují.“

Za takováto a jim podobná řešení jsem uděloval 0 bodů. U důkazových úloh je totiž důležité, aby jednotlivé kroky řešení plynuly logicky z předcházejících kroků. V uvedeném postupu řešitel sice správně odvodil jednoduchou skutečnost, že všech 33 věží musí být postaveno alespoň v pěti různých sloupcích a pěti různých řadách, ale tato skutečnost bohužel *nestačí* k tomu, aby se dalo pokračovat v dalších úvahách.

Jako vysvětlení přijmi tento obrázek. Máš na něm vyznačeno 17 věží, které jsou dohromady postaveny v pěti různých řadách a v pěti různých sloupcích (dokonce v osmi). Ovšem *není* pravda, že z těchto věží lze vybrat pět, které se vzájemně neohrožují:

			V				
			V				
			V				
V	V	V	V	V	V	V	V
			V				
			V				
			V				
			V				

Při správném řešení je proto nutné odvodit z toho, že máme 33 věží, mnohem více než jen skutečnost, že věže leží v pěti různých řadách a sloupcích. Samotný tento fakt, jak je vidět, nestačí.

Na závěr se ještě zastavme u samotného zadání naší úlohy. Několik řešitelů ho pochopilo tak, že „dvě věže se neohrožují i v případě, když leží ve stejné řadě nebo sloupci, ale mezi nimi je další věž“. S ohledem na šachovou hru si myslím, že to má také svoji logiku, a proto jsem toto chápání zadání také uznával a za správné řešení uděloval plný počet bodů. V tomto případě lze ovšem nalézt dokonce více věží než pět, které se vzájemně neohrožují. Zkus si to rozmyslet sám.

2. úloha

Hrací plán na „Člověče, nezlob se“ je tvořen kružnicí s 36 políčky. Kolik nejméně potřebujeme figurek, abychom při jejich libovolném rozmístění a libovolném hodu kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou vyhodit?

---

[4] U této chyby jsem řešitelům do řešení psal jen, že dělají chybu jako mnoho ostatních a bližší vysvětlení naleznou v autorském řešení.

Mějme nejprve 18 figurek rozestavených tak, že se obsazená a prázdná políčka střídají. Hodíme-li nyní na kostce jedničku (nebo trojku nebo pětku), pak nemůžeme vyhodit žádnou figurku. 18 figurek tedy nestačí.

Nyní dokážeme, že 19 figurek stačí. Mějme tedy libovolné rozestavení těchto devatenácti figurek a předpokládejme, že nám na kostce padlo číslo k. Předpokládejme, že figurky jsou rozestavené tak, že žádná žádnou nemůže vyhodit, a chceme dospět ke sporu. Posuňme tedy první figurku o k políček. Toto políčko musí být prázdné. Posuňme druhou, třetí atd. Jistě se nám nemůže stát, že bychom dvě figurky posunuli na stejné políčko. Máme tedy 19 políček, na kterých stojí figurky, a 19 cílových políček, která musí být prázdná. Celkem jsme tedy našli 38 různých políček, ale máme jich jen 36. A to je spor.

Poznámky opravovatele: Úloha měla 2 části. Tu jednodušší (důkaz, že 18 figurek nestačí) jsem hodnotil jedním bodem, 2 body jsem uděloval za důkaz, že 19 figurek vždy stačí. Mnoho z vás dokázalo pouze to, že 19 figurek stačí jen v nějakých případech, což jsem podle obecnosti těchto případů hodnotil 0 až 1 bodem.

Několik řešitelů diskutovalo případ, že se po šestce hází znova. Úlohu lze dokázat pro libovolný hod nedělitelný 36, podle mně známých pravidel „Člověče, nezlob se“ ale figurka po hodu šestky vyhazuje i cestou, takže to řešení nijak nemění.

3. úloha

Město New York se skládá ze 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které tvoří pravidelnou čtvercovou síť o hraně 100 metrů (šířku ulic zanedbáváme). V ulicích města je 11401 telefonních automatů. Ukažte, že ve městě existuje dvojice telefonních automatů, které jsou od sebe vzdáleny nejvýše 200 metrů chůze po ulici.

Vezměme křižovatku a čtyři přilehlé ulice (100 metrů každým směrem). Pokud na tomto území stojí dvě telefonní budky, pak jejich vzdálenost je nejvýše 200 metrů chůze. Chceme tedy ukázat, že New York můžeme pokrýt malým počtem takovýchto oblastí.

Stačí, když si šikovně zvolíme centra těchto oblastí. Na první severojižní ulici to bude na křižovatce s druhou, čtvrtou, ... východozápadní ulicí. Stejné to bude na třetí, páté, a všech lichých severojižních ulicích. Na sudých budou centra ležet na křižovatkách s lichými východozápadními ulicemi. Snadno se spočítá, že na pokrytí New Yorku tímto způsobem potřebujeme $75 \cdot 151 + 75 = 11400$ oblastí. To je ale náhoda, telefonních budek je tu 11401, tak to musí v alespoň jedné oblasti být (podle Dirichletova principu) alespoň dvě budky.

Poznámky opravovatele: Závažné chyby se dopustila asi polovina řešitelů (0 bodů): snažili se dokázat úlohu tím, že popsali určité rozmístění telefonů, a (v lepším případě) řekli, že je nejlepší, bez jakéhokoli zdůvodnění. Velká část zbytku k tomu přidala pokus o důkaz, že ono rozmístění je nejlepší (1 bod) – většinou argumentovali tím, že když se posune libovolný telefon, tak bude vzdálenost nějakých dvou menší než 200 metrů. To je sice pravda, ale to ještě nic neříká o tom, zda existuje nějaké úplně jiné rozmístění automatů, které je „lepší“. Zkrátka při posunutí více než jednoho automatu může být situace jiná, a to ještě posouváním nevyčerpáme všechny možnosti rozmístění.

Někteří řešitelé prostě vydělili celkovou délku ulic (často špatně spočítanou) počtem automatů – aniž by popsali, co to vlastně znamená a jak to souvisí s Dirichletovým principem.

Ve víceméně správných řešeních se objevily dva principy důkazu: jeden byl podobný vzorovému, druhý spočíval v pokrývání ulic stometrovými okolími telefonů a následném počítání celkové délky pokrytých ulic.

4. úloha

Šachový velmistr Pavel se chystá na důležitý turnaj. Na trénink má 76 dnů, každý den chce sehrát alespoň jednu partii, celkem však ne více než 132. Ukažte, že v nějakých po sobě jdoucích dnech sehrál přesně 21 partií.

Zkusme nejprve tuto úlohu řešit pro 77 dnů namísto 76. Základ úspěšného řešení je dobré značení, označme tedy s_i počet partií, které Pavel sehrál do dne i včetně (tedy $s_0 = 0$, s_1 je počet partií odehraných první den, $s_{77} \leq 132$). Protože každý den odehrál alespoň jednu partii, platí $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{77}$. Hledáme i, j taková, aby $s_i + 21 = s_j$ (což značí, že ve dnech $i+1$, $i+2$, $\ldots$, j Pavel odehrál 21 partií). Uvažme proto čísla s_0, $\ldots$, s_{77}, $s_0 + 21$, $\ldots$, $s_{77} + 21$. Jedná se o $2 \cdot 78 = 156$ čísel mezi 0 a $132 + 21 = 153$. Určitě tedy (podle Dirichletova principu) nějaká dvě z nich mají stejnou hodnotu. Protože čísla s_i (a tedy i $s_i + 21$) tvoří rostoucí posloupnost, je jedno z těch dvou stejných čísel s_j (pro nějaké j) a druhé $s_i + 21$ (pro nějaké i), jsme tedy hotovi.

Zkusíme-li nyní stejný postup použít pro zadanou úlohu, zjistíme, že máme $2{\cdot}77 = 154$ čísel mezi 0 a 153, a tedy Dirichletův princip nám neřekne nic. Nebudeme však zoufat a zkusíme v řešení pokračovat. Pokud by náhodou byla dvě z oněch 154 čísel stejná, dokončíme důkaz tak jako minule. Jinak zjevně musí čísla s_i a s_i+21 nabývat každé hodnoty mezi 0 a 132 právě jednou. Zjevně je tedy $s_i = i$ pro $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 20$. Čísla $21,\ \ldots,\ 41$ jsou už použita čísly $s_i + 21$, takže pro $i = 21,\ \ldots,\ 41$ platí $s_i = i + 21$ atd. Když budeme takto dále pokračovat, postupně odvodíme $s_{42} = 84$, $s_{43} = 85$, $\ldots$, $s_{63} = 126$, $s_{64} = 127$, $\ldots$, $s_{69} = 132$. Pro hodnotu s_{70} a další již nezbyde volná hodnota (tento problém byl způsoben tím, že číslo 21 nedělí 154). Úloha je vyřešena.

Poznámky opravovatele: Narozdíl od vzorového řešení většina řešitelů rozkládala čísla s_1, $\ldots$, s_{76} do množin podle zbytku po dělení 21. Pak bylo třeba dokázat, že existují čísla ležící ve stejné množině, jejichž rozdíl je právě 21 a ne $42,\ 63,\ \ldots$, v čemž jste velmi často dělali chyby.

5. úloha

Na stole tvaru čtverce 1×1 metr je umístěno několik koláčků[5] (možná se někde překrývají, ale jistě nepřesahují okraj stolu). Celkový obvod všech koláčků je 10 metrů. Ukažte, že je možné jedním řezem nožem (tj. jednou přímkou) protnout alespoň 4 koláčky.

Součet průměrů všech koláčků je $10/\pi$ metrů, tedy více než tři metry. Zvolme jednu hranu stolu a všechny koláčky na ni (kolmo) promítneme. Koláček o průměru d se zjevně promítne na

[5] Jak každý ví, koláček má tvar kruhu.

úsečku o délce d. Celkem tedy na hraně stolu dlouhé jeden metr máme několik úseček, jejichž celková délka je více než tři metry, tudíž nějakým bodem musí procházet alespoň čtyři úsečky. Kolmice k hraně stolu vztyčená v tomto bodě tedy protíná alespoň čtyři koláčky a důkaz je hotov (použili jsme princip podobný Dirichletovu, ovšem místo počtu rozmisťovaných kuliček – zde bodů – jsme použili délku).

Poznámky opravovatele: Mnoho řešitelů dostalo 0 bodů – jejich řešení totiž měla k důkazu hodně daleko. Důkazem není, když vezmu dva speciální případy (řeknu, že to jsou ty nejhorší, nejdůležitější, ...) a zjistím, že pro ně dokazované tvrzení platí! Nepomůže ani, když těch případů vezmu dvacet, ani když tvrzení platí pro všechny případy, které mě napadly. Tak mohu postupovat, když chci odhadnout, jestli tvrzení platí nebo neplatí. Když jej ale chci dokázat, je třeba nějak zdůvodnit, že tvrzení platí ve **všech** případech. Pokud je těch případů konečně mnoho, pak bych eventuálně mohl rozebrat všechny případy (i když to není zrovna elegantní postup); pokud jich však je nekonečně mnoho (a to je u pěkných matematických úloh častější), je třeba použít nějakou úvahu, která rozebere všechny případy najednou.

Tato úvaha by však měla být přesná a jasná. V této úloze mnohá řešení začínala tím, že si koláčky rozdělíme do řad – ale jak to uděláme? Koláčky nemusí být rozmístěny pravidelně, musím tedy říct, co udělám s koláčky, které jsou „na hranici mezi sousedními řadami“.

Častou chybou byla domněnka, že koláčky se musí překrývat. Taková řešení přinesla svému autorovi 0 bodů, protože koláčky se překrývat nemusí. Zkuste si rozmyslet, že do libovolně malého čtverce mohu rozmístit nepřekrývající se kruhy se součtem obvodů větším než 1 000 000.

Většina správných řešení postupovala stejně jako řešení autorské. Jen někteří řešitelé (dostali za to $+i$) dokazovali, že pokud je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ několik intervalů se součtem délek větším než 3, pak se v některém bodu protínají alespoň 4 intervaly. Ostatní řešitelé (jakož i autor) toto tvrzení považovali za zřejmé, ale je skutečně zřejmé? Úloha šla řešit i tak, že na stůl nakreslím rovnoměrně n rovnoběžek s hranou stolu (n zvolím hodně velké). Koláč o průměru d protne $dn \pm 1$ přímek, spočítáme počet průsečíků koláč–přímka a zjistím (z DP), že některá přímka protíná alespoň 4 koláčky.

6. úloha

Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze z rostoucí posloupnosti všech prvočísel vybrat několik bezprostředně po sobě následujících členů tak, že tyto napsané za sebou v desítkové soustavě (například 35711, 7111317 a pod.) tvoří číslo, které je dělitelné n.

Nejprve předpokládejme, že n je dělitelné dvěma nebo pěti. Pokud sudé n má dělit číslo a tvořené posloupností po sobě jdoucích prvočísel, pak a musí končit sudou číslicí, tedy poslední prvočíslo v zápisu a musí být 2. Pak ale nutně $a = 2$ a tedy i $n = 2$. Dělí-li n dělitelné pěti číslo a tvořené posloupností po sobě jdoucích prvočísel, pak a musí končit číslicí 0 nebo 5, tedy poslední prvočíslo v zápisu a musí být 5, takže $a \in \{5,\ 35,\ 235\}$. Číslo n je dělitel a, který je navíc dělitelný pěti, takže $n \in \{5,\ 35,\ 235\}$.

Dále tedy předpokládejme, že n je nesoudělné s 10. Ukážeme, že pak už má n nutně násobek v požadovaném tvaru. Označme si $p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots$ rostoucí posloupnost všech prvočísel a pro $k \leq l$ dále označme $a_{k,l}$ číslo, jehož dekadický zápis je tvořený posloupností čísel

$p_k,\ p_{k+1},\ \ldots,\ p_l$. Uvažujme čísla $a_{n+1,n+1},\ a_{n,n+1},\ a_{n-1,n+1},\ \ldots,\ a_{1,n+1}$. To je skupina $n+1$ čísel, podle Dirichletova principu tedy mezi nimi existují dvě, která dávají stejný zbytek po dělení n. Nechť jsou to $a_{k,n+1}$ a $a_{l,n+1}$ $(k < l)$. Pak číslo $a = a_{k,n+1} - a_{l,n+1}$ je dělitelné n. Na druhou stranu, číslo a lze psát ve tvaru $a = a_{k,l-1} \cdot 10^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Jelikož n je nesoudělné s 10, musí n dělit číslo $a_{k,l-1}$, což je číslo v požadovaném tvaru.

Úlohu tedy řeší čísla $n = 2,\ 5,\ 35,\ 235$ a dále všechna čísla n nesoudělná s 10.

Poznámky opravovatele: Za správné vyřešení úlohy pro n dělitelná dvěma nebo pěti jsem dával 1 bod (byla to přecejen značně jednodušší část úlohy, i když i zde se někteří řešitelé nevyhnuli chybám), za úplné vyřešení úlohy pro n nesoudělná s 10 pak 4 body. Za nedostatečné, případně chybějící zdůvodnění této části řešení jsem podle závažnosti strhával odpovídající počet bodů.

7. úloha

Nechť n je přirozené číslo. Z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ vybereme libovolných $n+1$. Dokažte, že mezi vybranými čísly vždy existují dvě různá čísla, z nichž jedno dělí druhé.

Každé z $n+1$ vybraných čísel vyjádříme ve tvaru $2^{k_i} l_i$, kde k_i, l_i jsou přirozená čísla, l_i je liché. Možné hodnoty l_i jsou $1, 3, \ldots, 2n-1$, tedy celkem n hodnot. My máme vybráno $n+1$ čísel, tudíž pro nějaké $a \neq b$ platí $l_a = l_b$. Zjevně menší z čísel $2^{k_a} l_a$, $2^{k_b} l_b$ dělí to větší.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení byla založena na faktu, že každé číslo má největšího lichého dělitele a pokud dvě čísla mají stejného, pak jedno z nich dělí druhé. Někteří rebelové ze Slovenska provedli důkaz indukcí. Většina špatných řešení spočívala v důkazu, že k vybraným číslům $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ nelze vybrat $(n+1)$. číslo a tato možnost je „nejhorší“.

8. úloha

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000. Pro náročnější: Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000 a končí na 009 (k plnému počtu bodů ale stačí vyřešit první část úlohy).

Řešení lze nejsnáze provést pomocí následujícího užitečného lemmatu. Nejprve však něco definic. Pro reálné číslo x značíme pomocí $\{x\}$ tzv. *necelou část čísla* x, tj. takové číslo $y \in \langle 0, 1)$, že $x - y$ je celé číslo. Řekneme, že množina M je *hustá* v intervalu $\langle a, b\rangle$, právě tehdy, když pro libovolný interval (x, y), který je částí $\langle a, b\rangle$, existuje $m \in M$, pro které $m \in (x, y)$. Jinými slovy, pokud otevřené intervaly považujeme za velké množiny, hustá množina je taková, která obsahuje z každé velké množiny nějaký prvek.

Lemma: *Je-li α iracionální číslo, pak $\{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $\langle 0, 1\rangle$.*

Než toto lemma dokážeme, ukažme si, jak jeho pomocí vyřešíme naši úlohu. Chceme najít nekonečně mnoho n, aby

$$11122000 \cdot 10^k \leq 3^n < 11122001 \cdot 10^k.$$

Po zlogaritmování (o základu 10):

$$\log_{10} 11122000 + k \leq n \log_{10} 3 < \log_{10} 11122001 + k. \qquad (*)$$

Označme $x = \{\log_{10} 11122000\}$, $y = \{\log_{10} 11122001\}$. Protože $\log_{10} 3$ je iracionální (rozmyslete si proč!), podle lemmatu existuje n, pro něž $x < \{n \log 3\} < y$. Pro vhodné k tedy platí nerovnost $(*)$. Takto jsme našli jedno n. Označíme nyní $x = \{n \log 3\}$, y necháme stejné. Opět použijeme lemma a najdeme nové n, které opět vyhovuje. Pokračujeme dále a dostaneme nekonečně mnoho vyhovujících čísel n.

Důkaz lemmatu: Mějme nějaké $0 \leq x < y \leq 1$, označme $\varepsilon = y - x$. Nejprve najdeme n, pro které $\{n\alpha\} < \varepsilon$. Zvolme m přirozené tak, aby $1/m < \varepsilon$ a podívejme se na $m + 1$ čísel $\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, \ldots, \{m\alpha\}$. Rozdělíme-li interval $\langle 0, 1 \rangle$ na m stejně velkých intervalů, pak (podle Dirichletova principu) v jednom z těchto intervalů jsou dvě z našich čísel, čili jsme našli k, l taková, že $0 < \{k\alpha\} - \{l\alpha\} \leq 1/m < \varepsilon$. Ovšem $\{k\alpha\} - \{l\alpha\} = \{(k - l)\alpha\}$, tedy stačí položit $n = k - l$.

Předpokládejme nejprve, že $n > 0$. Uvažujme nyní čísla $0, \{n\alpha\}, \{2n\alpha\}, \{3n\alpha\}, \ldots$ První z těchto čísel (tj. 0) neleží v intervalu (x, y). Další číslo je vždy o méně než $\varepsilon = y - x$ větší než to předešlé, tedy čísla nemohou interval (x, y) přeskočit. Toto pokračuje, dokud přičtením ε nepřeskočíme 1 (a tedy „nespadneme k nule“), to se ovšem nestane dříve, než přejdeme přes interval (x, y). Tudíž jednou do tohoto intervalu vstoupíme, tj. jedno z čísel $\{tn\alpha\}$ leží v intervalu (x, y), což jsme chtěli dokázat.

Pokud je $n < 0$, pak nejprve analogicky jako v předchozím odstavci najdeme t, pro které $1 - \varepsilon < \{tn\alpha\} < 1$. Položíme-li nyní $n' = -tn$, bude $n' > 0$ a $0 < \{n'\alpha\} < \varepsilon$, můžeme tedy dále postupovat stejně jako v předchozím odstavci.

Varianta pro náročnější je pouze mírným zobecněním. Podle Eulerovy věty je $3^{999} \equiv 1 \pmod{1000}$, takze stačí mocniny trojky s vhodným začátkem hledat mezi mocninami (s vhodným koncem) tvaru 3^{999k+2}, $k \in \mathbb{N}$, což provedeme stejně, jako v předchozím postupu. Detaily ponecháváme čtenáři k rozmyšlení.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu řešilo pouze 9 studentů. Čtyři řešitelé měli úplné řešení. Další dva řešitelé dokázali z DP, že existuje alespoň jedna posloupnost osmi cifer a nekonečně mocnin trojky na ni začínajících. Nedokázali však, že mezi nimi musí být 11122000.