6. série

Téma: Rovnice

Datum odeslání: 6. března 2006

1. úloha (3 body)

Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$x^4 + 4y^2 = 4x^2y.$$

2. úloha (3 body)

Najděte všechna prvočísla p a celá čísla n taková, že

$$p + 38 = n(n+3).$$

3. úloha (3 body)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$n + 2m = nm.$$

4. úloha (5 bodů)

Najděte nějaké řešení rovnice[1]

$$x^{x^{2006}} = 2006.$$

5. úloha (5 bodů)

Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 4$ najděte všechny n-tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, že

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_1x_2 + 1 &= x_3(1 + x_2)\\
x_2^2 + x_2x_3 + 1 &= x_4(1 + x_3)\\
&\vdots\\
x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + 1 &= x_{k+1}(1 + x_k)\\
&\vdots\\
x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + 1 &= x_1(1 + x_n)\\
x_n^2 + x_nx_1 + 1 &= x_2(1 + x_1).
\end{aligned}$$

6. úloha (5 bodů)

Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$a^4 + 4a^2b - 11a^2 + 4a(b-2) + (8b^2 - 40b + 52) = 0.$$

[1] Uzávorkování takovýchto patrových mocnin je obvykle shora dolů; v tomto případě tedy jde o $x^{\left(x^{2006}\right)}$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď k libovolné nezáporné celé číslo. Najděte všechna kladná reálná čísla x, y a z taková, že

$$x + 2y + 2z = \frac{6}{x} - x^k$$

$$2x + y + 2z = \frac{6}{y} - y^k$$

$$2x + 2y + z = \frac{6}{z} - z^k.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvažujme posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou $a_1 = 1, a_2 = 4$ a $a_k = a_{k-2} + 4$ pro $k \geq 3$. Najděte všechna přirozená čísla k, m a n, $m < n$, taková, že

$$\frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k.$$

Řešení 6. série

1. úloha **(61, 58, 2,85, 3,0)**

Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$x^4 + 4y^2 = 4x^2y.$$

Zadanou rovnici můžeme upravit následujícím způsobem: $x^4 + 4y^2 = 4x^2y \Rightarrow 0 = x^4 - 4x^2y + 4y^2 = (x^2 - 2y)^2$. Druhá mocnina reálného čísla je 0 tehdy a jen tehdy, když je to číslo 0, je tedy $x^2 = 2y$, neboli $y = \frac{x^2}{2}$. Jiná řešení rovnice mít nemůže; dosazením snadno ověříme, že dvojice $(x, \frac{x^2}{2})$ je vskutku řešením pro každé x.

2. úloha **(25, 22, 4,28, 5,0)**

Najděte všechna prvočísla p a celá čísla n taková, že

$$p + 38 = n(n + 3).$$

Zřejmě je jedno z čísel n a $n + 3$ vždy liché a druhé sudé, jejich součin je tedy vždy sudý. Pravá strana zadané rovnice je sudá, takže sudá musí být i levá strana, takže p je sudé. Jediné sudé prvočíslo je ovšem 2, takže má-li rovnice řešení, je $p = 2$. Pak musí být $40 = n(n + 3)$; tato kvadratická rovnice má kořeny 5 a -8. Obě dvojice $(2, 5)$ i $(2, -8)$ zadané rovnici zřejmě vyhovují.

Poznámky k došlým řešením: Tato úloha nepatřila k nejtěžším, a tak ji také úspěšně vyřešila valná většina účastníků semináře. Všichni odhalili zákeřnost v proměnných v zadání, díky čemuž si vysloužili pochvalu. $+i$ jsem uděloval za dvouřádková a trojřádková řešení. Mínus dva imaginární body si vysloužil nejmenovaný řešitel z Humenného za zvrácenou (dez)interpretaci zadání a šest posměšných smajlíků pro opravovatele navrch.

3. úloha **(59, 57, 2,73, 3,0)**

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$n + 2m = nm.$$

Zjevně pokud n nebo m jsou nulové, tak musí být $m = n = 0$, což je řešení. Nechť dále $n, m \neq 0$.

Podívejme se, jaké zbytky dává dávají levá a pravá strana rovnice po vydělení m: Zjevně m dělí pravou stranu, takže $m|n + 2m$(to „|“ značí „dělí“), což je ekvivalentní $m|n$. Je tedy $n = km$, kde k je nějaké celé číslo (uvědom si, že pro celá čísla funguje dělitelnost obdobně jako pro přirozená, jenom nemáme zaručené znaménko).

Když si teď zkusíme rovnici vydělit n, dostaneme zcela obdobně $n|2m$, takže $km|2m$, což nastane právě když $k|2$. Máme tedy čtyři možnosti $n = \pm m$ a $n = \pm 2m$. Dosazením těchto čtyř původních možností do původní rovnice a vydělením m dostáváme postupně:

(i) $k = 1 \Rightarrow 1 + 2 = m \Rightarrow (n, m) = (3, 3)$
(ii) $k = -1 \Rightarrow -1 + 2 = -m \Rightarrow (n, m) = (1, -1)$
(iii) $k = 2 \Rightarrow 2 + 2 = 2m \Rightarrow (n, m) = (4, 2)$
(iv) $k = -2 \Rightarrow -2 + 2 = -2m \Rightarrow (n, m) = (0, 0)$ (případ, který jsme už vyřešili výše).

Jiná řešení být nemohou. Když si teď (pro jistotu) dosadíme nalezené hodnoty do původní rovnice, vidíme, že máme právě čtyři řešení: $(0, 0)$, $(3, 3)$, $(1, -1)$ a $(4, 2)$.

Poznámky k došlým řešením: Až na jednu výjimku obsahovalo každé došlé řešení nějaké dvojice bodů, které rovnici splňují. Ta těžší část – dokázat, že žádná další řešení neexistují – dopadla už hůře.

Hodně lidí bezhlavě vydělilo celou rovnici výrazem $m - 1$ případně $n - 2$ a z celočíselnosti výsledku něco usuzovalo, bohužel často nediskutovali případ $m = 1$ resp. $n = 2$.

Pravděpodobně nejelegantnější řešení se podařilo vyrobit `Markovi Schollemu, Haně Šormové a Jasně Vilič`: Zadaná rovnice je totiž ekvivalentní s rovnicí $(n-2)(m-1) = 2$ (stačí roznásobit závorku), z čehož plyne, že $m - 1$ dělí dvojku a pak už stačí jen probrat čtyři případy a nalézt čtyři řešení.

4. úloha **(49, 44, 4,31, 5,0)**

Najděte nějaké řešení rovnice[2]

$$x^{x^{2006}} = 2006.$$

Co by se s něčím takovým asi dalo dělat? Zkusme třeba nějaké mocniny a odmocniny ... Například pro $x = \sqrt[2006]{2006}$ je $x^{2006} = 2006$, a tedy $x^{\left(x^{2006}\right)} = x^{2006} = 2006$ – ejhle, našli jsme řešení `(:`

[2] Uzávorkování takovýchto patrových mocnin je obvykle shora dolů; v tomto případě tedy jde o $x^{\left(x^{2006}\right)}$.

Poznámky k došlým řešením: Vzhledem k formulaci zadání jsem dával plný počet bodů za nalezení přesného řešení jak pomocí logických úvah, tak metodou „kouknu a vidím“. Přibližné numerické řešení jsem ohodnotil dvěma body, bez bodů pak zůstali ti řešitelé, kteří sice někde v řešení napsaný výsledek měli (ať už přesný či přibližný), nicméně jejich postup ve mně vyvolal dojem, že jim ho někdo sdělil a oni netuší, proč je to řešení dané úlohy.

5. úloha **(32, 30, 4,50, 5,0)**

Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 4$ najděte všechny n-tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, že

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1x_2 + 1 &= x_3(1+x_2) \\ x_2^2 + x_2x_3 + 1 &= x_4(1+x_3) \\ &\vdots \\ x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + 1 &= x_{k+1}(1+x_k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + 1 &= x_1(1+x_n) \\ x_n^2 + x_nx_1 + 1 &= x_2(1+x_1). \end{aligned}$$

Sečteme-li všechny rovnice, členy tvaru x_ix_{i+1} se vyskytnou na obou stranách a můžeme je tedy odečíst. Dostaneme

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

což můžeme ještě upravit do tvaru

$$(x_1^2 - x_1 + 1) + (x_2^2 - x_2 + 1) + \cdots + (x_n^2 - x_n + 1) = 0.$$

Pro každé reálné číslo x ale platí, že $x^2 - x + 1 > 0$ (k důkazu si jen stačí uvědomit, že ten kvadratický trojčlen má záporný diskriminant), levá strana poslední rovnice je součet výrazů tohoto tvaru, takže je vždy větší než 0. Zadaná soustava rovnic tedy nemá žádné reálné řešení.

Poznámky k došlým řešením: Většina z vás řešila úlohu zcela bezchybně. Pouze několik z vás se dopustilo větších prohřešků; nejčastější chybou bylo vyřešení úlohy nikoliv pro obecné n, ale pro n pevně zvolené (nejčastěji $n = 4$), potěšili jste mě ale všichni.

6. úloha **(5, 4, 4,00, 5,0)**

Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$a^4 + 4a^2b - 11a^2 + 4a(b-2) + (8b^2 - 40b + 52) = 0.$$

Zadaná rovnice je kvadratická vzhledem k proměnné b, zapišme ji tedy obvyklejším způsobem jako

$$8b^2 + 4b(a^2 + a - 10) + (a^4 - 11a^2 - 8a + 52) = 0.$$

Aby měla nějaká reálná řešení, musí být její diskriminant D nezáporný. Když si ale uvědomíme, že $D = 16(a^2+a-10)^2 - 32(a^4-11a^2-8a+52) = -16(a^4-2a^3-3a^2+4a+4) = -16(a^2-a-2)^2 \leq 0$, zjistíme, že jedinou možností je $D = 0$, a tedy $a^2 - a - 2 = 0$. To je opět kvadratická rovnice, která má kořeny $a_1 = -1$ a $a_2 = 2$.

V prvním případě snadno spočteme, že zadaná rovnice pro neznámou b má jediný kořen $b_1 = \frac{2}{5}$.

V druhém případě má rovnice také jen jeden kořen $b_2 = 1$.

Zadaná rovnice má tedy dvě řešení $\left(-1, \frac{2}{5}\right)$ a $(2, 1)$.

7. úloha **(59, 42, 2,20, 2,0)**

Buď k libovolné nezáporné celé číslo. Najděte všechna kladná reálná čísla x, y a z taková, že

$$x + 2y + 2z = \frac{6}{x} - x^k$$

$$2x + y + 2z = \frac{6}{y} - y^k$$

$$2x + 2y + z = \frac{6}{z} - z^k.$$

Nejprve dokažme, že $x = y = z$. Pro spor předpokládejme, že třeba $x \neq y$. Odečtením y-násobku druhé rovnice od x-násobku první dostaneme

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = y^{k+1} - x^{k+1},$$

odkud po vydělení nenulovým číslem $x - y$ dostaneme

$$x + y + 2z = -(x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1} + y^k).$$

Čísla x, y a z jsou kladná, takže na levé straně rovnice je kladné číslo, zatímco napravo je číslo záporné. To je hledaný spor.

Obdobně bychom zjistili, že je i $y = z$, je tedy vskutku $x = y = z$. Potom po vynásobení první rovnice x dostaneme, že musí platit

$$x^{k+1} + 5x^2 - 6 = 0.$$

Číslo $x = 1$ je zřejmě řešením této rovnice.

Pro $k = 0$ nebo 1 jde o kvadratickou rovnici, jejíž druhý kořen snadno vypočteme a zjistíme, že je v obou případech záporný.

Mějme dále $k \geq 2$. Pak $x^{k+1} + 5x^2 = x^2(x^{k-1} + 5)$, což je (v kladných reálných číslech) součin dvou kladných rostoucích funkcí, a tedy také rostoucí funkce. Rostoucí funkce každé hodnoty nabývá nejvýše jednou, existuje tedy nanejvýš jedno x takové, že $x^{k+1} + 5x^2 = 6$. Tato rovnice má tedy jediný kořen $x = 1$.

Zjistili jsme tedy, že zadaná soustava má pro každé k právě jedno řešení $x = y = z = 1$.

8. úloha **(18, 11, 2,72, 2,5)**

Uvažujme posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou $a_1 = 1, a_2 = 4$ a $a_k = a_{k-2} + 4$ pro $k \geq 3$. Najděte všechna přirozená čísla k, m a n, $m < n$, taková, že

$$\frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k.$$

Nejprve si uvědomme, jak vypadají členy posloupnosti: je $a_{2x} = 4x$ a $a_{2x+1} = 4x + 1$.

Pro spor předpokládejme, že existují taková m a n, $m < n$, že

$$\frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \in \mathbb{N}.$$

Ať je h takové číslo, že 2^h je největší mocnina 2, která dělí nějaké z čísel $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ (zřejmě je aspoň jedno z těchto čísel sudé); označme $2j$ nejmenší z čísel $m, m+1, \ldots, n$ takové, že $2^h | a_{2j}$ (členy posloupnosti s lichým indexem jsou zřejmě liché). Nyní dokažme, že 2^h nedělí a_{2l} pro $l \neq j$.

Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, a označme $l > j$ nejmenší takové číslo. Je tedy $2^h | a_{2j}$, $2^h | a_{2l}$, $2j, 2l \in \{m, m+1, \ldots, n\}$. Dvojka dělí $a_{2j} = 4j$ a $a_{2l} = 4l$ ve stejné nejvyšší mocnině, takže 2 dělí i j a l ve stejné nejvyšší mocnině, a tedy je součet $j + l$ sudý. Proto je $a_{j+l} = 2(j+l)$ a snadno se ověří, že $2^h | a_{j+l}$. Ale $j + l < 2l$, což je spor s volbou l jako nejmenšího možného čísla.

Vynásobme nyní zadanou rovnici nejmenším společným násobkem jmenovatelů čísel na její levé straně. Všechny sčítance nalevo až na ten odpovídající $\frac{1}{a_k}$ budou sudé; z něj dostaneme liché číslo. Levá strana tedy bude lichá. Číslo na pravé straně bude dělitelné 2^h, tedy sudé, a to je spor s tím, že by se tato dvě čísla měla rovnat.

Zadaná rovnice tedy nemá žádné řešení.