5. série

Téma: Kombinatorika

Datum odeslání: 13. února 2006

1. ÚLOHA (3 BODY)

Fotbalový zápas mezi Českou republikou a Slovenskem skončil 4:3. Určete, kolika způsoby se skóre zápasu mohlo vyvíjet.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Určete, kolika způsoby je možné napsat písmena A, B, C, D, ..., Z za sebe (každé použijeme právě jednou) tak, aby vzniklá posloupnost neobsahovala ani jedno ze slov MARTIN, KRIKET, TRITAS a HELCA.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Určete počet všech mnohostěnů, které mají lichý počet stěn a jejichž každá stěna má lichý počet hran.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Víťa s Anšou přišli do cukrárny, kde měli celkem n různých sladkostí (každou bohužel jen jednou). Každý z nich si jich několik koupil. Spočítejte počet všech způsobů, kterými to mohli udělat.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mareka má doma sáček s deseti kuličkami; na každé z nich je napsané nějaké přirozené číslo od 1 do 100. Na návštěvu k němu přišli Dino s Michalem, kterým se kuličky tuze líbily. Mareka by jim rád nějaké dal, ale chce být spravedlivý a dát oběma kuličky se stejným součtem. Rozhodněte, zda se mu to vždy může podařit.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jednou vyrazili organizátoři PraSátka na koncert (tedy, byli tam přinejmenším Saša s Frantou, kteří se samosebou znají). Saša, který má rád nejrůznější statistiky, zjistil, že kdykoli tu A zná stejně lidí jako B („znání se“ je vzájemné, tedy pokud X zná Y, tak také Y zná X), nemají A a B na koncertu jediného společného známého. Dokažte, že na koncertu byl někdo, kdo tam znal právě jednoho člověka.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme tabulku $n \times n$ ($n \geq 2$) takovou, že na $n-1$ políčkách je 1 a všude jinde 0. Můžeme provádět tuto operaci: libovolné číslo zmenšíme o 1 a všechna ostatní čísla, která leží v témže řádku a sloupci zvětšíme o 1. Určete, pro která n je možné po několika krocích dostat tabulku, ve které jsou všechna čísla stejná.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme tabulku $n \times n$ ($n \geq 2$) vyplněnou -1, 0 a 1 tak, že v každém řádku i sloupci je přesně jednou číslo 1, přesně jednou -1 a zbytek jsou samé nuly. Určete, pro která n je možné přeskládat její sloupce a řádky tak, abychom dostali opačnou tabulku (tedy takovou, která obsahuje 1 tam, kde původně byla -1, a -1 tam, kde dřív byla 1).

Řešení 5. série

1. úloha **(64, 61, 2,83, 3,0)**

Fotbalový zápas mezi Českou republikou a Slovenskem skončil 4:3. Určete, kolika způsoby se skóre zápasu mohlo vyvíjet.

Keďže konečný stav zápasu bol $4:3$ tak vieme, že dokopy padlo 7 gólov. Všímajme si teraz kedy padali slovenské góly (vieme, že spolu boli tri). Nech prvý slovenský gól padol ako i_1-ty gól (t.j. predtým ako padol gól bol stav $i_1 - 1 : 0$), nech druhý gól padol ako i_2-ty gól a nech tretí gól padol ako i_3-ty gól. Potom určite platí, že $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 7$. Počet všetkých možných priebehov zápasu je potom rovnaký ako počet trojíc i_1, i_2 a i_3, ktoré splňujú túto podmienku. Tento počet sa ale rovná počtu trojíc, ktoré môžeme vybrať zo siedmich prvkov (pričom každý prvok môže byť vybratý maximálne raz a nezáleží nám na poradí výberu). Podľa známeho vzorca pre počet kombinácií potom dostávame, že hľadaný počet priebehov je $\binom{7}{3} = 35$.

Poznámky k došlým řešením: Drtivá většina z vás dospěla ke správnému výsledku, ovšem někteří zvolili metodu výpisem všech možností. Těmto jedincům jsem strhávala imaginární bod, neboť existují mnohem kratší, jednodušší a elegantnější cesty k cíli.

2. úloha **(62, 59, 2,68, 3,0)**

Určete, kolika způsoby je možné napsat písmena A, B, C, D, ... , Z za sebe (každé použijeme právě jednou) tak, aby vzniklá posloupnost neobsahovala ani jedno ze slov MARTIN, KRIKET, TRITAS a HELCA.

Slova KRIKET a TRITAS obsahují nějaké písmeno dvakrát, ve vzniklé posloupnosti se tedy nikdy neobjeví. Jak MARTIN, tak HELCA obsahují A, v posloupnosti se tedy může vyskytnout nejvýše jedno z nich. Celkový počet všech uspořádání 26 písmen je zřejmě $26! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 25\cdot 26$ (jako první může být jakékoli ze všech 26 písmen, jako druhé libovolné z 25 zbývajících písmen, ...), určeme tedy, kolik z nich obsahuje HELCA nebo MARTIN.

Předpokládejme, že se v posloupnosti vyskytne HELCA, tuto pětici písmen označme novým písmenem $\beth$. Celou posloupnost si pak můžeme představovat jako posloupnost o 22 písmenech $\beth$, B, D, F, G, I, J, K, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Posloupností délky 22 je 22!, tolik posloupností tedy obsahuje HELCA a je zakázaných.

Vyskytne-li se v posloupnosti MARTIN, obdobně si označíme tuto šestici písmen $\daleth$ a spočteme, že (zakázaných) posloupností obsahujících MARTIN je 21!

Počet vyhovujících posloupností dostaneme tak, že od počtu všech odečteme počet všech zakázaných. Je to tedy $26! - 22! - 21! = 21! \cdot 23 \cdot 343199 = 403290286034935686266880000$ (:

3. úloha **(46, 35, 2,22, 3,0)**

Určete počet všech mnohostěnů, které mají lichý počet stěn a jejichž každá stěna má lichý počet hran.

Předpokládejme, že nějaký mnohostěn vyhovuje zadání. Spočtěme součet počtů hran, obklopujících jednotlivé stěny (například pravidelný čtyřstěn má 4 trojúhelníkové stěny, sečteme tedy $3 + 3 + 3 + 3 = 12$). Stěn je lichý počet, každá je obklopena lichým počtem hran, výsledný součet je tedy lichý. V tomto součtu jsme ale každou hranu započítali přesně dvakrát (jednou za každou ze 2 stěn, které odděluje), měl by tedy být sudý. A proto není možné, aby existoval nějaký mnohostěn vyhovující zadání.

Hledaný počet je 0.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů dospěla ke správnému výsledku, ovšem někteří si situaci zjednodušili předpokladem, že všechny stěny mají stejný počet hran. Důkaz si tím ale příliš neusnadnili, a proto jsem za to strhával pouze jeden bod.

4. úloha **(55, 49, 4, 00, 5, 0)**

Víťa s Anšou přišli do cukrárny, kde měli celkem n různých sladkostí (každou bohužel jen jednou). Každý z nich si jich několik koupil. Spočítejte počet všech způsobů, kterými to mohli udělat.

S každou ze sladkostí se uskutečnila právě jedna z následujících možností: buď si ji koupil Víťa, nebo si na ní pochutnala Anša, nebo si ji nedal nikdo. Celkový počet možností tedy je 3^n. Ještě ale víme, že každý si jich několik (což v matematice obvykle znamená aspoň jednu) koupil, nemohlo tedy dojít k tomu, že by si Víťa nic nedal (takovýchto možností je 2^n), ani k tomu, že by nic neměla Anša (opět 2^n možností). Tyto možnosti tedy musíme od celkového počtu odečíst. Variantu, že si ani jeden z nich nic nedal, jsme ovšem odečetli dvakrát, tak ji musíme zase jednou přičíst.

Celkový počet možností je $3^n - 2^n - 2^n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

Poznámky k došlým řešením: Nejdřív bych se chtěl omluvit řešitelům za ne zcela jednoznačnou formulaci zadání, spočívající v použití slova „několik“, které jasně neříká, kolik si těch sladkostí vlastně každý musel koupit. V matematice „několik“ obvykle znamená „aspoň jeden“, a v tomto významu jsem je v zadání použil. Většina řešitelů mu tak ve svých řešeních také rozuměla; plný počet bodů samozřejmě ale dostali i ti, kteří úlohu vyřešili pro jiný význam slova (řešení se ostatně od sebe příliš nelišila).

Bohužel jsem byl nucen nemilosrdně rozdat spoustu záporných imaginárních bodů za řešení, která využívala sum. Jak jistě každý po přečtení autorského řešení pochopí, úloha se dala řešit velmi elegantně a jednoduše, mnohem lépe než pomocí často i několikařádkových výrazů.

5. úloha **(41, 37, 3, 90, 5, 0)**

Mareka má doma sáček s deseti kuličkami; na každé z nich je napsané nějaké přirozené číslo od 1 do 100. Na návštěvu k němu přišli Dino s Michalem, kterým se kuličky tuze líbily. Mareka by jim rád nějaké dal, ale chce být spravedlivý a dát oběma kuličky se stejným součtem. Rozhodněte, zda se mu to vždy může podařit.

Mareka zrejme vie zo svojich guličiek vytvoriť $2^{10} - 1 = 1023$ rôznych neprázdnych kôpok. Súčet čísel na každej kôpke je maximálne $10 \cdot 100 = 1000$. Z Dirichletovho (alebo tiež holubníkového) princípu potom musia existovať dve kôpky, ktoré majú rovnaký súčet. Zoberme si takéto dve kôpky. Ak by náhodou neboli disjunktné, tak z nich môžeme odobrať všetky spoločné guličky. Ak z obidvoch odoberieme rovnaké guličky tak zrejme obidve kôpky budú mať naďalej rovnaký súčet. Keďže tieto kôpky boli na začiatku rôzne, tak sa nám nemôže stať, že by obidve kôpoky, ktoré sme takto dostali boli prázdne. A teda Mareka určite môže dať Dinovi a Michalovi niekoľko guličiek tak, aby mali obidvaja rovnaký súčet.

Poznámky k došlým řešením: Řešení využívající Dirichletova principu byla víceméně správná. Bod jsem strhával za to, když si řešitel neuvědomil, že dostane-li dvě sady kuliček se stejným součtem, které budou mít nějakou kuličku společnou, musíme tuto dát pryč (a nedostane ji nikdo).

Vyskytlo se také několik řešení založených na hledání „ideální“ posloupnosti čísel, která by měla být na kuličkách, aby se Marekovi rozdělování nepodařilo. Touto posloupností byly ve všech případech mocniny dvojky, nikdo mě však nepřesvědčil, že se vskutku jedná o „ideální“ posloupnost v potřebném smyslu. Osobně mám spíše opačný pocit; posloupnost $1, 2, 4, \dots, 64$ (devět čísel, jedno nám chybí) je ta nejrychlejší možnost, jak součty pokrýt čísla od jedné do sta a zabránit tak přidání čísla dalšího – což je vlastnost, která jde tak nějak proti tomu, co by Mareka chtěl.

6. úloha **(22, 14, 3,09, 4,5)**

Jednou vyrazili organizátoři PraSátka na koncert (tedy, byli tam přinejmenším Saša s Frantou, kteří se samosebou znají). Saša, který má rád nejrůznější statistiky, zjistil, že kdykoli tu A zná stejně lidí jako B („znání se“ je vzájemné, tedy pokud X zná Y, tak také Y zná X), nemají A a B na koncertu jediného společného známého. Dokažte, že na koncertu byl někdo, kdo tam znal právě jednoho člověka.

Uvažujme toho účastníka koncertu (říkejme mu třeba Alois), který tu zná **nejvíc** lidí, jejich počet značme n. Zřejmě $n \geq 1$. Předpokládejme, že žádný z Aloisových přátel nemá přesně jednoho známého. Každý z nich pak zná $2, 3, \dots, n$ lidí (víc jich nikdo znát nemůže, to by jich znal víc než Alois). Máme n lidí, ale jen $n-1$ možných počtů známých, takže nějací dva Aloisovi přátelé mají stejně známých. Pak podle zadání nesmí mít žádného společného známého – to je ale v rozporu s tím, že oba znají Aloise.

Nějaký z Aloisových známých tedy musí mít přesně jednoho známého.

Poznámky k došlým řešením: Téměř polovina řešitelů přišla na to, že je třeba hledat účastníka koncertu s největším množstvím známých, a odnesla si plný počet bodů. Zbytek se pokoušel použít k důkazu různé speciální případy (často bezdůvodně předpokládali, že každý účastník koncertu zná Sašu, nebo Frantu) a odnesl si bod. Za zcela zmatená řešení jsem pak dával bodů nula.

7. úloha **(11, 7, 2,45, 2,0)**

Mějme tabulku $n \times n$ ($n \geq 2$) takovou, že na $n-1$ políčkách je 1 a všude jinde 0. Můžeme provádět tuto operaci: libovolné číslo zmenšíme o 1 a všechna ostatní čísla, která leží v témže řádku a sloupci zvětšíme o 1. Určete, pro která n je možné po několika krocích dostat tabulku, ve které jsou všechna čísla stejná.

Ukážme že pre všetky $n \geq 2$ daná postupnosť operácií nikdy neexistuje. Pre spor predpokladajme, že $n \geq 2$ a hľadaná postupnosť operácií existuje. Políčko, ktorého hodnotu budeme v danom kroku zmenšovať nazvyme ako *centrálne*. Označme $v(i,j)$ počet, koľkokrát sme políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci zvolili za *centrálne* (zrejme nezáleží v akom poradí volíme *centrálne* políčka, ale iba na počte ich výberu). Ďalej označme $r(i)$, resp. $s(j)$ počet, koľkokrát sme zvolili centrálne políčko v i-tom riadku, resp. v j-tom stĺpci (zrejme potom $r(i) = \sum_{k=1}^{n} v(i,k)$, resp. $s(j) = \sum_{k=1}^{n} v(k,j)$). Ďalej označme počiatočnú hodnotu políčka v i-tom riadku a j-tom stĺpci ako $a(i,j)$. A nakoniec označme $k(i,j)$ konečnú hodnotu políčka so súradnicami (i,j). Keďže predpokládáme, že na konci majú všetky políčka rovnakú hodnotu tak musí platiť, že $k(i,j) = k(i',j')$ pre všetky $i, i', j, j' \in \{1, 2, \dots, n\} = A$. Zrejme platí, že

$$k(i,j) = a(i,j) - v(i,j) + (r(i) - v(i,j)) + (s(j) - v(i,j)) = a(i,j) + r(i) + s(j) - 3v(i,j).$$

Kedže $k(i,j) = k(i,j')$ pre všetky $i, j, j' \in A$, tak dostávame

$$0 = k(i,j) - k(i,j') = a(i,j) + s(j) - 3v(i,j) - a(i,j') - s(j') + 3v(i,j')$$

a teda

$$a(i,j) - a(i,j') = s(j') - s(j). \qquad \text{(modulo 3)}$$

Kedže na začiatku sme mali iba $n-1$ jednotiek tak v našej tabuľke určite musel existovať nulový riadok, resp. stĺpec. Označme si takýto riadok ako i_0 a takýto stĺpec ako j_0. Kedže $n \geq 2$ tak v našej tabuľke určite existuje aspoň jedna jednotka, nech tá má súradnice (i_1, j_1). Potom musí platiť

$$0 = a(i_0, j_0) - a(i_0, j_1) = s(j_1) - s(j_0) \qquad \text{(modulo 3)}$$

a tiež

$$-1 = a(i_1, j_0) - a(i_1, j_1) = s(j_1) - s(j_0) \qquad \text{(modulo 3)}$$

a dostávame spor pretože výraz $s(j_1) - s(j_0)$ nemôže dávať po delení troma dva rôzne zvyšky.

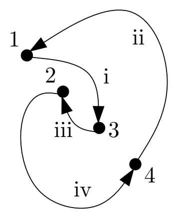
Poznámky k došlým řešením: Úloha se dala řešit rozličnými způsoby: někteří sčítali čísla nejdřív po sloupcích či po řádcích a tím zúžili možné hodnoty n na hodnoty $2, 4$ a 5. Jiní sčítali čísla po úhlopříčkách, čímž se mohli omezit na případ, kdy je $n-1$ dělitelné třemi. Jediný řešitel, který oba způsoby zkombinoval a navíc vyřešil i případ $n = 4$, byl Zbyněk Konečný. Jiná metoda řešení, kterou zvládl nejlépe Pavel Šalom, spočívala v tom, že se v dané tabulce našla podtabulka 2×2 obsahující právě jednu jedničku, a pro ni se pak už celkem snadno dokázalo, že danými operacemi na libovolných prvcích nelze získat všechna čtyři čísla v podtabulce stejná.

8. úloha **(8, 4, 2,50, 2,5)**

Mějme tabulku $n \times n$ $(n \geq 2)$ vyplněnou -1, 0 a 1 tak, že v každém řádku i sloupci je přesně jednou číslo 1, přesně jednou -1 a zbytek jsou samé nuly. Určete, pro která n je možné přeskládat její sloupce a řádky tak, abychom dostali opačnou tabulku (tedy takovou, která obsahuje 1 tam, kde původně byla -1, a -1 tam, kde dřív byla 1).

Označme si hodnotu políčka v i-tom riadku a j-tom stĺpci ako $a_{i,j}$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$. Pomocou našej tabuľky si potom zostrojíme orientovaný graf, ktorého vrcholy budú indexované riadkami našej tabuľky (t.j. budeme mať n vrcholov, pozri obrázok, hrany sú očíslované rímskymi číslami).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$



Pozrime sa teraz na j-ty stĺpec. Predpokladajme, že je v ňom 1 na k-tom a -1 na l-tom mieste. Potom do našeho grafu pridáme hranu (šipku) z k-teho vrcholu do l-teho a túto hranu označíme číslom j. Toto spravíme, pre každý stĺpec z našej tabuľky. Ďalej si ľahko môžeme všimnúť, že v našom grafe do každého vrcholu vchádza a aj vychádza práve jedna hrana (náš graf teda tvorí niekoľko orientovaných cyklov). Pozrime sa teraz, čo sa stane s našim grafom, keď vymeníme k-ty a l-ty stĺpec. Zrejme všetko zostane rovnaké iba hrana, ktorá bola predtým označená ako k-ta bude teraz označená ako l-tá a hrana, ktorá bola predtým l-tá bude teraz k-ta. A teda sa iba vymenilo označenie k-tej a l-tej hrany. Podobne si môžeme všimnúť, že ak vymeníme k-ty a l-ty riadok, tak si iba k-ty a l-ty vrchol vymenia pozíciu.

Úloha zo zadania je teda ekvivalentná s nasledujúcou úlohou: máme orientovaný graf na n vrcholoch (vrcholy sú očíslované číslami $1, 2, \ldots, n$), kde do každého vrcholu vchádza aj vychádza práve jedna hrana. A máme povolené nasledujúce operácie:

(i) vymeníme označenia ľubovoľných dvoch hrán
(ii) vymeníme označenia ľubovoľných dvoch vrcholov

a pýtame sa, či je možné pomocou týchto operácií dostať z pôvodného grafu nový graf, ktorý sa od orginálu bude líšiť iba tým, že všetky hrany (šípky) budú obratené (všetky hrany aj vrcholy pritom musia mať rovnaké čísla ako mali v orginály).

Ukážme teraz, že ak $n \geq 2$ tak takáto postupnosť existuje. Vieme, že náš graf pozostáva z niekoľkých orientovaný cyklov stačí nám teda ukázať, že ak si zoberieme ľubovoľný cyklus tak, že v ňom vieme pootáčať jednotlivé hrany (pomocou našich operácií).

Majme teda orientovaný cyklus dĺžky k a bez ujmy na všeobecnosti nech sú v ňom vrcholy v poradí $1, 2, \ldots, k$. Ukážme teraz, že vieme pomocou operácie výmeny vrcholov vytvoriť orientovaný cyklus $k, k-1, \ldots, 2, 1$. Potom už len stačí poprehadzovať označenia hrán a budeme hotoví.

Postupovať budeme nasledovne: v i-tom kroku si zoberieme i-ty vrchol. Do neho určite vedie (práve) jedna šípka. Nech táto šípka ide z vrcholu j. Ak $j = i+1$ (všade uvažujeme, že $k+1 = 1$) tak sme spokojný ak nie tak vymeníme $i+1$ a j-ty vrchol (takto vlastne dostaneme orientovanú cestu $i+1, i, i-1, \ldots 2, 1$. A po $k-1$ krokoch sme teda hotoví (skúste si uvedomiť prečo potom musí nutne existovať hrana z vrchola 1 do k). Jediné v čom by mohol nastať háčik je, že by v niektorom kroku platilo, že $j = 1$. To by sme si potom porušili začiatok nami zoradenej postupnosti vrcholov. Skúste si ale premyslieť, že to sa nikdy nemôže stať, pretože by sa po niektorom kroku musel náš cyklus rozpadnúť, na niekoľko menších cyklov a to sa nemôže stať (pretože preoznačením vrcholov sa náš cyklus nemôže skrátiť). Zistili sme teda, že pre všetky $n \geq 2$ je možné prehádzať riadky a stĺpce v našej tabuľke tak, aby sme dostali opačnú tabuľku.