Nerovnosti

V sedmé sérii můžeš s úspěchem použít několik známých nerovností. Pro rozšíření obzorů méně zkušených řešitelů a připomenutí těm zkušenějším je zde uvádíme. Všechny uvedené nerovnosti můžeš ve svých řešeních používat bez důkazu. Upozornění: tyto nerovnosti jdou použít častěji, než se zdá … Mnoho dalšího o nerovnostech se dozvíš v knížečce *Nerovnosti a odhady, edice Škola mladých matematiků, svazek číslo 39.*

Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla (n je libovolné přirozené číslo). Pak platí nerovnosti

$$\min\{x_i\} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \leq \max\{x_i\}\,.$$

Přitom rovnost v každé z těchto nerovností nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Druhá z těchto nerovností je tzv. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (zkráceně **AG nerovnost**), třetí nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem (**AK nerovnost**). Obzvlášť AG nerovnost se v řešeních vyskytuje velmi hojně.

Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1 \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí tzv. **Cauchy-Schwarzova nerovnost**:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2)\,.$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když existuje c reálné tak, že pro všechna i je $a_i = cb_i$, nebo pro všechna i je $b_i = ca_i$. (Vektory $(a_1, \dots, a_n)$ a $(b_1, \dots, b_n)$ jsou lineárně závislé, pokud ses již s tímto pojmem setkal(a) …)

Nechť $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ a $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí tzv. **Čebyševova nerovnost**

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\,.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = \cdots = a_n$ nebo $b_1 = \cdots = b_n$.

7. série

Téma:	Nerovnosti
Datum odeslání:	16. dubna 2007

1. Úloha (3 body)

Rozhodni, které z následujících dvou čísel je větší:

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}, \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}.$$

2. Úloha (3 body)

Definujme posloupnost $\{a_n\}$ přirozených čísel takto:

$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 1.$$

Rozhodněte, zda existuje trojúhelník se stranami a_k, a_l, a_m, kde $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ jsou po dvou různá čísla.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme reálná čísla a, b, c taková, že $a > b > c > 0$. Dokažte, že

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} \geq 5.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro všechny trojice kladných reálných čísel a, b, c:

(i) Pokud $a + b + c \geq 3$, pak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$.
(ii) Pokud $a + b + c \leq 3$, pak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme libovolný (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$; označme E průsečík úhlopříček AC a BD. Dále označme S_1 obsah trojúhelníku ABE, S_2 obsah trojúhelníku CDE a S obsah celého čtyřúhelníku. Dokažte, že platí

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď k kružnice o poloměru 1 a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ body v rovině ($n \in \mathbb{N}$). Dokažte, že na kružnici existuje bod M takový, že platí

$$|MA_1| + |MA_2| + \cdots + |MA_n| \geq n.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme kladná reálná čísla a, b, c, d taková, že platí $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \geq 6.$$

Řešení 7. série

1. úloha

Rozhodni, které z následujících dvou čísel je větší:

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}, \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}.$$

Pro větší přehlednost řešení označme $10^{2006} = a$ a uvažujme rozdíl daných čísel

$$\frac{a+1}{10a+1} - \frac{10a+1}{100a+1} = \frac{81a}{(10a+1)(100a+1)} > 0.$$

Jejich rozdíl je kladný, takže první číslo je větší než druhé.

2. úloha
Definujme posloupnost $\{a_n\}$ přirozených čísel takto:

$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 1.$$

Rozhodněte, zda existuje trojúhelník se stranami a_k, a_l, a_m, kde $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ jsou po dvou různá čísla.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $k < l < m$. Fibonacciho posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí protože $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n$ (rozmysli si, že členy Fibonacciho posloupnosti jsou všechny kladná čísla). Speciálně $a_k \leq a_{m-2}$ a $a_l \leq a_{m-1}$.

Z výše uvedených nerovností a rekurentního vzorce $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$ vidíme, že platí $a_k + a_l \leq a_{m-2} + a_{m-1} = a_m$. To ale odporuje trojúhelníkové nerovnosti $a_k + a_l > a_m$, takže takový trojúhelník existovat nemůže.

3. úloha
Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n.$$

Pro každé i platí $i(2n-i) \leq n^2$. Tuto nerovnost totiž snadno ekvivalentně upravíme na zřejmou nerovnost $(n-i)^2 \geq 0$. Vynásobíme-li $i(2n-i) \leq n^2$ pro $i = 1, 3, \ldots, 2n-1$, dostaneme $(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))^2 \leq (n^n)^2$, odkud odmocněním (umocňované výrazy na levé a pravé straně jsou zřejmě kladné) snadno plyne dokazovaná nerovnost – stačí si jen uvědomit, že rovnost nikdy nenastane.

4. úloha
Mějme reálná čísla a, b, c taková, že $a > b > c > 0$. Dokažte, že

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} \geq 5.$$

Vyjdeme od levé strany zadání:

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} = \frac{c}{a-b} + \frac{(a-b)+(b-c)}{b-c} + \frac{(b-c)+c}{c} =$$

$$= 2 + \frac{c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c} \geq 2 + 3\sqrt[3]{\frac{c}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c}} = 5.$$

V jediné nerovnosti v řešení jsme použili AG-nerovnost.

5. úloha
Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro všechny trojice kladných reálných čísel a, b, c:

(i) Pokud $a + b + c \geq 3$, pak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$.
(ii) Pokud $a + b + c \leq 3$, pak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.

Tvrzení (i) platí, pokud platí pro všechny trojice a, b, c. Pokud nějaká trojice nevyhovuje, tak tvrzení neplatí. Hledejme nyní nevyhovující trojici. Výraz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ je „velký“, pokud je aspoň jedno z čísel a, b, c malé. Takže pro vyvrácení tvrzení stačí vzít nějakou trojici splňující $a + b + c \geq 3$ a například $a \leq \frac{1}{3}$. Takovou trojicí je třeba trojice $[\frac{1}{3}, 2, 2]$: $\frac{1}{3} + 2 + 2 = 4\frac{1}{3} \geq 3$ a $\frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 > 3$. Tvrzení ($i$) je vyvráceno.

Část (ii) platí a je potřeba ji regulérně dokázat.

První řešení:

Díky AH-nerovnosti[1] a předpokladu $a + b + c \leq 3$ platí $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq 1$, jednoduchou úpravou obdržíme potřebné $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.

Druhé (elementární) řešení:

Místo nerovnosti $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ dokážeme s ní ekvivalentní[2] nerovnost

$$ab(1 - c) \geq bc(a - 1) + ac(b - 1).$$

Protože jsou nerovnice symetrické v proměnných a, b, c, můžeme předpokládat $a \geq b \geq c > 0$ (pokud by to neplatilo, stačí a, b, c vhodně přejmenovat). Díky $a \geq b \geq c > 0$ je $3c \leq a + 2c \leq$ $\leq a + b + c \leq 3$, tedy $1 - c \geq 0$, což se bude hodit.

Podmínku ze zadání si přepišme do tvaru $1 - c \geq (a - 1) + (b - 1)$, který v dalších krocích použijeme.

Rozeberme nyní dva případy: $b \leq 1$ a $b > 1$.

Pro $b > 1$ je:

$$ab(1 - c) \geq ab((a - 1) + (b - 1)) = ab(a - 1) + ab(b - 1) \geq bc(a - 1) + ac(b - 1),$$

přičemž byly použity nerovnosti $ab(a - 1) \geq bc(a - 1)$, $ab(b - 1) \geq ac(b - 1)$.

Pro $b \leq 1$ je $bc(b - 1) \geq ac(b - 1)$ a tedy:

$$ab(1 - c) \geq bc(1 - c) \geq bc(a - 1) + bc(b - 1) \geq bc(a - 1) + ac(b - 1)$$

Tím je platnost $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ za předpokladu $a + b + c \leq 3$ dokázána.

6. úloha

Mějme libovolný (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$; označme E průsečík úhlopříček AC a BD. Dále označme S_1 obsah trojúhelníku ABE, S_2 obsah trojúhelníku CDE a S obsah celého čtyřúhelníku. Dokažte, že platí

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}.$$

Vzhledem k tomu, že $ABCD$ je konvexní, nachází se bod E uvnitř čtyřúhelníku a označme-li si navíc $|AE| = a$, $|BE| = b$, $|CE| = c$, $|DE| = d$ a úhel $|\sphericalangle AEB| = \alpha$, potom je $S_1 = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$,

[1] AH-nerovnost (nerovnost mezi aritmetickým a harmonickým průměrem): Pokud $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ jsou kladná čísla, platí: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

[2] Nerovnosti jsou ekvivalentní, pokud lze dostat jednu z druhé ekvivalentními úpravami.

$S_2 = \frac{1}{2} cd \sin(\pi - \alpha)$ a obsah celého čtyřúhelníku lze vyjádřit jako $S = \frac{1}{2}(ab \sin\alpha + bc \sin(\pi - - \alpha) + cd \sin\alpha + ad \sin(\pi - \alpha))$. S využitím vztahu $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$ (nebo prosté úvahy, že trojúhelníky AEB a BEC mají stejnou výšku) tak máme za úkol dokázat

$$\sqrt{\frac{1}{2} ab \sin\alpha} + \sqrt{\frac{1}{2} cd \sin\alpha} \leq +\sqrt{\frac{1}{2} \sin\alpha (ab + bc + cd + ad)}$$

Snadno si přitom uvědomíme, že číslo $\sqrt{\frac{1}{2}\sin\alpha}$ je kladné, protože $\alpha \in (0, 2\pi)$, takže nerovnici můžeme tímto číslem vydělit a tím dostaneme

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{ab + bc + cd + ad}$$

Na obou stranách nerovnosti jsou jistě kladná čísla, a proto ji můžeme umocnit

$$ab + cd + 2\sqrt{abcd} \leq ab + bc + cd + ad$$

Tedy stačí nám už dokázat pouze $2\sqrt{abcd} \leq bc + ad$, což ihned plyne z nerovnosti $0 \leq (\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2$ (stejně tak dobře to vyplývá z AG-nerovnosti pro dvě čísla bc, ad). Poznamenejme, že jsme používali jen ekvivalentní úpravy, což je již dostatečně dobrý důvod k tomu, aby platila nerovnost ze zadání. Poznamenejme ještě, že výsledek plyne rovněž z Cauchyho nerovnosti zapsané ve tvaru $(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leq (a + c)(b + d)$ po odmocnění a dalších jednoduchých úpravách.

7. úloha

Buď k kružnice o poloměru 1 a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ body v rovině ($n \in \mathbb{N}$). Dokažte, že na kružnici existuje bod M takový, že platí

$$|MA_1| + |MA_2| + \cdots + |MA_n| \geq n.$$

Uvažujme libovolný průměr jednotkové kružnice s krajními body X, Y. Pro body X, Y, A_i platí trojúhelníková nerovnost

$$|XA_i| + |YA_i| \geq |XY| = 2,$$

kde $i = 1, \ldots, n$. Sečtením těchto nerovností přes všechna i dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} |XA_i| + \sum_{i=1}^{n} |XA_i| \geq 2n.$$

Jelikož jsou obě sumy kladná čísla a jejich součet přesahuje $2n$, aspoň jedna z nich musí být větší nebo rovna n. Tím pádem jeden z bodů X, Y vyhovuje zadání.

8. úloha

Mějme kladná reálná čísla a, b, c, d taková, že platí $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \geq 6.$$

Z podmínky $a + b + c + d = 4$ plyne

$$2\sqrt{a+b+c} = \sqrt{a+b+c}\sqrt{a+b+c+d} > \sqrt{a+b+c}\sqrt{a+b+c} = a + b + c$$

Posčítáním analogicky získaných nerovností získáme

$$2\sqrt{a+b+c} + 2\sqrt{a+b+d} + 2\sqrt{a+c+d} + 2\sqrt{b+c+d} >$$

$$> (a+b+c) + (a+b+d) + (a+c+d) + (b+c+d) = 3(a+b+c+d) = 12$$

z čehož ihned plyne dokazovaná nerovnost.