✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

8. série

Téma: Finální myš (maš)

Termín odeslání: 12. KVĚTNA 2003

1. ÚLOHA

(a) Dokažte, že pro každé přirozené k je počet řešení rovnice $a^2 - ab + b^2 = k$ v celých číslech konečný a dělitelný šesti. (2 BODY)

(b) V celých číslech vyřešte rovnici (3 BODY)

$$4a^3 + 4b^3 + 9a^2b^2(a-b)^2 - 6ab(a+b) - 4 = 0.$$

2. ÚLOHA

V rovině jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 takové, že každé dvě mají vnější dotyk.

(a) Dokažte, že tečny k těmto kružnicím procházející body dotyku se protínají v jednom bodě. (2 BODY)

(b) Předpokládejme, že existují různé kružnice l, m takové, že mají s každou z kružnic k_1, k_2, k_3 dotyk. Označme po řadě L_1, L_2, L_3 body dotyku kružnice l s kružnicemi k_1, k_2, k_3 a M_1, M_2, M_3 po řadě body dotyku kružnice m opět s kružnicemi k_1, k_2, k_3. Dokažte, že přímky L_1M_1, L_2M_2, L_3M_3 procházejí jedním bodem. (3 BODY)

3. ÚLOHA

(a) V levém horním rohu šachovnice $m \times n$ je umístěn bílý král[1]. Pavel a Luboš se střídají v tazích tak, že žádný z hráčů nemůže navštívit již dříve navštívené pole šachovnice. Kdo nemá tah, prohrál. V závislosti na m, n rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii. (2 BODY)

(b) V pravém dolním rohu šachovnice 8×8 je umístěn černý střelec. Střelec je paralyzován, a tak se v každém tahu smí pohybovat pouze do polí, která sousedí rohem s polem, na němž se střelec právě nachází. Frso se snaží střelcem projít všechna pole, do kterých se střelec může dostat. Poraďte mírně pohodlnému Frsovi optimální postup, tedy takový, aby použil co nejméně tahů. (3 BODY)

4. ÚLOHA

(a) V rovině je dána množina L, která je osově souměrná podle nějakých tří přímek neprocházejících týmž bodem. Dokažte, že množina L má nekonečně mnoho os souměrnosti. (2 BODY)

(b) V rovině je dána konvexní množina M, která je osově souměrná podle nějakých dvou přímek svírajících úhel $\sqrt{2}$ stupňů. Určete všechny možné takové množiny M. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) Zjistěte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nul a jedniček taková, že libovolná její podposloupnost tvaru $\{a_{\alpha n+\beta}\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, není periodická. (2 BODY)

[1] Králem se smí pohybovat do polí, která jsou sousední (hranou či rohem) s polem, na kterém král stojí.

(b) Zjistěte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nul a jedniček taková, že pro každý nekonstantní polynom $P(n)$ (s přirozenými koeficienty) libovolná její podposloupnost tvaru $\{a_{P(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ není periodická. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) V závislosti na přirozeném n určete hodnotu výrazu (2 BODY)

$$\sum_{i=0}^{n} i(n-i)\binom{n}{i}.$$

(b) Pro přirozená $n \geq k$ dokažte identitu (3 BODY)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2.$$

7. ÚLOHA

(a) Najděte všechny funkce $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ platí (2 BODY)

$$\frac{f(x)}{f^2(x)+g(x)} = \frac{g(x)}{3xg(x)-x^3}.$$

(b) Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňující (3 BODY)

$$kf(n) + nf(k) = (k+n)f(k^2+n^2).$$

Řešení 8. série

1. úloha (11, 5, 2.00, 1.0)

(a) Dokažte, že pro každé přirozené k je počet řešení rovnice $a^2 - ab + b^2 = k$ v celých číslech konečný a dělitelný šesti. (2 BODY)

(b) V celých číslech vyřešte rovnici (3 BODY)

$$4a^3 + 4b^3 + 9a^2b^2(a-b)^2 - 6ab(a+b) - 4 = 0.$$

(a) Nejprve ukážeme, že počet řešení je konečný. Rovnici upravme na

$$(a-b)^2 + a^2 + b^2 = 2k. \qquad (\heartsuit)$$

Odtud už plyne, že $|a| \le \sqrt{2k}, |b| \le \sqrt{2k}$, jinak je na levé straně větší výraz než na pravé. Tedy počet řešení je nutně konečný.

Než budeme pokračovat dále, ještě poznamenejme, že dvojice $a = 0, b = 0$ nikdy není řešením, neboť na pravé straně je kladné číslo.

Nyní si uvědomme, že počet řešení je sudý. Totiž je-li dvojice (a, b) řešením, potom je řešením i dvojice $(-a, -b)$ (tyto dvě dvojice jsou různé, neboť $(0, 0)$ řešením nikdy není). Takto spárujeme řešení do dvojic (dvojici $(-a, -b)$ přiřadíme dvojici (a, b) tedy se opravdu jedná o párování), odkud plyne, že počet řešení je sudý.

Nakonec si uvědomíme, že počet řešení je dělitelný třemi. Vraťme se ke tvaru $(\heartsuit)$, z něho vidíme, že je-li dvojice (a, b) řešením, je řešením i dvojice $(-b, a - b)$. Aplikací stejného pravidla P $(P : (x, y) \longrightarrow (-y, x-y))$ na dvojici $(-b, a-b)$ vidíme, že i dvojice $(b-a, -a)$ je řešením. Pro úplnost ještě dodejme, že pravidlo P převádí dvojici $(b-a, -a)$ na dvojici (a, b). Tedy trojí použití pravidla P dvojici nezmění (je to identita). Takto můžeme rozdělit řešení do (neuspořádaných) trojic, kdy k nějakému řešení přiřadíme ještě řešení, která vzniknou po jednom a dvou použitích pravidla P. Díky tomu, že trojí použití pravidla je identita, znamená to, že když k (x, y) přiřadíme (z, t) (použitím jednoho či dvou pravidel), přiřadíme k (z, t) i (x, y) (použitím dvou či jednoho pravidla). Tedy bude se opravdu jednat o uspořádání do trojic. Zbývá ukázat, že výrazy v trojicích jsou navzájem různé. Ukážeme, že $(x, y) \neq (-y, x - y)$, jinak totiž $x = -y, y = x - y \Rightarrow y = -2y \Rightarrow y = 0, x = 0$, spor. Odtud plyne, že každá dvě řešení v nějaké trojici jsou různá, totiž první z druhého lze získat použitím pravidla P (spor s růzností), nebo první z druhého lze získat dvojím použitím pravidla P, což znamená, že druhé z prvního lze získat jedním použitím pravidla P (spor s růzností). Všechna řešení jsme seskupili do trojic, tedy jejich počet je dělitelný třemi.

Spojením předchozích dvou odstavců dostáváme, že počet řešení je dělitelný šesti.

(b) *Řešení podle Saši Kazdy.*

Pokud je $a = b$, rovnici snadno upravíme na tvar $a^3 = -1$, odkud najdeme řešení $(-1, -1)$. Pokud je jedno z čísel nulové (bez újmy na obecnosti a), dostaneme naopak $a^3 = 1$, odkud najdeme řešení $(1, 0)$ a potom i symetrické řešení $(0, 1)$.

Nadále předpokládejme $0 \neq a \neq b \neq 0$. Ukážeme, že žádná jiný řešení už neexistují. Je-li dvojice (a, b) řešením, potom je řešením i dvojice $(-a, b - a)$ (a zřejmě i naopak), o čemž se přesvědčíme prostým dosazením. Máme-li tedy nějaké řešení (a, b), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b > a$. Pokud je $a < 0$, přejdeme k řešení $(-a, b-a)$, kdy $-a > 0$, $(b-a) > 0$, a protože je $b \neq 0$, je $-a \neq b-a$. Tedy najdeme vždy řešení, pro které jsou obě složky kladné. Takové řešení však neexistuje. Nejprve si uvědomme, že pro $a, b > 0$ je $a^3 + b^3 > (a+b)ab$. Nerovnost se nám totiž snadno podaří upravit (ekvivalentními úpravami) na tvar $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$. Nakonec už jen:

$$4b^3 + 4a^3 + 9a^2b^2(a-b)^2 - 6ab(a+b) - 4 \geq 4ab(a+b) + 9a^2b^2 - 6ab(a+b) - 4 =$$

$$= 9a^2b^2 - 2ab(a+b) - 4 \geq 5a^2b^2 - 4 > 0.$$

Tedy takové řešení existovat nemůže.

Všechna řešení tedy jsou $(0,1)$,$(1,0)$, $(-1,-1)$.

Poznámky k došlým řešením: V první části řešení byla všechna správná řešení podobná autorskému. Někteří se však nezmiňovali, že počet řešení je konečný, a tak si vysloužili $-i$.

V druhé části naopak žádné řešení nebylo podobné původnímu autorskému záměru. Nejvíce mne zaujalo řešení Saši Kazdy, jehož řešení si můžete přečíst jako autorské. Jeden řešitel mě nechal počítat 30 diskriminantů kvadratické rovnice s parametrem a vysloužil si za to $-i$.

2. úloha **(28, 14, 1.00, 1.0)**

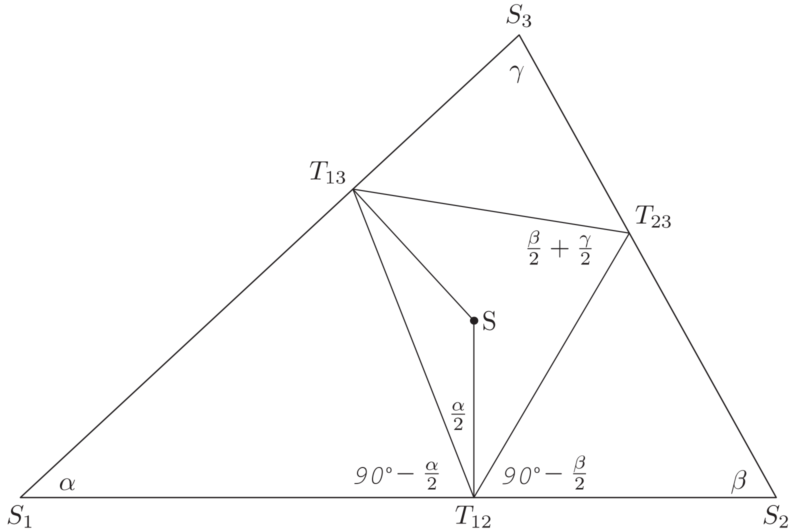
V rovině jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 takové, že každé dvě mají vnější dotyk.

(a) Dokažte, že tečny k těmto kružnicím procházející body dotyku se protínají v jednom bodě.

(2 BODY)

(b) Předpokládejme, že existují různé kružnice l, m takové, že mají s každou z kružnic k_1, k_2, k_3 dotyk. Označme po řadě L_1, L_2, L_3 body dotyku kružnice l s kružnicemi k_1, k_2, k_3 a M_1, M_2, M_3 po řadě body dotyku kružnice m opět s kružnicemi k_1, k_2, k_3. Dokažte, že přímky L_1M_1, L_2M_2, L_3M_3 procházejí jedním bodem. (3 BODY)

Označme S_1, S_2, S_3 po řadě středy kružnic k_1, k_2, k_3. Dále označme T_{12}, T_{13}, T_{23} po řadě body dotyku kružnic k_1 a k_2, k_1 a k_3, k_2 a k_3, S označme střed kružnice opsané trojúhelníku $T_{12}T_{13}T_{23}$. Nadále t_{12}, t_{13} a t_{23} označme společné tečny kružnic procházející body T_{12}, T_{13} a T_{23}. Nakonec označme $\alpha = |\sphericalangle S_2S_1S_3|, \beta = |\sphericalangle S_1S_2S_3|, \gamma = |\sphericalangle S_1S_3S_2|$. Vzhledem k tomu, že body T_{12}, T_{13} leží na kružnici k_1, je trojúhelník $S_1T_{12}T_{13}$ rovnoramenný, čili $|\sphericalangle S_1T_{12}T_{13}| = |\sphericalangle S_1T_{13}T_{12}| = 90° - \frac{\alpha}{2}$, obdobně $|\sphericalangle S_2T_{12}T_{23}| = |\sphericalangle S_2T_{23}T_{12}| = 90° - \frac{\beta}{2}$ a $|\sphericalangle S_3T_{13}T_{23}| = |\sphericalangle S_3T_{23}T_{13}| = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Z těchto údajů lze získat jako doplňkové úhly do $180°$: $|\sphericalangle T_{13}T_{12}T_{23}| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}, |\sphericalangle T_{12}T_{13}T_{23}| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}, |\sphericalangle T_{12}T_{23}T_{13}| = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Odtud plyne, že trojúhelník $T_{12}T_{13}T_{23}$ je ostroúhlý ($\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$), tedy S leží uvnitř tohoto trojúhelníku.

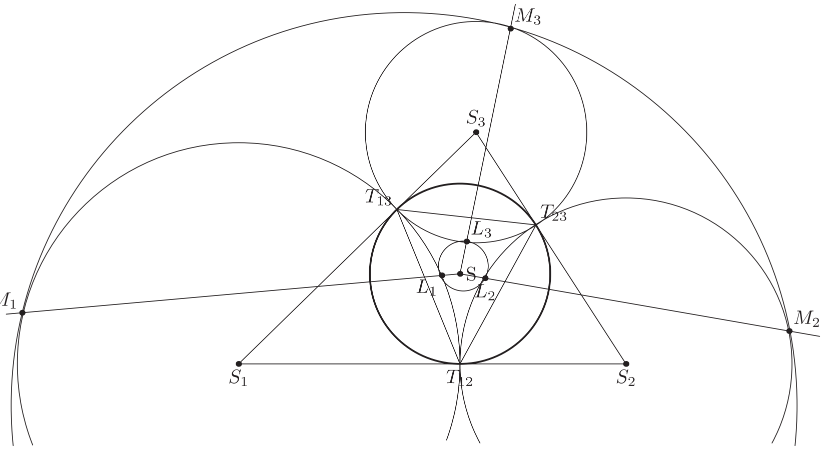


Například podle věty o středovém úhlu (nebo přímým vyjádřením několika dalších úhlů) je $|\sphericalangle T_{12}ST_{13}| = \beta+\gamma$. Trojúhelník $ST_{12}T_{13}$ je rovnoramenný, a tedy $|\sphericalangle ST_{12}13| = 90° - \left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$. Konečně $|\sphericalangle ST_{12}S_1| = |\sphericalangle ST_{12}T_{13}| + |\sphericalangle T_{13}T_{12}S_1| = \frac{\alpha}{2} + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90°$. Tedy přímka ST_{12} je tečnou t_{12}. Podobně se odvodí, že ST_{13} je t_{13} a ST_{23} je t_{23}. Odtud je už zřejmé, že přímky t_{12}, t_{13} a t_{23} se protínají ve společném bodě S. Část (a) je vyřešena.

Než dořešíme část (b), povíme si něco málo o kruhové inverzi. Kruhová inverze je zobrazení určené středem S a poloměrem r. Bod $X \neq S$ kruhová inverze zobrazuje na bod X' takový, že X' leží na polopřímce SX a navíc $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$. Bod S se v kruhové inverzi zobrazí na bod ∞ (tento bod si pro účel kruhové inverze přidejme k rovině) a bod ∞ se zobrazí na S, navíc řekněme, že bod ∞ leží na každé přímce a neleží na žádné kružnici. Kruhová inverze má spoustu zajímavých vlastností, z nichž některé jsou zcela zřejmé, jiné vyžadují zamyšlení. Vyjmenujme některé:

(1) Dvojí použití téže kruhové inverze je identita.
(2) Každý bod ležící na kružnici se středem S a poloměrem r se zobrazuje sám na sebe, body ležící vně této kružnice se zobrazují dovnitř, body ležící uvnitř se zobrazují vně.
(3) Přímka procházející středem S se zobrazuje na sebe.
(4) Kružnice neprocházející středem se zobrazuje na kružnici neprocházející středem (pozor, jejich středy se na sebe nezobrazují).
(5) Přímka neprocházející středem se zobrazuje na kružnici procházející středem a naopak kružnice procházející středem se zobrazuje na přímku neprocházející středem.
(6) Úhly, které svírají křivky, se při kruhové inverzi zachovávají.

Nyní můžeme dořešit část (b). Nejprve se ptejme, jak kružnice l a m mohou vypadat. Kružnice k_1, k_2 a k_3 rozdělují rovinu na pět částí, tři části jsou vnitřky kruhů určených kružnicemi, další část λ je uzavřena mezi kruhy určené kružnicemi, poslední část roviny označme μ. Mají-li se kružnice l, m dotýkat k_1, k_2 i k_3, musí (až na body dotyku) ležet v jedné z těchto pěti částí. Zřejmě nemohou ležet ve vnitřku žádného z kruhů určených k_1, k_2 nebo k_3. Nadále hledejme kružnice v částech λ a μ dotýkající se k_1, k_2 a k_3. V obou případech je to jedna z tzv. Apoloniových úloh[2], o které je známo, že má za této situace právě jedno řešení. Tedy jedna z kružnic (bez újmy na obecnosti l) musí ležet v části λ a druhá musí ležet v části μ. Nyní se podívejme, co udělá kruhová inverze se středem S (střed kružnice opsané trojúhelníku $T_{12}T_{13}T_{23}$) a poloměrem r, kde $r = |ST_{12}| = |ST_{13}| = |ST_{23}|$.



Podle vlastnosti (2) se body T_{12}, T_{13} a T_{23} zobrazují samy na sebe. Kružnice k_1 zřejmě neprochází středem S (bod S totiž leží například na tečně t_{12} a je různý od bodu T_{12}), zobrazí se tedy (podle (4)) na kružnici k_1' neprocházející středem. Navíc body T_{12} a T_{13} jsou samodružné (zobrazují se na sebe), tedy k_1' prochází skrze T_{12} a T_{13}. Přímka t_{12} se podle (3) zobrazuje na sebe. Kružnice k_1 a přímka t_{12} u bodu T_{12} svírají úhel $0°$. Podle vlastnosti (6) tedy i k_1' a t_{12} svírají úhel $0°$. S využitím toho, že k_1' prochází i bodem T_{13}, je už jednoznačně dáno, že k_1' je k_1. Obdobně se i k_2 a k_3 zobrazují samy na sebe. Kružnice m dotýkající se kružnic k_1, k_2, k_3 (a neprocházející středem, neboť S leží v oblasti λ) se podle (4) musí opět na kružnici neprocházející středem dotýkající se kružnic k_1, k_2, k_3, navíc se podle vlastnosti (2) nemůže zobrazit na sebe, neboť oblast μ leží celá vně kružnice opsané trojúhelníku $T_{12}T_{13}T_{23}$. Tedy kružnice m se nutně zobrazí na kružnici l. Speciálně body dotyku m (M_1, M_2, M_3) s k_1, k_2, k_3 se zobrazí na body dotyku l (L_1, L_2, L_3) s k_1, k_2, k_3 (k_1, k_2, k_3 se zobrazují na sebe). To ale znamená podle definice kruhové inverze, že přímky M_1L_1, M_2L_2 a M_3L_3 procházejí bodem S. To je vše, co jsme chtěli dokázat v části (b).

Poznámky k došlým řešením: V části (a) se asi v polovině došlých řešení objevila následující chyba. Označme S_1, S_2, S_3 středy kružnic a t_{12}, t_{13}, t_{23} tečny, snadno nahlédneme, že průsečík tečen t_{12} a t_{13} (značme ho T_1) leží na ose úhlu $S_2S_1S_3$, průsečík tečen t_{12} a t_{23} (značme ho T_2) leží na ose úhlu $S_1S_2S_3$ a průsečík tečen t_{13} a t_{23} (značme ho T_3) leží na ose úhlu $S_1S_3S_2$. Osy úhlů se protínají v jednom bodě, tedy tečny se protínají v jednom bodě. Tato úvaha je ale špatně. Body T_1, T_2 a T_3, pokud o nich nevíme nic dalšího, můžou být totiž navzájem různé, i když leží na zmiňovaných osách úhlu - asi si snadno nakreslíš nějaký takový příklad. No, a

[2]O Apoloniových úlohách se lze něco dozvědět ve většině učebnic geometrie.

pokud jsou body T_1, T_2, T_3 různé, tečny se neprotínají. V části (b) byla správná řešení vesměs různá.

3. úloha (17, 8, 1.00, 1.0)

(a) V levém horním rohu šachovnice $m \times n$ je umístěn bílý král[3]. Pavel a Luboš se střídají v tazích tak, že žádný z hráčů nemůže navštívit již dříve navštívené pole šachovnice. Kdo nemá tah, prohrál. V závislosti na m, n rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii. (2 BODY)

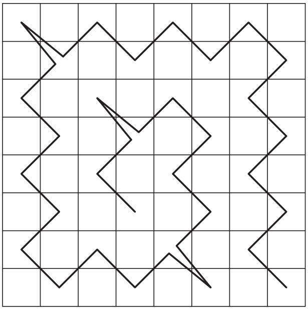
(b) V pravém dolním rohu šachovnice 8×8 je umístěn černý střelec. Střelec je paralyzován, a tak se v každém tahu smí pohybovat pouze do polí, která sousedí rohem s polem, na němž se střelec právě nachází. Frso se snaží střelcem projít všechna pole, do kterých se střelec může dostat. Poraďte mírně pohodlnému Frsovi optimální postup, tedy takový, aby použil co nejméně tahů. (3 BODY)

(a) Nejprve předpokládejme, že alespoň jedno z čísel m, n je sudé. Potom se nám velmi snadno podaří šachovnici pokrýt dominovými kostičkami. Ukážeme, že vyhrávající strategii má hráč, který začíná (řekněme, že Pavel). Na začátku je král umístěn v některé dominové kostičce, jejíž druhé políčko (to, na kterém nestojí král) nebylo obsazeno. Je-li král v některé dominové kostičce, jejíž druhé políčko dosud nebylo obsazeno (a políčka všech ostatních dominových kostiček byla buď obě již obsazena, nebo nebylo obsazeno ani jedno), a je-li Pavel na tahu, může hrát do druhého políčka dominové kostičky, potom bude Luboš na tahu a políčka všech dominových kostiček po tomto tahu byla buď obě již obsazena, nebo nebylo obsazeno ani jedno. Je-li Luboš na tahu a políčka všech dominových kostiček byla buď obě již obsazena, nebo nebylo obsazeno ani jedno, musí Luboš (pokud ještě může) hrát do některé zatím neobsazené dominové kostičky, jejíž druhé políčko dosud nebylo obsazeno (a políčka všech ostatních dominových kostiček byla buď obě již obsazena, nebo nebylo obsazeno ani jedno). Vidíme tedy, že bude-li se Pavel držet strategie obsazovat volné políčko v dominové kostičce, ve které stojí, vždy se mu to podaří. Vzhledem k tomu, že hra někdy skončí, má Pavel vítěznou strategii. V případě, že ani jedno z čísel m, n není sudé, pokryjme[4] dominovými kostičkami levý sloupec (bez políčka, ve kterém stojí král), horní řádek (opět bez políčka, ve kterém stojí král) a pak snadno pokryjeme i zbytek šachovnice (do třetice bez políčka, ve kterém stojí král. Ukážeme, že vyhrávající strategii má hráč, který je druhý na řadě (řekněme, že Pavel). V prvním tahu musí Luboš hrát do některé dominové kostičky, odkud je zřejmé, že Pavel může ke své výhře použít přesně tutéž strategii, jako použil v případě, že m, n byla sudá.

(b) První možnost, jak úlohu řešit, je rozebrat velmi mnoho možností. Pokusíme se však ukázat elegantnější řešení dávající i částečný návod k řešení pro některé obecnější šachovnice. Na prvním obrázku je nakreslena jedna z optimálních tras.

[3] Králem se smí pohybovat do polí, která jsou sousední (hranou či rohem) s polem, na kterém král stojí.

[4] V případě, že $m = 1$ nebo $n = 1$ může být i některé zmiňované pokrytí prázdné, nicméně, to nám vadit nebude.



1		1		1		1	
	2		2		2		1
1		1		1		2	
	2		2		1		1
1		1		2		2	
	2		1		1		1
1		2		2		2	
	1		1		1		1

Je na ni potřeba 34 tahů. Dále ukážeme, že méně tahů nestačí. Očíslujme si políčka tak, jak je nakresleno na druhém obrázku. 12 políček je očíslováno číslem 2, 20 políček je očíslováno číslem 1, přitom existují pouze 4 dvojice políček, kde jsou vedle sebe dvě jedničky, tedy políčka očíslovaná jedničkou jsou rozdělena na 16 oblastí, ze kterých je možné se dostat jenom tak, že přejdeme na políčko s číslem 2. Během toho, co bude Frso hrát, pišme za sebe jedničky a dvojky tak, že po každém Frsově tahu napíšeme číslo políčka, na které Frso hrál. První číslo tedy bude dvojka. Chce-li Frso projít celou šachovnici, musí projít 15 oblastí (o pravé dolní políčko se už starat nemusí) označených jedničkami, těsně před každým navštívením takovéto oblasti nutně navštíví alespoň jedno políčko s číslem 2, tedy alespoň 15 tahů vede na políčko s číslem 2. Navíc musí navštívit 19 políček (opět bez pravého dolního) s číslem 1. Na projití šachovnice tedy určitě potřebuje přinejmenším $15 + 19 = 34$ tahů.

Poznámky k došlým řešením: Príklad a) poslalo iba veľmi málo riešiteľov a z nich väčšina to mala dobre, resp. všetci tí, ktorí našli ten trik s rozdelením šachovnice na také „dvojičky“ políčok. Oveľa pestrejšie to ale bolo pri úlohe b), kde väčšina z vás rozoberala nejaké prípady ale často ste si nedali pozor na to, že ste niečo prehlásili za jasné a ono to tak vôbec nebolo alebo ste často zabúdali rozobrať niektoré možnosti. A veľmi častá chyba bola taká, že ste šachovnicu prechádzali „najvýhodnejšie“ ako ste v tom danom okamžiku mohli, ale pritom by sa kľudne mohlo stať, že najlepší ťah by najprv išiel cez „úplne zlé a navonok nelogické políčka“, ale potom by sa dostal do pozície, že by už žiadne políčko nemusel prechádzať viackrát a počet ťahov by tak bol menší …

4. úloha (14, 5, 1.00, 1.0)

(a) V rovině je dána množina L, která je osově souměrná podle nějakých tří přímek neprocházejících týmž bodem. Dokažte, že množina L má nekonečně mnoho os souměrnosti. (2 BODY)

(b) V rovině je dána konvexní množina M, která je osově souměrná podle nějakých dvou přímek svírajících úhel $\sqrt{2}$ stupňů. Určete všechny možné takové množiny M. (3 BODY)

(a) Nejprve učiňme jedno drobné (samozřejmé) pozorování:

(◎) *Jsou-li p, q nějaké dvě osy souměrnosti množiny L, potom i q' je osa souměrnosti L, kde q' vznikne z q osovou souměrností podle p.*

Důkaz. Chceme tedy dokázat, že $X \in L \Leftrightarrow X_{q'} \in L$, kde $X_{q'}$ je obraz bodu X v osové souměrnosti podle q'. Nejprve pro $X \notin q'$. V osové souměrnosti podle p se trojice $(q'; X; X_{q'})$ zobrazí na trojici $(q; X_p; X_{q'p})$. Protože p je osa souměrnosti L, je $X \in L \Leftrightarrow X_p \in L$ a $X_{q'p} \in L \Leftrightarrow X_{q'} \in L$. Stačí tedy dokázat, že $X_p \in L \Leftrightarrow X_{q'p} \in L$. Osová souměrnost (podle p) je shodné zobrazení, tedy $\overleftrightarrow{X_pX_{q'p}}$ je kolmá na q ($X_p \neq X_{q'p}$) a vzdálenosti bodů X_p a $X_{q'p}$ od přímky q odpovídají vzdálenostem X a $X_{q'}$ od q', které jsou shodné. To už je postačující podmínka, aby X_p a $X_{q'p}$ byly souměrné podle q, tedy $X_p \in L \Leftrightarrow X_{q'p} \in L$, což jsme chtěli dokázat. Případ $X \in q'$ je zřejmý, stačí využít osovou souměrnost podle p.

Nadále přejděme již k důkazu úlohy. Pro spor předpokládejme, že os souměrnosti množiny L je konečně mnoho. Výrazně (oranžovým zvýrazňovačem) si označme všechny ty body, které leží na průsečíku alespoň dvou os souměrnosti, těch je také konečně mnoho. Označme T těžiště oranžově zvýrazněných bodů. Potom existuje o osa souměrnosti neprocházející bodem T (ze zadání známe alespoň tři osy z nichž aspoň jedna bodem T neprochází). Zobrazme všechny osy souměrnosti podle osy o. Z (◎) víme, že každá taková zobrazená osa bude opět osou souměrnosti. Tedy i oranžové body se opět zobrazí do oranžových bodů (každý do jiného – tedy do každého oranžového bodu se zobrazí právě jeden oranžový bod). Jenže těžiště oranžových bodů neleží na o, a tak se nezobrazí do sebe. To je spor, že množina oranžových bodů se zobrazuje na sebe.

(b) Za účelem vyřešení druhé části dokážeme nejprve jedno lemma.

(♡) *Je-li α iracionální číslo, potom*[5] $X = \{\{k\alpha\};\ k \in \mathbb{Z}\}$ *je hustá*[6] *množina v intervalu* $\langle 0; 1\rangle$.

Důkaz. Mějme nějaké $0 \leq x < y \leq 1$, označme $\varepsilon = y - x$. Nejprve najdeme $n \in \mathbb{Z}$, pro které $\{n\alpha\} < \varepsilon$. Zvolme m přirozené tak, aby $\frac{1}{m} < \varepsilon$, a podívejme se na $m + 1$ čísel $\{0\alpha\}$, $\{1\alpha\}$, …, $\{m\alpha\}$. Rozdělíme-li interval $\langle 0, 1\rangle$ na m stejně velkých intervalů, pak (podle Dirichletova principu) v jednom z těchto intervalů jsou dvě z našich čísel, čili jsme našli k, l taková, že $0 < \{k\alpha\} - \{l\alpha\} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$. Ovšem[7] $\{k\alpha\} - \{l\alpha\} = \{(k-l)\alpha\}$, tedy stačí položit $n = k - l$.

Uvažujme nyní čísla 0, $\{n\alpha\}$, $\{2n\alpha\}$, … První z těchto čísel (tj. 0) neleží v intervalu (x, y). Další číslo je vždy o méně než $\varepsilon = y - x$ větší než to předešlé, tedy čísla nemohou interval (x, y) přeskočit. Takto pokračujeme, dokud nepřeskočíme 1 (což se stane nejpozději po $\left\lceil \frac{1}{\{n\alpha\}} \right\rceil$

[5] Výraz $\{x\}$ značí stejně jako v minulých komentářích desetinnou část x, tj. takové číslo ležící na $\langle 0; 1)$, které získáme z x odečtením vhodného celého čísla (dolní celé části). Pozor, vnější závorky jsou množinové.

[6] Pokud neznáš pojem hustá množina, v tomto případě Ti postačí informace, že na každém intervalu (x, y); $0 \leq x < y \leq 1$ najdeme prvek množiny X.

[7] Tuto úpravu si rozmysli.

krocích). Jedničku ovšem nepřeskočíme dříve, než přejdeme přes interval (x, y). Tudíž jednou do tohoto intervalu vstoupíme, tj. jedno z čísel $\{tn\alpha\}$ leží v intervalu (x, y), což jsme chtěli dokázat.

Tím, že jsme tuto úvahu provedli pro libovolná $x, y;\ 0 \le x < y \le 1$, je ($\heartsuit$) dokázáno.

Nyní dokážeme další lemma, které již bude přímo spjaté s řešením úlohy. Předtím si ještě označíme p, q přímky uvedené v zadání a S jejich průsečík.

($\spadesuit$) *Je - li $A \in M$, potom už celý otevřený (tedy bez své hranice) kruh se středem S a poloměrem $|SA|$ leží v množině M.*

Důkaz. Zvolme si na přímkách p, q body $P \in p$, $Q \in q$ tak, aby $|\sphericalangle PSQ| = \sqrt{2}^\circ$. Bez újmy na obecnosti polopřímky SP, SQ svírají orientovaný úhel[8] $\sqrt{2}^\circ$ (značme $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}) = \sqrt{2}^\circ$). Kdyby totiž svíraly úhel $-\sqrt{2}^\circ$, prohodíme značení p a q (a tedy i P a Q) . Označme k kružnici se středem S a poloměrem $|SA|$. Uvědomme si, co se stane s nějakým bodem B, zobrazíme-li ho nejprve na bod B' osovou souměrností podle p a potom bod B' zobrazíme na bod B'' osovou souměrností podle q. Zřejmě body B', B'' zůstanou na kružnici k. Dále označme $\alpha = (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SP})$. Potom i $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SB'}) = \alpha$. Odkud[9] $(\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SB'}) = (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SP}) + (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SB'}) = -(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}) + \alpha = \alpha - \sqrt{2}^\circ$. Potom ale $(\overrightarrow{SB''}, \overrightarrow{SQ}) = \alpha - \sqrt{2}^\circ$, čímž nakonec dostáváme $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SB''}) = (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SP}) + (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}) + (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SB''}) = \alpha + \sqrt{2}^\circ - (\alpha - \sqrt{2}^\circ) = 2\sqrt{2}^\circ$. Tedy bod B'' vznikne z bodu B (podle definice orientovaného úhlu) otočením se středem v S v kladném směru o úhel $2\sqrt{2}$ stupňů.

Dále si rozmysleme, že pokud bod $C \in k$ zobrazíme nejprve na bod C' osovou souměrností podle q a potom bod C' zobrazíme na bod C'' osovou souměrností podle p, potom takto získaný bod C'' získáme z C otočením se středem v S v kladném směru o úhel $-2\sqrt{2}$ stupňů. Zobrazíme-li totiž bod C'' nejprve podle p a výsledek (C') podle q, dostaneme bod C, tedy stačí použít předchozí část.

Využijeme-li těchto dvou informací, dostáváme, že je-li $X \in k$ bod takový, že X lze získat z A $(A \in M)$ otočením (se středem v S v kladném směru) o nějaký z úhlů $2k\sqrt{2}^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$, potom už $X \in M$.

Dále každému bodu $X, X \in M, X \in k$ jednoznačně přiřaďme hodnotu $f(X) = \left\{\frac{\alpha_X}{360^\circ}\right\}$, kde α_X značí nějaký orientovaný úhel polopřímek SA, SX. Potom množina $F = \{f(x);\ X \in M, X \in k\}$ určitě obsahuje množinu $G = \left\{\frac{2k\sqrt{2}^\circ}{360^\circ};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Podle ($\heartsuit$) ($\frac{\sqrt{2}}{180}$ je iracionální číslo) je množina G hustá v intervalu $\langle 0; 1\rangle$, tedy i množina F je hustá v tomto intervalu.

Z tohoto tvrzení odvoďme ještě trochu jiné:

($*$) Na každém (otevřeném – tedy bez krajních bodů) oblouku kružnice k leží nějaký bod množiny M.

Zřejmě toto tvrzení stačí dokázat pro oblouky neobsahující bod A (jinak je lze rozdělit bo-

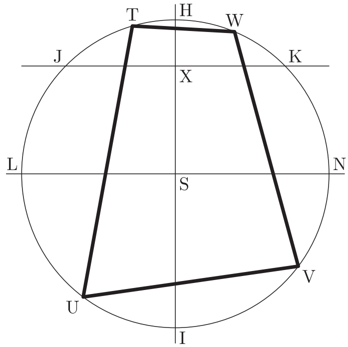
---

[8]Orientovaným úhlem (v tomto konkrétním případě) dvou polopřímek AB, AC (v tomto pořadí!) rozumíme každý úhel takový, že když polopřímku AB otočíme v kladném směru se středem v A o tento úhel, dostaneme polopřímku AC. Důležité je uvědomit si, že při takto podané definici orientovaný úhel není jedna konkrétní hodnota, ale množina hodnot (které se navzájem liší o celý násobek 360°). Budeme-li tedy mluvit o rovnosti dvou orientovaných úhlů, máme tím na mysli rovnost dvou množin. Budeme-li mluvit o součtu (rozdílu) dvou množin α, β (orientovaných úhlů), máme na mysli $\alpha + \beta = \{a + b;\ a \in \alpha, b \in \beta\}$ a obdobu s minusem.

[9]Následující úpravy si opět rozmyslete, pro obyčejné úhly nefungují.

dem A a vzít libovolný z dvou vzniklých oblouků). Kdyby na nějakém takovém oblouku[10] BC; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = \beta + k360°$, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}) = \gamma + k360°$, $0 \le \beta < \gamma < 360°$ nebyl žádný bod množiny M, potom lehce nahlédneme, že na intervalu $\left(\frac{\beta}{360°}; \frac{\gamma}{360°}\right)$ není žádný bod množiny F, což je spor s hustotou F.

Nyní již přistoupíme k samotnému jádru důkazu, že každý vnitřní bod kruhu ohraničeného kružnicí k leží v množině M. Sledujte obrázek.



Mějme nějaký takový bod $X \neq S$, označme H průsečík $\overrightarrow{SX}$ a k, I průsečík $\overrightarrow{XS}$ a k. Nechť J, K jsou průsečíky kružnice k a přímky kolmé na $\overleftrightarrow{XS}$ procházející bodem X. Navíc nechť J náleží oblouku HI a K oblouku IH. Obdobně nechť L, N jsou průsečíky k a přímky kolmé na $\overleftrightarrow{XS}$ procházející bodem S takové, že L náleží oblouku HI a N oblouku IH. Potom podle $(*)$ existují body T, U, V, W ležící v M takové, že T patří oblouku HJ, U patří LI, V patří IN a W patří KH. Potom ale už zřejmě bod X leží uvnitř čtyřúhelníku $TUVW$, a tedy z konvexity $X \in M$ (například proto, že úsečka WT protíná HX v nějakém $Y \in M$, UV protíná SI v $Z \in M$, a tak $X \in YZ \Rightarrow X \in M$). Všimněme si, že takto dokážeme, že i $S \in M$, což nám chybělo, neboť jsme předpokládali $X \neq S$. Tím je $(\spadesuit)$ dokázáno.

Nyní už začneme rozebírat možnosti, jak může M vypadat. Označme $D = \{x;\ x = |SX|, \text{ kde } X \in M\}$. Rozeberme několik možností:

(i) Množina D není (shora) omezená. Potom dokážeme, že množina M už obsahuje celou rovinu. Vskutku, mějme libovolný bod Y, potom z neomezenosti D existuje $X \in M$ takové, že $|SX| > |SY|$. S využitím $(\spadesuit)$ (zde $A = X$) už tedy $Y \in M$. Tedy M doopravdy obsahuje celou rovinu. Naopak celá rovina splňuje podmínky zadání.

(ii) Množina D je prázdná. Prázdná množina podmínky zadání splňuje.

(iii) Množina D je neprázdná (shora) omezená, ale neexistuje[11] $\max D$. Supremem[12] nějaké množiny Z reálných čísel rozumějme nejmenší takové číslo, které není menší než libovolný prvek

[10] Domluvme si konvenci, že obloukem XY rozumíme ten oblouk, který vznikne otáčením bodu X v kladném směru do bodu Y.

[11] Tento případ je paradoxně jednodušší než když maximum existuje, ačkoliv zde budeme využívat jednoho netriviálního tvrzení.

[12] Všimněte si, že pro množiny, které mají maximum, tento pojem splývá s pojmem maxima.

$z, z \in Z$. Netriviální tvrzení[13], které použijeme, je, že každá neprázdná shora omezená podmnožina reálných čísel má své supremum. Označme $r = \sup D$. Potom dokážeme, že množina M je otevřený kruh se středem S a poloměrem r. Žádný bod mimo tento kruh v množině M neleží. Kdyby totiž $X \in M$, $|SX| \geq r$. Může být jednak $|SX| > r$, potom ale $|SX| \in D$, což je spor s definicí $r = \sup D$. Druhá možnost je, že $|SX| = r$, ale potom je $\sup D$ zároveň $\max D$, což je spor s tím, kterou možnost rozebíráme. Každý bod otevřeného kruhu se středem S a poloměrem r už v množině M leží. Mějme $X, |SX| = r' < r$. Potom určitě existuje bod $Y \in M$, že $|SY| > r' + \frac{r-r'}{2}$ (jinak by $\sup D = r > r' + \frac{r-r'}{2}$ bylo možné zmenšit na hodnotu $r' + \frac{r-r'}{2}$). Podle (♠) celý otevřený kruh se středem S a poloměrem SY je uvnitř M. Protože $|SY| > |SX|$, je nutně i bod X uvnitř M. Tedy v tomto případě je množina M nutně otevřený kruh se středem S poloměrem r. Na druhou stranu libovolný otevřený kruh už určitě zadání úlohy splňuje.

(iv) Množina D je neprázdná (shora) omezená, existuje $\max D = 0$. Potom množina M nemůže obsahovat jiný bod než S. Protože je neprázdná, nutně bod S obsahuje. Na druhou stranu každý bod zřejmě splňuje zadání úlohy.

(v) Množina D je neprázdná (shora) omezená, existuje $\max D = r > 0$. Obdobně jako pro případ suprema, žádný bod, jehož vzdálenost od středu S je větší než r, není v množině M. Naopak $r = \max D$, čímž existuje bod $A \in M, |SA| = r$ a podle (♠) celý otevřený kruh se středem S a poloměrem r je uvnitř M. Zbývá tedy vyřešit, které body kružnice k můžou patřit do množiny M. Nejprve si všimněme, že pokud za této situace zvolíme pro každý bod libovolně, jestli patří, nebo nepatří do M, bude podmínka konvexity splněna. Stačí nám tedy se omezit na podmínku osové souměrnosti. Zadefinujme si relaci $\sim$ pro dva body $X, Y \in k$ tak, že X lze získat z Y konečným (třeba žádným) počtem použití osových souměrností podle p a q. Snadno si lze ověřit, že $\sim$ je relace ekvivalence[14] (dělat to nebudeme). Potom se pro každou třídu ekvivalence můžeme libovolně rozhodnout, zda všechny její prvky v množině M leží nebo naopak žádný prvek této třídy v množině M neleží. K tomu je potřeba si jednak uvědomit, že leží-li v M jeden z prvků X, potom v množině M už leží celá $[X]$. Totiž je-li $Y \in [X]$, potom $Y \sim X$, a tedy existuje posloupnost bodů $X = X_1, X_2, \ldots X_{s-1}, X_s = Y$, že X_{i+1} lze získat z X_i osovou souměrností podle p nebo q. Potom ale nutně $X_{i+1} \in M \Leftrightarrow X_i \in M$, čili $Y \in M \Leftrightarrow X \in M$, což je to, co jsme si žádali. Dále je potřeba si uvědomit, že pokud se pro každou třídu ekvivalence libovolně rozhodneme, zda její prvky do M patří nebo nepatří, potom už jsou splněny podmínky zadání (pokud se alespoň pro jednu třídu rozhodneme, že její prvky do M patří, neboť rozebíráme možnost, že existuje $\max D$). Stačí tedy ověřit osovou souměrnost podle přímek p a q. Mějme libovolný bod $X \in k$ (pro ostatní body je to zřejmé), označme X_p, X_q po řadě obrazy bodu X v souměrnostech podle p, q. Tedy určitě $X \sim X_p$, $X \sim X_q$, odkud $X \in M \Leftrightarrow X_p \in M$, $X \in M \Leftrightarrow X_q \in M$, čím jsme ověřili osovou souměrnost

---

[13] Důkaz zde neuvádíme, neboť důkaz tohoto tvrzení je velmi závislý na našem chápání pojmu reálná čísla. Obvykle se reálná čísla dokonce definují tak, že jednou z vlastností, které musí splňovat, je, že každá jejich neprázdná shora omezená podmnožina má supremum. Nicméně z představ o reálných číslech, jako například že každé reálné číslo má svůj nekonečný desetinný zápis, lze toto tvrzení při troše píle odvodit.

[14] Relace $\sim \subset Z^2$ se nazývá relace ekvivalence, pokud splňuje: (1)$\forall a \in Z; a \sim a$, (2)$\forall a, b \in Z; a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$, (3)$\forall a, b, c \in Z; a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$. Důvod, proč jsou relace ekvivalence zajímavé, je ten, že pomocí relace ekvivalence lze množinu Z rozdělit na několik množin (třídy ekvivalence), kdy pro nějaké $a \in Z$ označme jeho třídu ekvivalence $[a] = \{b;\ b \sim a\}$, přičemž platí $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$.

jak podle přímky p, tak podle přímky q. V závěru se budeme věnovat tomu, jak zmiňované třídy ekvivalence o něco lépe popsat. Mějme $X \in k$, použijme stejné značení P, Q, α jako na začátku důkazu (♠). Potom $[X] = \{Y \in k;\ (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SY}) = \pm\alpha + 2l\sqrt{2}^\circ, l \in \mathbb{Z}\}$. Nejprve, že pro každé $Y \in k$ splňující $(SP, SY) = \pm\alpha + 2l\sqrt{2}^\circ, l \in \mathbb{Z}$ platí $Y \in [X]$. Ze začátku důkazu, že pro každé $Y \in k$ splňující $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SY}) = \alpha \pm 2l\sqrt{2}^\circ, l \in \mathbb{Z}$ platí $Y \in [X]$, zobrazíme-li takové Y na Y' podle přímky p, bude $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SY'}) = -\alpha \mp 2l\sqrt{2}^\circ$, kde $Y' \sim Y \in [X]$. Což už pokrývá všechny možnosti. Nakonec naopak každé $Y \in [X]$ splňuje $(SP, SY) = \pm\alpha + 2l\sqrt{2}^\circ$ pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$ ($Y \in k$ je zřejmé). Důkaz provedeme indukcí pomocí j, kde j je nejmenší počet osových souměrností, pomocí kterých lze získat Y z X. Je-li $j = 0$, je tvrzení zřejmé, zabývejme se tedy možností $j > 0$ a pro $j - 1$ tvrzení platí. Mějme tedy j osových souměrností, pomocí kterých dostaneme Y z X. Pomocí prvních $j - 1$ dostaneme z X bod Z, který z indukčního předpokladu splňuje podmínky. Potom pomocí některé další souměrnosti lze z bodu Y získat bod Z. Řekněme, že $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SZ}) = \pm\alpha + 2l\sqrt{2}^\circ$. Je-li poslední souměrnost podle p, je $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SY}) = -(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SZ}) = \mp\alpha + 2(-l)\sqrt{2}^\circ$, tedy podmínka pro Y je splněna. Je-li poslední souměrnost podle q, je $(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SY}) = (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SQ}) + (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SY}) = \sqrt{2}^\circ - (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SZ}) = \sqrt{2}^\circ - (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SP}) - (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SZ}) = \sqrt{2}^\circ + \sqrt{2}^\circ \mp \alpha - 2l\sqrt{2}^\circ = \mp\alpha - 2(l-1)\sqrt{2}^\circ$. Tento tvar je také vyhovující. Tím je indukce ukončena.

Závěrem nezbývá než říci, že všechny vyhovující množiny M jsou popsány v jednom z bodů (i), (ii), (iii), (iv) a (v).

5. úloha **(15, 14, 3.00, 2.0)**

(a) Zjistěte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nul a jedniček taková, že libovolná její podposloupnost tvaru $\{a_{\alpha n+\beta}\}_{n=1}^\infty$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, není periodická. (2 BODY)

(b) Zjistěte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nul a jedniček taková, že pro každý nekonstantní polynom $P(n)$ (s přirozenými koeficienty) libovolná její podposloupnost tvaru $\{a_{P(n)}\}_{n=1}^\infty$ není periodická. (3 BODY)

V obou případech je odpověď ano. Část (a) bychom sice mohli řešit s využitím výsledku části (b), nicméně ji vyřešíme elementárnějším způsobem, který bude zároveň návodem k řešení části (b).

(a) Volme posloupnost následujícím způsobem: $a_1 = 0, a_2 = a_3 = 1, a_4 = a_5 = a_6 = 0, \ldots$ Tedy střídáme nuly a jedničky a vždy použijeme o jednu jedničku více, než bylo použito nul pro předchozí úsek nul, a obdobně použijeme o jednu nulu více, než bylo použito jedniček. Čím v této posloupnosti pro každé $k \in \mathbb{N}$ vždy najdeme $2k - 1$ po sobě jdoucích nul a $2k$ po sobě jdoucích jedniček. Pro spor předpokládejme, že pro některá $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ je podposloupnost $\{a_{\alpha n+\beta}\}_{n=1}^\infty$ periodická. Označme p délku periody a c index, od kterého je ryze (tzn. bez předperiody) periodická. Jak už víme, určitě se nám podaří najít úsek posloupnosti[15] $\{a_n\}_{n=d}^\infty$, kde se vyskytuje alespoň αp po sobě jdoucích nul, a také jiný úsek, kde se vyskytuje alespoň αp po sobě jdoucích jedniček. Vzhledem k jejich délce je právě p členů každého z těchto úseků uvnitř podposloupnosti (tyto členy jsou po sobě jdoucími). Takto ale získáváme spor s periodicitou podposloupnosti, totiž vzhledem k prvnímu úseku perioda neobsahuje žádnou jedničku, ale vzhledem k druhému neobsahuje žádnou nulu.

[15] Zde začínáme od členu $d = \max\{c, \alpha + \beta\}$, abychom měli jistotu, že námi nalezené úseky nejsou moc blízko začátku, tedy aby měly s podposloupností neprázdný průnik.

(b) Druhou část vyřešíme podobným způsobem. Budeme střídat jedničky a nuly, akorát budeme potřebovat aby délky úseků samých nul (jedniček) rostly hodně rychle (rychleji) než jakýkoliv polynom.

Lemma (♡). *Funkce $f(x) = 2^x$ roste rychleji než jakýkoliv polynom. Precizněji řečeno, pro každý polynom $P(x)$ existuje $x_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé[16] $x \geq x_0, x \in \mathbb{N}$ je $2^x > P(x)$.*

Důkaz. Provedeme indukcí podle stupně polynomu n. Je-li polynom konstantní, tvrzení bezprostředně plyne z faktu, že funkce $f(x) = 2^x$ je neomezená rostoucí funkce. Tím je první indukční krok hotov. Nadále předpokládejme, že tvrzení platí pro nekonstantní polynomy stupně nejvýše n, a dokazujme ho pro polynomy stupně $n+1$. Předpokládejme, že $P(x) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + \cdots + a_nx + a_{n+1}$. V závislosti na x se podívejme na výraz $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Z binomické věty plyne, že

$$Q(x) = P(x+1) - P(x) =$$

$$= a_0 \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} x^i + a_1(x+1)^n + a_2(x+1)^{n-1} + \cdots + a_{n+1} - a_0x^{n+1} - a_1x^n - \cdots - a_{n+1} =$$

$$= a_0 \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i + a_1(x+1)^n + a_2(x+1)^{n-1} + \cdots + a_{n+1} - a_1x^n - a_2x^{n-1} - \cdots - a_{n+1}.$$

Odtud plyne, že $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše n. Z indukčního předpokladu plyne, že existuje $y_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $Q(x) < 2^x$ pro každé $x \geq y_0$, tedy $2^x - Q(x) \geq 1$ pro každé takové x . Označme nyní $\delta = 2^{y_0} - P(y_0)$. Pokud je $\delta > 0$, označme $x_0 = y_0$. Pokud je $\delta \leq 0$, označme $x_0 = y_0 - \delta + 1$. V obou případech je $x_0 \geq y_0$ a $2^{x_0} - P(x_0) > 0$. První nerovnost je zřejmá, druhá je zřejmá, pokud je $\delta > 0$. Pro $\delta \leq 0$ platí

$$2^{x_0} - P(x_0) = 2^{y_0-\delta+1} - P(y_0 - \delta + 1) =$$

$$= 2^{y_0-\delta} + 2^{y_0-\delta-1} + \cdots + 2^{y_0+1} + 2^{y_0} + 2^{y_0} - (P(y_0 - \delta + 1) - P(y_0 - \delta))-$$

$$-(P(y_0 - \delta) - P(y_0 - \delta - 1)) - \cdots - (P(y_0 + 1) - P(y_0)) - P(y_0) =$$

$$\left(2^{y_0-\delta} - Q(y_0 - \delta)\right) + \left(2^{y_0-\delta-1} - Q(y_0 - \delta - 1)\right) + \cdots + (2^{y_0} - Q(y_0)) +$$

$$+ (2^{y_0} - P(y_0)) \geq$$

$$\geq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{-\delta+1} + (2^{y_0} - P(y_0)) = -\delta + 1 + \delta = 1.$$

Tedy i pro $\delta \leq 0$ druhá nerovnost platí. Nyní už stejným způsobem dokážeme, že pro $x \geq x_0; x = x_0 + k$ platí $2^x > P(x)$. Totiž

[16]Podmínky $x, x_0 \in \mathbb{N}$ nejsou nutné, nicméně nám stačí toto tvrzení dokázat pouze pro přirozená čísla.

$$
\begin{aligned}
2^x - P(x) = 2^{x_0+k} - P(x_0+k) = \\
= 2^{x_0+k-1} + 2^{x_0+k-2} + \cdots + 2^{x_0+1} + 2^{x_0} + 2^{x_0} - (P(x_0+k) - P(x_0+k-1)) - \\
-(P(x_0+k-1) - P(x_0+k-2)) - \cdots - (P(x_0+1) - P(x_0)) - P(x_0) = \\
= \left(2^{x_0+k-1} - Q(x_0+k-1)\right) + \left(2^{x_0+k-2} - Q(x_0+k-2)\right) + \cdots + (2^{x_0} - Q(x_0)) + \\
+ (2^{x_0} - P(x_0)) \geq \\
\geq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k} + (2^{x_0} - P(x_0)) > k.
\end{aligned}
$$

Tím je ($\heartsuit$) dokázáno.

Nyní už můžeme zkonstruovat požadovanou posloupnost. Začněme s nulami a na začátek posloupnosti umístěme $3 \cdot 2^1$ nul. První neobsazený člen posloupnosti je člen s indexem 7, umístěme za tyto nuly tedy $3 \cdot 2^7$ jedniček. Nyní je prvním neobsazeným členem posloupnosti člen s indexem $391 = 3 \cdot 2^7 + 3 \cdot 2^1 + 1$, umístěme za tyto jedničky $3 \cdot 2^{391}$ nul a tak dále (za posloupnost jedniček (resp. nul) umístěme $3 \cdot 2^k$ nul (resp. jedniček), kde k značí index prvního dosud neobsazeného členu posloupnosti). Zřejmě každému členu posloupnosti přiřadíme jednoznačně nulu nebo jedničku. Pro spor předpokládejme, že pro některý nekonstantní polynom $P(n)$ s přirozenými koeficienty je podposloupnost $\{a_{P(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ periodická. Označme p délku periody a c index, od kterého je ryze (tzn. bez předperiody) periodická. Podle ($\heartsuit$) existuje x_0 takové, že $2^x > Q(x) = P(p(x+1)) - P(px)$ pro každé $x > x_0$ ($Q(x)$ je také polynom). Označme k nějaké takové číslo, které je větší než $\max\{c, x_0\}$ a začíná v něm nějaký úsek nul. Těch nul tedy bude $4 \cdot 2^k + k$. Nadále si uvědomme, že díky tomu, že $P(x)$ má přirozené koeficienty, je $P(x)$ rostoucí a navíc $P(px) \geq P(x) \geq x$. Označme y největší takové přirozené číslo, že $P(py) \leq k$ (kdyby bylo k moc malé, tak ho o něco zvětšeme, aby takové y existovalo). Potom tedy $P(p(y+1)) > k$. Na druhou stranu $P(p(y+2)) = Q(y+1) + Q(y) + P(py) < 2^{y+1} + 2^y + k = 3 \cdot 2^y + k \leq 3 \cdot 2^{P(py)} + k \leq 3 \cdot 2^k + k$. To znamená, že $P(p(y+2))$ je ještě v úseku nul začínajících v k. Protože je tam i $P(p(y+1))$, najdeme p po sobě jdoucích nulových členů periody (totiž například $p(y+1), p(y+1)+1, \ldots, p(y+2)-1$). Provedeme-li analogickou úvahu s k', ve kterém začíná úsek jedniček, najdeme p po sobě jdoucích jednotkových členů periody. To je ale spor s periodicitou. To je všechno, krásný den.

Poznámky k došlým řešením: Myšlenka téměř všech správných řešení byla shodná s myšlenkou autora, šlo o to „dostatečně rychle“ prodlužovat střídající se úseky nul a jedniček. Za argumenty typu „exponenciála roste rychleji než jakýkoliv polynom“, které nebyly podloženy žádným výpočtem, jsem strhával v části b) bod.

6. úloha (18, 14, 2.00, 2.0)

(a) V závislosti na přirozeném n určete hodnotu výrazu (2 BODY)

$$\sum_{i=0}^{n} i(n-i)\binom{n}{i}.$$

(b) Pro přirozená $n \geq k$ dokažte identitu (3 BODY)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2.$$

(a) Úloha se stala o něco snazší, než bylo původně předpokládáno. Stačí tedy výraz lehce upravit. Nejprve pro $n = 1$ dostáváme $0(1-0)\binom{1}{0} + 1(1-1)\binom{1}{1} = 0$. Pro $n > 1$ pak dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n} i(n-i)\binom{n}{i} = 0(n-0)\binom{n}{0} + n(n-n)\binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\binom{n}{i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\frac{n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n-1} n(n-1)\frac{(n-2)!}{(i-1)!(n-i-1)!} = n(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-2}{i-1} =$$

$$= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} = n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}.$$

V předposlední úpravě jsme použili binomickou větu.

(b) K řešení této úlohy budeme potřebovat identitu

$$\binom{r+s}{l} = \sum_{i=0}^{\min\{l,r\}} \binom{r}{i}\binom{s}{l-i},$$

která platí pro každé $l, r, s \in \mathbb{N}_0; l \leq r+s$. Zadání této identity nápadně připomíná čtvrtou úlohu šesté série. I důkaz lze provést stejným způsobem jako v již zmiňované čtvrté úloze šesté série, proto ho zde opakovat nebudeme. Budeme-li navíc definovat $\binom{a}{b} = 0$, pokud $b > a; a, b \in \mathbb{N}_0$, nebo pokud $b < 0; b \in \mathbb{Z}; a \in \mathbb{N}_0$, můžeme psát

$$\binom{r+s}{l} = \sum_{i=0}^{l}\binom{r}{i}\binom{s}{l-i} = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\binom{s}{l-i}. \qquad (\circledcirc)$$

Dále budeme potřebovat ještě jednu identitu

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k} a_{ij}. \qquad (\circledast)$$

Tato identita se pro změnu dokáže stejným způsobem jako první úloha šesté série.

V rovnici v zadání úlohy položme $n + k = m$ a $k - i = j$, vzhledem k tomu, že $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$, máme dokázat identitu

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{m+j}{2k} = \binom{m}{k}^2$$

pro $m \geq 2k$. Začněme od levé strany:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{m+j}{2k} \overset{(\heartsuit)}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \binom{m}{2k-i} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{m}{2k-i} \frac{k!}{(k-j)!j!} \cdot \frac{j!}{(j-i)!i!} \cdot \frac{(k-i)!}{(k-i)!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{m}{2k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-j} \overset{(\diamondsuit)}{=} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} \binom{k}{j} \binom{m}{2k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{m}{2k-i} \sum_{j=i}^{k} \binom{k}{j} \binom{k-i}{k-j} \overset{(\spadesuit)}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{m}{2k-i} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{k-i}{k-j} \overset{(\clubsuit)}{=}$$

$$\overset{(\clubsuit)}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{m}{2k-i} \binom{2k-i}{k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-2k+i)!(2k-i)!} \cdot \frac{(2k-i)!}{(k-i)!k!} \cdot \frac{(m-k)!}{(m-k)!} =$$

$$= \binom{m}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{k-i} \overset{(\bigstar)}{=} \binom{m}{k}^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní už jen vysvětlíme pár rovností. Rovnost $(\heartsuit)$ získáme tak, že do $(\circledcirc)$ dosadíme $r = j$, $m = s$, $l = 2k$, zřejmě platí $2k \leq m + j$, neboť $2k \leq m$. Rovnost $(\diamondsuit)$ plyne z $(\circledast)$. Rovnost $(\spadesuit)$ plyne z faktu, že pro $j \in \{1, 2, \ldots i-1\}$ je $\binom{k-i}{k-j} = 0$. Rovnost $(\clubsuit)$ získáme tak, že do $(\circledcirc)$ dosadíme $i = j$, $r = k$, $s = k - i$ a $l = k$, přičemž požadovaná nerovnost $k \leq 2k - i$ je splněna díky tomu, že $i \leq k$. Nakonec $(\bigstar)$ vyplývá z $(\circledcirc)$ po dosazení $r = k$, $s = m - k$ a $l = k$ a opět si uvědomíme, že je splněna požadovaná nerovnost $k \leq m$, dokonce totiž platí $2k \leq m$.

7. úloha (11, 4, 1.00, 1.0)

(a) Najděte všechny funkce $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ platí (2 BODY)

$$\frac{f(x)}{f^2(x) + g(x)} = \frac{g(x)}{3xg(x) - x^3}.$$

(b) Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňující (3 BODY)

$$kf(n) + nf(k) = (k+n)f(k^2 + n^2).$$

(a) Vynásobme si rovnici výrazem $(f^2(x) + g(x))(3xg(x) - x^3)$, dostáváme

$$3xf(x)g(x) - x^3 f(x) = f^2(x)g(x) + g^2(x),$$

což si upravíme na

$$\frac{f^2(x)g(x) + g^2(x) + x^3 f(x)}{3} = \sqrt[3]{x^3 f^3(x) g^3(x)}.$$

Protože x, $f(x)$ i $g(x)$ jsou kladná čísla, dostáváme z AG-nerovnosti, že (aby platila tato rovnost) se musejí všechny tři sčítance rovnat, tedy

$$f^2(x)g(x) = g^2(x) = x^3 f(x).$$

Z toho už snadno vyjádříme $f(x)$ a $g(x)$ v závislosti na x, vyjde $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. To jsou tedy jediní kandidáti na hledané funkce. Dosadíme-li nyní tyto funkce do zadání, vyjde nám na obou stranách výraz $\frac{1}{2x}$, který je nenulový (neboť $x > 0$), funkce $f(x) = x$ a $g(x) = x^2$ jsou proto jediným řešením dané rovnice.

(b) Vidíme, že konstantní funkce zadání vyhovují. Předpokládejme tedy, že máme nekonstantní řešení, tedy existují přirozená čísla (do kterých nyní počítáme i nulu) a, b taková, že $f(a) \neq f(b)$. Vezměme si nyní taková čísla k, n, že $|f(k) - f(n)|$ je nenulové a nejmenší možné. Nyní si přepišme rovnost ze zadání jako

$$f(k^2 + n^2) = \frac{nf(k) + kf(n)}{n + k}.$$

Pokud jsou n, k nenulová, dostáváme, že $f(k^2 + n^2)$ je vážený průměr hodnot $f(k)$, $f(n)$ a leží ostře mezi těmito hodnotami. Potom je ale $|f(k) - f(k^2 + n^2)| < |f(k) - f(n)|$, což je spor s volbou n, k. Pokud je k nulové (a tedy n nutně nenulové), dostaneme rovnost $f(n^2) = f(0)$. To ale znamená, že $|f(0) - f(n)| = |f(n^2) - f(n)|$, a můžeme si vzít $k = n^2$. Nyní zopakujeme předchozí úvahu a dospějeme opět ke sporu. Zjistili jsme, že pro hledanou funkci musí být $f(k) = f(l)$ pro všechna $k, l \in \mathbb{N}_0$, je tedy konstantní a všechna řešení zadané rovnice jsou proto tvaru $f(x) = c$, $c \in \mathbb{N}_0$.