Povídání k šesté sérii

Aby se Ti lépe řešily příklady o čtyřúhelnících, uvedeme tu několik geometrických definic a vět, které můžeš používat v řešeních bez důkazu. Výchozím materiálem pro tento úvod byl starší příspěvek Libora Barty „Geometrie trojúhleníka a čtyřúhleníka“.

Označme A, B, C vrcholy trojúhelníka, a, b, c délky protilehlých stran, α, β, γ velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C.

Věta. (Sinová) $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$

Věta. (Kosinová) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$

Mějme teď čtyřúhleník. Nechť A, B, C, D jsou jeho vrcholy, a, b, c, d délky stran pořadě AB, BC, CD, DA a e, f délky úhlopříček.

Definice. (Tětitový a tečnový čtyřúhelník) *Čtyřúhelník nazýváme* tětivový*, lze-li mu opsat kružnice, čtyřúhelník nazýváme* tečnový*, lze-li mu vepsat kružnice.*

Věta. *Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě když $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ$ a je tečnový právě když $a + c = b + d$.*

Věta. (Ptolemaiova) *Platí $ef \leq ac + bd$. Rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.*

6. série

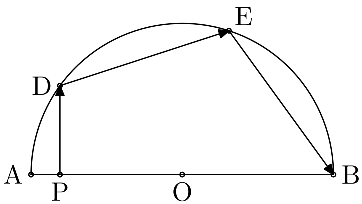
Téma:	Geometrie čtyřúhelníka
Datum odeslání:	12. BŘEZNA 2007

1. ÚLOHA (3 BODY)

Ve čtyřúhelníku $EFGH$ platí $|EH| = |FG|$, $|\sphericalangle HEF| = 70^\circ$, $|\sphericalangle FHE| = 40^\circ$ a $|\sphericalangle HFG| = 50^\circ$. Určete $|\sphericalangle FGH|$.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme půlkružnici se středem O a průměrem AB, jak je znázorněno na obrázku. Paprsek světla vychází z bodu P ve směru kolmém k AB. Odráží se od půlkružnice v bodě D tak, že $|\sphericalangle PDO| = |\sphericalangle EDO|$. (Jinými slovy se v bodě D úhel dopadu rovná úhlu odrazu.) Paprsek DE se pak stejným způsobem odrazí v bodě E, než nakonec dopadne do bodu B. Určete $|\sphericalangle DOP|$.



3. ÚLOHA (3 BODY)

Lichoběžník $ABCD$ je vepsán kružnici tak, že základna AB lichoběžníku je její průměr. Označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, S střed úsečky AB a zkonstruujme bod X tak, aby byl $ASEX$ rovnoběžník. Dokažte, že $|XA| = |XD|$.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P. Dokažte, že P leží na ose úhlu VWT.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AB je průměr kružnice opsané, O je střed AB, P je průsečík úhlopříček a platí, že $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle COD|$. Tečny v bodech C, D se protnou v dalším bodě Q. S faktem, že $|AB| = 2$, určete vzdálenost $|OQ|$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Konvexní čtyřúhelník je rozdělen svými úhlopříčkami na čtyři trojúhelníky. Vepsané kružnice všech čtyř trojúhelníků jsou shodné. Ukažte, že je pak čtyřúhelník kosočtvercem.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

$ABCD$ je čtyřúhelník, ve kterém platí: $|\sphericalangle DAB| < 90°$, $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ACB| = 90°$, $|\sphericalangle DBC| + 2|\sphericalangle DBA| = 180°$. Dokažte, že $(|DB| + |BC|)^2 = |AD|^2 + |AC|^2$.

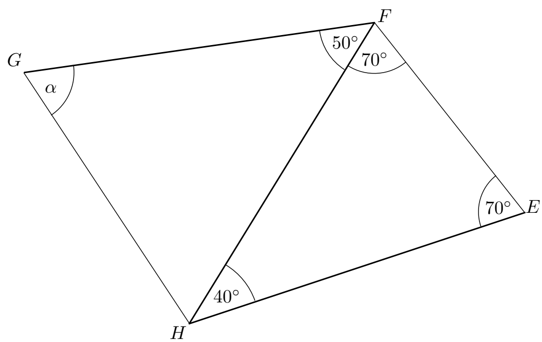
8. ÚLOHA (5 BODŮ)

$PIVO$ je konvexní čtyřúhelník. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. X je bod uvnitř $PIVO$ takový, že $|\sphericalangle XVI| = |\sphericalangle XOP| < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2|\sphericalangle XIV|$.

Řešení 6. série

1. úloha

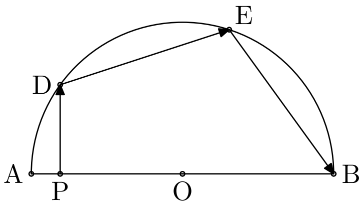
Ve čtyřúhelníku $EFGH$ platí $|EH| = |FG|$, $|\sphericalangle HEF| = 70°$, $|\sphericalangle FHE| = 40°$ a $|\sphericalangle HFG| = 50°$. Určete $|\sphericalangle FGH|$.



Snadno spočítáme, že $|\sphericalangle EFH| = 180° - |\sphericalangle FHE| - |\sphericalangle HEF| = 180° - 40° - 70° = 70°$. Trojúhelník EFH má dva stejné úhly, je tedy rovnoramenný a shodnými rameny jsou EH a FH. Když k tomu přidáme $|EH| = |FG|$ ze zadání, dostaneme $|FH| = |EH| = |FG|$, což znamená, že i trojúhelník FGH je rovnoramenný, úhly $\sphericalangle FGH$ a $\sphericalangle FHG$ jsou stejně velké, a díky znalosti $|\sphericalangle HFG| = 50°$ už snadno dopočteme $|\sphericalangle FGH| = |\sphericalangle FHG| = 65°$.

2. úloha

Mějme půlkružnici se středem O a průměrem AB, jak je znázorněno na obrázku. Paprsek světla vychází z bodu P ve směru kolmém k AB. Odráží se od půlkružnice v bodě D tak, že $|\sphericalangle PDO| = |\sphericalangle EDO|$. (Jinými slovy se v bodě D úhel dopadu rovná úhlu odrazu.) Paprsek DE se pak stejným způsobem odrazí v bodě E, než nakonec dopadne do bodu B. Určete $|\sphericalangle DOP|$.



Spojme body D a E s bodem O a označme $|\sphericalangle DOP| = x$. Protože $DP \perp AB$, je $|\sphericalangle PDO| = 90^\circ - x$. Jelikož se v bodě D rovná úhel dopadu úhlu odrazu, je $|\sphericalangle EDO| = |\sphericalangle PDO| = 90^\circ - x$. Úsečky DO i EO jsou poloměry půlkružnice, $|DO| = |EO|$, trojúhelník EDO je tedy rovnoramenný a $|\sphericalangle DEO| = |\sphericalangle EDO| = 90^\circ - x$. Jelikož se v bodě E rovná úhel dopadu úhlu odrazu, je $|\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle DEO| = 90^\circ - x$. Úsečky EO i BO jsou poloměry půlkružnice, $|BO| = |EO|$, trojúhelník BEO je tedy rovnoramenný a $|\sphericalangle EBO| = |\sphericalangle BEO| = 90^\circ - x$.

Víme:

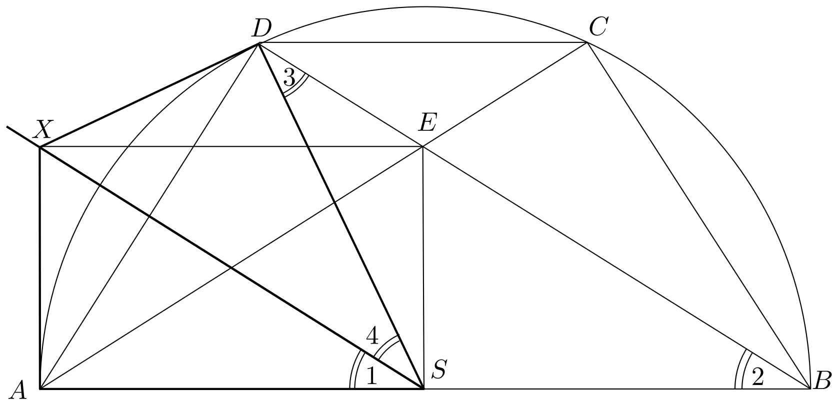
$$\begin{aligned}
|\sphericalangle DPB| &= 90^\circ,\\
|\sphericalangle PDE| &= (90^\circ - x) + (90^\circ - x) = 180^\circ - 2x,\\
|\sphericalangle DEB| &= (90^\circ - x) + (90^\circ - x) = 180^\circ - 2x,\\
|\sphericalangle EBP| &= 90^\circ - x.
\end{aligned}$$

Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka je 360°, tedy

$$90^\circ + 180^\circ - 2x + 180^\circ - 2x + 90^\circ - x = 360^\circ \Rightarrow 180^\circ = 5x \Rightarrow x = 36^\circ.$$

3. úloha

Lichoběžník $ABCD$ je vepsán kružnici tak, že základna AB lichoběžníku je její průměr. Označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, S střed úsečky AB a zkonstruujme bod X tak, aby byl $ASEX$ rovnoběžník. Dokažte, že $|XA| = |XD|$.



Při řešení ukážeme, že jsou trojúhelníky SXA a SXD shodné a tím pádem se v nich odpovídající si strany XA, XD rovnají. Nejlehčí je důkaz podle věty *sus*.

SX je společná strana trojúhelníků, proto je v obou stejně dlouhá. SX a SD jsou poloměry kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$, proto jsou stejně dlouhé. Poslední, co zbývá ukázat je, že jsou úhly $\sphericalangle ASX = \sphericalangle 1$ a $\sphericalangle DSX = \sphericalangle 4$ stejně velké. To uděláme ve třech krocích, značení úhlů necháme jako na obrázku.

Protože jsou přímky SX a BE rovnoběžné (díky tomu, že $ASEX$ je rovnoběžník, je i $SBEX$ rovnoběžník), je $|\sphericalangle 1| = |\sphericalangle 2|$. Protože je trojúhelník SBD rovnoramenný, je $|\sphericalangle 2| = |\sphericalangle 3|$. Protože jsou SX a BE rovnoběžné, je $|\sphericalangle 3| = |\sphericalangle 4|$. Celkově vyšlo $|\sphericalangle 1| = |\sphericalangle 4|$, což jsme potřebovali pro použití věty *sus* dokázat.

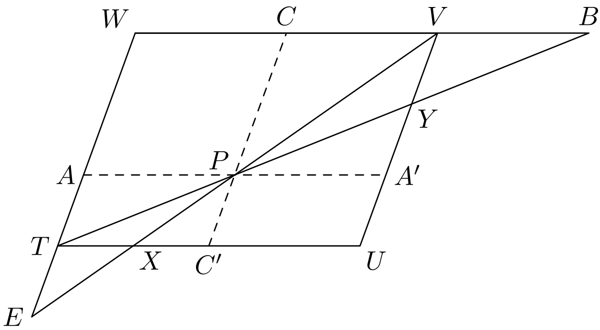
4. úloha

V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P. Dokažte, že P leží na ose úhlu VWT.

Bodem P veďme rovnoběžky se stranami zadaného čtyřúhelníka. Jejich průsečíky s osami stran označme A, A' resp. C, C'. $APCW$ je tedy rovnoběžník a navíc platí $|TC'| = |AP|$.

Označme dále průsečík polopřímek TY a WV jako B a průsečík polopřímek VX a WV jako E.

A protože se v tom už nyní určitě začínáš ztrácet, nakreslíme si pěkný a přehledný obrázek.



Trojúhelníky PBC a YBV jsou podobné (stejnolehlost se středem B), a odtud dostáváme $\frac{|CP|}{|VY|} = \frac{|CB}{|VB|}$. Uvážíme-li nyní stejnolehlost se středem P a trojúhelníky PBC s PTC', vidíme, že platí $\frac{|CB|}{|VB|} = \frac{|C'T|}{|XT|}$

A to je výsledek, který jsme chtěli, neboť obě rovnosti dohromady dávají $\frac{|CP|}{|VY|} = \frac{|CB|}{|VB|} = \frac{|C'T|}{|TX|}$ a po vynásobení $|TX| = |VY|$ dokonce $|CP| = |C'T|$.

Protože platí $|C'T| = |AP|$ (tak jsme bod C' zkonstruovali), dostáváme nakonec pěknou rovnost $AP{=}PC$, neboli rovnoběžník $APCW$ je kosočtverec. Protože v kosočtverci uhlopříčky půlí příslušné úhly, musí P ležet na ose úhlu VWT, čímž je důkaz hotov.

Příklad by šel též řešit použitím sinové věty, či analyticky (zvolíš-li W za počátek a polopřímky WT, WV za osy soustavy souřadnic a rozmyslíš-li si, že stačí dokázat, že P má souřadnice $[z, z]$).

5. úloha

Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AB je průměr kružnice opsané, O je střed AB, P je průsečík úhlopříček a platí, že $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle COD|$. Tečny v bodech C, D se protnou v dalším bodě Q. S faktem, že $|AB| = 2$, určete vzdálenost $|OQ|$.

Nejprve provedeme následující značení: $\alpha = |\sphericalangle APB|$, $\beta = |\sphericalangle COD|$. Nyní jelikož víme, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, tak $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CBD| = \frac{\beta}{2}$. Dále víme že $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ$ a tudíž v trojúhelníku PBC známe již dva úhly (CBP, PCB). Pozorný geometr si nyní všimne, že $\alpha = |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle CBP|$, a má půlku příkladu hotovou, jelikož pak nutně $\alpha = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ a ze zadané rovnosti $\alpha = 2\beta$ dostáváme přímo velikosti úhlů $\beta = 60^\circ$ a $\alpha = 120^\circ$. Nyní máme pevně dané $\beta = 60^\circ$ a ve čtyřúhelníku $OCQD$ zjišťujeme $|OQ|$. Jelikož je trojúhelník OCQ pravoúhlý (QC je kolmé na OC) a víme, že $|\sphericalangle QOC| = 30^\circ$ (QO půlí úhel COD), můžeme jednoduše dopočítat druhou odvěsnu: $|QC| = |CO| \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. A nyní finálním použitím Pythagorovy věty pro trojúhelník OCQ dostáváme kýžený výsledek:

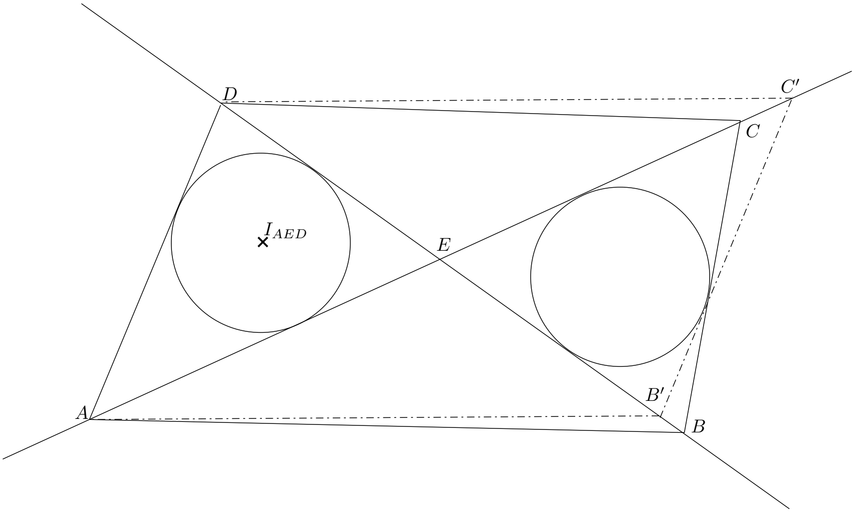
$$|OQ| = \sqrt{|CO|^2 + |QC|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

6. úloha

Konvexní čtyřúhelník je rozdělen svými úhlopříčkami na čtyři trojúhelníky. Vepsané kružnice všech čtyř trojúhelníků jsou shodné. Ukažte, že je pak čtyřúhelník kosočtvercem.

Úlohu vyřešíme tak, že nejprve vyloučíme případ, kdy jsou úhlopříčky kolmé, a poté už úlohu snadno dořešíme.

Předpokládejme tedy, že máme čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček E, který má v každém trojúhelníku ABE, BCE, CDE a DAE stejně velkou vepsanou kružnici. Odmysleme si nyní kružnice v trojúhelnících ABE a CDE a dostaneme obrázek.



Na obrázku jsou ještě zaznačené body B' a C', které vzniknou otočením strany BC po kružnici vepsané ΔBCE tak, aby bylo $AD||B'C'$.

Ukážeme, že pokud je úhel úhlopříček $\sphericalangle AED$ menší než $90°$, tak jsou kružnice vepsané trojúhelníkům $C'DE$ a $B'AE$ menší než kružnice vepsané ΔDAE a $\Delta B'C'E$. To nás za chvíli dovede ke sporu, ve kterém nahlédneme, že i aspoň jedna z kružnic vepsaných ΔCDE a ΔBAE bude menší než kružnice v ΔBCE a ΔDAE, a to odporuje zadání.

Pomocným faktem nám teď bude $|AD| < |C'D|$, který můžeme považovat za zřejmý. Pokud by někomu zřejmý nebyl, tak pomůže nakreslit si obrázek trojúhelníku $AC'D$, v něm těžnici DE, výšku v_dz bodu D a úsečku $A'D$, která vznikne zobrazením AD v osové souměrnosti podle v_d.

Označme pro zjednodušení středy vepsaných kružnic trojúhelníků AED, DEC' a DEC jako I_{AED}, $I_{DEC'}$ a I_{DEC} a jejich poloměry r_{AED}, $r_{DEC'}$ a r_{DEC}. Z $|AD| < |C'D|$, $|AE| = |EC'|$, $\sin|\sphericalangle AED| = \sin|\sphericalangle DEC'|$ vyplyne $r_{DEC'} < r_{AED}$. Je tomu tak, protože obsahy ΔAED a $\Delta DEC'$ jsou stejné:

$$S_{AED} = \frac{1}{2}|DE||AE| \cdot \sin|\sphericalangle AED| = \frac{1}{2}|DE||EC'| \cdot \sin|\sphericalangle DEC'| = S_{DEC'}.$$

Tyto obsahy se dají spočítat jako součty obsahů trojúhelníků vymezených stranou a středem kružnice vepsané:

$$S_{AED} = S_{AEI_{AED}} + S_{EDI_{AED}} + S_{DAI_{AED}} =$$
$$= \frac{1}{2} r_{AED} |AE| + \frac{1}{2} r_{AED} |ED| + \frac{1}{2} r_{AED} |ED| = \frac{1}{2} r_{AED} (|AE| + |ED| + |DA|).$$

Je tedy

$$\frac{1}{2} r_{AED} (|AE| + |ED| + |DA|) = S_{AED} = S_{DEC'} = \frac{1}{2} r_{EDC'} (|EC'| + |ED| + |DC'|).$$

Z $|EC'| + |ED| + |DC'| > |AE| + |ED| + |DA|$ plyne okamžitě $r_{DEC'} < r_{AED}$.

BÚNO (bez újmy na obecnosti) nechť je $|EC| \leq |EC'|$ (pokud by bylo $|EC| > |EC'|$, použijeme druhou stranu čtyřúhelníku $ABCD$ s $|EB| \leq |EB'|$). Pak je zřejmé, že je $r_{DEC} < r_{DEC'}$. Složením $r_{DEC} < r_{DEC'}$ a $r_{DEC'} < r_{AED}$ konečně dostáváme $r_{DEC} < r_{AED}$, což je ve sporu se zadáním.

Dokázali jsme tedy, že úhel svíraný úhlopříčkami ve čtyřúhelníku $ABCD$ musí být pravý. Zbývá už jen úlohu dotáhnout.

V osové symetrii kolem úhlopříčky AC se přímka BD zobrazí sama na sebe, vepsané kružnice z jedné strany se zobrazí na vepsané kružnice z druhé strany a trojúhelníky ABE, ADE se tím pádem taky zobrazí samy na sebe (jsou jasně určeny polohou přímek AC, BD, kružnicemi vepsanými a bodem A). Proto je $|AB| = |AD|$. Stejným způsobem dostaneme i $|AB| = |BC| = |CD|$. Čtyřúhelník $ABCD$ má všechny strany stejně dlouhé a je tedy kosočtvercem.

7. úloha

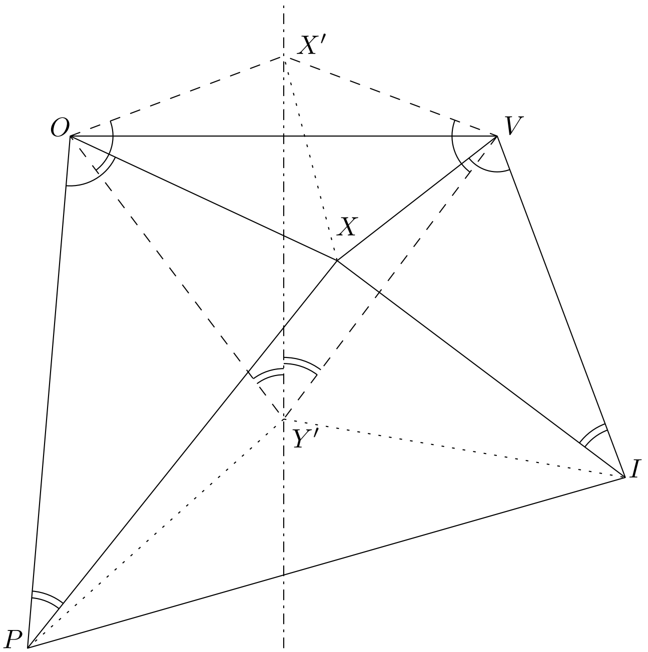
$ABCD$ je čtyřúhelník, ve kterém platí: $|\sphericalangle DAB| < 90°$, $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ACB| = 90°$, $|\sphericalangle DBC| + 2|\sphericalangle DBA| = 180°$. Dokažte, že $(|DB| + |BC|)^2 = |AD|^2 + |AC|^2$.

Tato úloha se může zdát docela zapeklitá, ale to jenom do chvíle než člověk odhalí jednu pěknou symetrii. Ta se navíc dá vypozorovat i ze zadané rovnosti $|\sphericalangle DBC| + 2|\sphericalangle DBA| = 180°$. Pojďme tedy úlohu vyřešit. Označíme si $\alpha = |\sphericalangle ADB|$, $\beta = |\sphericalangle ACB|$, $\omega = |\sphericalangle DBC|$, $\epsilon = |\sphericalangle ABD|$. Máme tedy předpoklady $\omega + 2\epsilon = 180°$ a $\alpha + \beta = 90°$. Nyní označíme bod E jakožto obraz bodu D v osové souměrnosti podle přímky AB. Jelikož $|\sphericalangle EBA| = \epsilon$, pak podle zadané rovnosti $\omega + 2\epsilon = 180°$ leží body E, B a C na jedné přímce. Nyní si stačí všimnout, že podle osové souměrnosti platí $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AEB| = \alpha$ a proto použitím podmínky $\alpha + \beta = 90°$ zjišťujeme, že trojúhelník AEC je pravoúhlý, neboli $|\sphericalangle EAC| = 90°$. Nyní již snadno ze symetrie prohlédneme, že $|AD| = |AE|$ a $|DB| = |EB|$ a tudíž z Pythagorovy věty pro trojúhelník ACE plyne $|CE|^2 = (|EB| + |BC|)^2 = |AE|^2 + |AC|^2$ a dostáváme $(|DB| + |BC|)^2 = |AD|^2 + |AC|^2$, což jsme chtěli dokázat.

8. úloha

$PIVO$ je konvexní čtyřúhelník. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. X je bod uvnitř $PIVO$ takový, že $|\sphericalangle XVI| = |\sphericalangle XOP| < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2|\sphericalangle XIV|$.

Vezměme nejprve body X' a Y' tak, aby oba ležely na ose strany VO a aby byly trojúhelníky VXI a $VX'Y'$ podobné. $\Delta VX'Y'$ a $\Delta OX'Y'$ jsou z osové symetrie podle osy $X'Y'$ shodné. Prohlédněme si nynější obrázek (bez bodu Y).



Naším cílem teď bude dokázat, že je $Y \equiv Y'$, protože z konstrukce bodu Y' plyne $|\sphericalangle VY'O| = 2|\sphericalangle XIV|$.

K důkazu $Y \equiv Y'$ stačí nahlédnout $|PY'| = |IY'|$, protože tak bude Y' ležet na osách obou úseček PI a VO, kterým podle zadání náleží Y.

Trojúhelníky OPX a $OY'X'$ jsou podobné, proto je $\frac{|PO|}{|PY'|} = \frac{|PX|}{|PX'|}$. Společně s $|\sphericalangle POY'| = |\sphericalangle POX| - |\sphericalangle Y'OX| = |\sphericalangle Y'OX'| - |\sphericalangle Y'OX| = |\sphericalangle XOX'|$ to dává, že i trojúhelníky $PY'O$ a $XX'O$ jsou podobné, přičemž koeficient zmenšení (zvětšení) je $\frac{|X'O|}{|Y'O|}$. Je tedy $\frac{|PY'|}{|XX'|} = \frac{|X'O|}{|Y'O|}$.

Stejným postupem z druhé strany se dá ukázat $\frac{|IY'|}{|XX'|} = \frac{|X'V|}{|Y'V|}$. Protože ale $\frac{|X'O|}{|Y'O|} = \frac{|X'V|}{|Y'V|}$, je celkově

$$\frac{|PY'|}{|XX'|} = \frac{|X'O|}{|Y'O|} = \frac{|X'V|}{|Y'V|} = \frac{|IY'|}{|XX'|},$$

což dává požadovaný výsledek $|PY'| = |IY'|$. Úloha je vyřešena.

Závěrem bychom rádi poznamenali, že dokreslení bodu X' nespadlo z nebe. To podstatné v této úloze bylo najít podobné trojúhelníky (nebo si je dotvořit), a nejpodstatnější bylo všimnout si, že s jedněmi podobnými trojúhelníky „obtočenými“ kolem nějakého bodu vznikají ihned další (jiné) podobné trojúhelníky, a to vždy. Pak už je řešení vidět a je potřeba ho jen pomocí poměrů formálně zapsat. I v jiných úlohách mnohdy toto pozorovaní posune řešení dále.