3. série

Téma: Nerovnosti

Termín odeslání: 6. prosince 2004

1. úloha (3 body)

Nechť a, b jsou délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, c buď délka jeho přepony. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n větší než dva platí $c^n > a^n + b^n$.

2. úloha (3 body)

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla n platí $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.[1]

3. úloha (3 body)

Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b splňující $a + b > 0$ platí

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

4. úloha (5 bodů)

Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že rovnice $x^3 + ax + b$ má tři různá reálná řešení. Ukažte, že pak nutně $a \le 0$.

5. úloha (5 bodů)

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že trojúhelník s délkami stran a, b, c existuje, právě když $a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$.

6. úloha (5 bodů)

Pro n přirozené mějme reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Označme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Dokažte, že pro $x \in (0; 1)$ je

$$P(x) < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7. úloha (5 bodů)

Buďte a, b, c kladná reálná čísla taková, že $abc = 1$. Ukažte, že potom

$$a(b^4 - 1) + b(c^4 - 1) + c(a^4 - 1) \ge 0.$$

8. úloha (5 bodů)

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníka o obvodu 2. Dokažte, že potom

$$\frac{ac}{a + bc} + \frac{ab}{b + ac} + \frac{bc}{c + ab} > 1.$$

---

[1] $n!$ je faktoriál čísla n, tedy součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Řešení 3. série

1. úloha (108, 94, 2,40, 3,0)

Nechť a, b jsou délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, c buď délka jeho přepony. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n větší než dva platí $c^n > a^n + b^n$.

Uvažujme libovolný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a a b a přeponou c. Podle Pythagorovy věty platí $c^2 = a^2 + b^2$, takže $c > a$ a $c > b$. Pro libovolné přirozené číslo $n > 2$ platí

$$c^n = c^{n-2}c^2 = c^{n-2}(a^2 + b^2) = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^2a^{n-2} + b^2b^{n-2} = a^n + b^n,$$

tedy skutečně $c^n > a^n + b^n$.

Poznámky k došlým řešením: Správná řešení se dají rozdělit na tři druhy: První používala algebraické úpravy jako ve vzorovém řešení, druhá postupovala pomocí indukce a třetí brutálně roznásobovala $c^n = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}$ pomocí binomické věty. Bohužel si řešitelé často nevšimli, že binomická věta (nezobecněná) platí pouze pro celočíselné exponenty. Byl jsem hodný a za řešení, které fungovalo pouze pro sudá n, jsem dával dva body.

Špatná řešení většinou používala probírání několika konkrétních případů nebo důkaz obrázkem.

2. úloha (86, 62, 2,22, 3,0)

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla n platí $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.[2]

$$n! = \sqrt{(1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdots ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1)} \le$$
$$\le \frac{1+n}{2} \cdot \frac{2+(n-1)}{2} \cdots \frac{(n-1)+2}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

V prostřední nerovnosti využíváme n AG-nerovností $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$pro dvojice $(a, b) = (1, n)$, $(2, n-1)$, ... , $(n, 1)$.

Poznámky k došlým řešením: S týmto príkladom si väčšina z vás hravo poradila. V podstate všetky správne riešenia použili jeden z troch postupov:

1) použije sa AG-nerovnosť (riešenie sa potom dá napísať na dva riadky);

2) obidva výrazy sa vhodne rozdelia na dvojice a pre tieto dvojice sa dokáže príslušná nerovnosť;

3) indukciou (to však bolo dosť drevorubačské riešenie na tento príklad).

3. úloha (121, 99, 2,48, 3,0)

Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b splňující $a + b > 0$ platí

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

[2] $n!$ je faktoriál čísla n, tedy součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Mějme libovolná čísla a a b s kladným součtem. Aby mělo zadání smysl, je nutně $a \neq 0$, $b \neq 0$. Potom

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0 \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a^2b^2}>0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b^2}>0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}>0.$$

Protože druhá mocnina každého nenulového reálného čísla je kladná a $a+b>0$, poslední nerovnost platí. Všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, takže platí i zadaná nerovnost.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů si s úlohou poradila dobře a vyřešila ji postupem podobným vzorovému řešení. Nejčastější chybou ve zbylých řešeních bylo přenásobení nerovnosti výrazem $(a-b)$, který mohl být záporný, bez dalšího vyšetřování. Někteří řešitelé použili AG nebo jinou známou nerovnost platnou pro kladná čísla. Častou chybou však bylo to, že nezaručili, že jsou čísla do ní vložená kladná.

4. úloha **(85, 82, 4,68, 5,0)**

Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že rovnice x^3+ax+b má tři různá reálná řešení. Ukažte, že pak nutně $a \leq 0$.

Předpokládejme, že rovnice $x^3+ax+b=0$ má tři různá reálná řešení, značme je s, t a u. Tato čísla jsou kořeny kubického mnohočlenu x^3+ax+b, takže podle Viètových vztahů platí $s+t+u=0$ a $st+tu+us=a$. Pak také $0=(s+t+u)^2=s^2+t^2+u^2+2st+2tu+2ts=s^2+t^2+u^2+2a$. Platí tedy $a=-\frac{1}{2}(s^2+t^2+u^2)\leq 0$, což jsme chtěli dokázat.

5. úloha **(72, 54, 2,83, 3,0)**

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že trojúhelník s délkami stran a, b, c existuje, právě když $a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.

Máme dokázat ekvivalenci, dokažme tedy postupně dvě implikace.

„$\Rightarrow$“ Nechť existuje trojúhelník se stranami a, b a c. Potom podle trojúhelníkové nerovnosti platí $a<b+c$, $b<a+c$ a $c<a+b$, čili

$$-a+b+c>0,\ a-b+c>0 \text{ a } a+b-c>0.$$

Vynásobíme-li tyto tři nerovnosti spolu se zřejmým vztahem $a+b+c>0$, dostaneme

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)>0.$$

Roznásobme levou stranu pomocí vztahu $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$:

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)=(c-(a-b))(c+(a-b))((a+b)-c)((a+b)+c)=$$

$$=(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)=(c^2-a^2+2ab-b^2)(a^2+2ab+b^2-c^2)=$$

$$=(2ab-(a^2+b^2-c^2))(2ab+(a^2+b^2-c^2))=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$$

$$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-(a^4+b^4+c^4).$$

Toto číslo je kladné, takže platí $a^4+b^4+c^4 < 2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$.

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že a, b a c jsou kladná čísla a platí $a^4+b^4+c^4 < 2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$. Podle úpravy použité v předchozí implikaci víme, že tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) > 0$. Číslo $a+b+c$ je kladné, takže $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) > 0$. Aby tato nerovnost platila, jsou buďto kladné všechny tři závorky, nebo právě jedna.

Pro spor předpokládejme, že dvě ze závorek jsou záporné a jedna kladná. BÚNO nechť platí $-a+b+c>0$, $a-b+c<0$ a $a+b-c<0$. Sečtením posledních dvou nerovností dostáváme, že $2a<0$, což je spor s tím, že a je kladné číslo.

Všechny tři závorky tedy musí být kladné, takže $a<b+c$, $b<a+c$ a $c<a+b$. Čísla a, b a c splňují všechny tři trojúhelníkové nerovnosti, takže existuje trojúhelník s těmito stranami.

Poznámky k došlým řešením: Nejtěžší část této úlohy spočívala v rozkladu daného výrazu na součin. Někteří to provedli pomocí diskriminantu a vzorce pro rozklad kvadratického trojčlenu, jiní použili Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka. Pěkně však vypadala i řešení pomocí kosinové věty. Hodně se chybovalo v umocňování nerovností bez zdůvodnění, že to je ekvivalentní nebo alespoň důsledková úprava. Často také řešení obsahovalo důkaz jen jedné implikace.

6. úloha $(28,\ 25,\ 4{,}29,\ 5{,}0)$

Pro n přirozené mějme reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že $a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2=1$. Označme $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Dokažte, že pro $x\in(0;1)$ je

$$P(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Podle Cauchyho nerovnosti je

$$P^2(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2 \le (a_0^2+a_1^2+\cdots a_n^2)(1^2+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}) =$$

$$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} < \frac{1}{1-x^2}.$$

V poslední nerovnosti jsme využili, že $x\in(0;1)$. Nyní už jen

$$P(x) \le |P(x)| = \sqrt{P^2(x)} < \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}.$$

7. úloha $(23,\ 13,\ 2{,}96,\ 5{,}0)$

Buďte a, b, c kladná reálná čísla taková, že $abc=1$. Ukažte, že potom

$$a(b^4-1)+b(c^4-1)+c(a^4-1) \ge 0.$$

Mějme kladná reálná čísla a, b a c taková, že $abc=1$. Podle vážené AG-nerovnosti pro čísla ab^4, bc^4 a ca^4 s vahami postupně $\frac{11}{39}$, $\frac{8}{39}$ a $\frac{20}{39}$ platí

$$\frac{11}{39}ab^4+\frac{8}{39}bc^4+\frac{20}{39}ca^4 \ge a^{\frac{11}{39}+4\frac{20}{39}}\, b^{4\frac{11}{39}+\frac{8}{39}}\, c^{4\frac{8}{39}+\frac{20}{39}} = (abc)^{\frac{4}{3}}a = a.$$

Obdobně dostaneme

$$\frac{20}{39}ab^4 + \frac{11}{39}bc^4 + \frac{8}{39}ca^4 \geq b,$$
$$\frac{8}{39}ab^4 + \frac{20}{39}bc^4 + \frac{11}{39}ca^4 \geq c.$$

Sečtením těchto tří nerovností zjistíme, že platí

$$ab^4 + bc^4 + ca^4 \geq a + b + c,$$

což je dokazovaná nerovnost zapsaná jen v trochu jiném tvaru.

8. úloha **(16, 8, 2,75, 2,0)**

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníka o obvodu 2. Dokažte, že potom

$$\frac{ac}{a+bc}+\frac{ab}{b+ac}+\frac{bc}{c+ab}>1.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že $a+c>1$, $b+c>1$, $a+b>1$ $(a+b+c=2)$. Použitím těchto nerovností dostáváme:

$$\frac{ac}{a+bc}+\frac{ab}{b+ac}+\frac{bc}{c+ab}>\frac{ac}{a(b+c)+bc}+\frac{ab}{b(a+c)+ac}+\frac{bc}{c(a+b)+ab}=1.$$

Poznámky k došlým řešením: Nikdo neměl kratší rešení, než bylo autorské. Autorskému řešení se nejvíce blížil *Franta Konopecký*, další celkem elegantní řešení měl *Daniel Petrík*. Oba si vysloužili $+i$. Většina ostatních řešení využívala tvrzení, že existují x, y, z kladná taková, že $a=x+y$, $b=x+z$ a $c=y+z$, a po nějakých úpravách se dobrala k cíli (někteří jen mechanicky upravovali obrovské výrazy, a tak obdrželi záporné imaginární body). A ještě jedna obecné poznámka. Většina řešitelů začala u nerovnosti v zadání a postupně se doupravovala k tvrzení, které platí, odkud odvozovali, že platí nerovnost v zadání. Tento postup není obecně správný. Funguje, pokud se při něm používají pouze ekvivalentní úpravy, v takovém případě je ale potřeba alespoň poznamenat, že se žádné jiné úpravy než ekvivalentní v řešení neobjevily.