1. série

Téma: Rovnice

Datum odeslání: 8. října 2007

0. úloha (1 bod)

Vymysli co nejzajímavější zadaní ke kvadratické rovnici, jejímž jedním kořenem je číslo 2007.

1. úloha (3 body)

Zde leží Diofantos. Ach jaký to zázrak! Tento náhrobek vám sdělí jeho stáří. Bůh mu dopřál, aby byl šestinu svého života chlapcem, po uplynutí dvanáctiny vyrašil na jeho lících vous, po další sedmině zažehl pro Diofanta svíci manželství a po pěti letech jej obdařil synem. Aj! Když nebohý chlapec dosáhl poloviny celkové délky života svého otce, vzal si jej krutý osud. Otec ještě čtyři roky tišil svůj žal vědou o číslech, než i jeho život dosáhl konce.

Kolika let se dožili Diofantos a jeho syn?

2. úloha (3 body)

Vyřeš v reálných číslech soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
xy + 5 =& y + 5x \\
xy + 6 =& 2y + 3x.
\end{aligned}
$$

3. úloha (3 body)

Najdi všechny čtveřice přirozených čísel[1] $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ řešící rovnici $n^a + n^b = n^c$.

4. úloha (5 bodů)

Mějme reálná čísla x, y, z, pro která platí

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 0 \\
xy + yz + zx &= 0.
\end{aligned}
$$

Dokaž, že $x = y = z = 0$.

5. úloha (5 bodů)

Nechť a, b, c jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka, c buď délka přepony. Zjisti, jaký musí být poměr $\frac{a}{b}$, aby čísla a, b, c řešila rovnici:

$$\frac{c+a}{b} + \frac{b}{c+a} = 4$$

6. úloha (5 bodů)

Vyřeš v kladných reálných číslech rovnici

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1).$$

---

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Vyřeš v reálných číslech soustavu rovnic:

$$y = \frac{4x^2}{1+4x^2}$$
$$z = \frac{4y^2}{1+4y^2}$$
$$x = \frac{4z^2}{1+4z^2}$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť existuje $n > 0$ reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ takových, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$x_i = \frac{1}{x_i - x_1} + \frac{1}{x_i - x_2} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i - x_n}$$

a navíc je $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 45$. Urči n.

Řešení 1. série

0. úloha

Vymysli co nejzajímavější zadaní ke kvadratické rovnici, jejímž jedním kořenem je číslo 2007.

Místo vzorového řešení zveřejňujeme nejzajímavější úlohy, jejichž tvůrci budou odměněni čokoládou.

Jakub Töpfer

Princ se chce vypravit zabít draka. Nejdříve ale potřebuje zjistit jeho sílu. V příručce o dracích našel, že síla draka se dá vypočítat takto[2]: „Vynásobte kvadrát drakova věku počtem jeho hlav a k tomuto číslu přičtěte počet jeho ostnů. Pokud toto celé vydělíte drakovým stářím, získáte jeho sílu vyjádřenou v dračích silách.“ Princ si tedy prohlédl svého draka a ihned zjistil, že má sedm hlav. Po dlouhém počítání se mu podařilo sečíst i drakovy ostny – měl jich přesně 4028049. Odhadnout jeho věk ale přesně nedokázal. Po dlouhém hledání však našel pověst, podle které je drak nyní stejně silný, jako když byl sedmkrát mladší. To už princovi stačilo. Jakou sílu má drak?

Jana Faltýnková

$2x^2 + 2\,(7 \cdot 720 - 7^2)\,x - (27272727 + 7\,(2^7 + 2 \cdot 272 + 727 - (7-2))) = 7^2 + 2 \cdot 2^2 x$

Jiří Hadrava

Byl jeden farmář a ten měl mnoho ovcí. Jednou v noci však jeho farmu napadla obrovská smečka vlků a sežrala $\sqrt{2007}$ ovcí krát $\sqrt{\text{původní počet}}$ ovcí. Když druhý den ráno farmář přišel k přeživším ovcím, aby je přepočítal, s úlekem zjistil, že se jejich počet rovná nule. Kolik měl farmář původně ovcí?

[2] Podobně jako se výkon automobilů nesprávně udává v koňských silách, bývá zvykem výkon draka (často nepřesně označován jako síla draka) udávat v dračích silách.

Miroslav Olšák

Pokud bych vytrhl jednu stránku z knížky *Matematika od Ježíše po současnost*, pak bych počet zbylých stránek odmocnil a nakonec vynásobil číslem $\sqrt{2008 + \frac{1}{2008}}$, měla by knížka opět stejný počet stránek jako na začátku. Kolik má obvykle (pokud si s ní zrovna nehraje nějaký matematik) knížka stránek? Napovím, že je to více než 2.

Josef Tkadlec

Jednou našla Háňa na procházce v kouzelném lese (kde rostou takové ty zvláštní tenké stromy) tři magické tyčky. Jak se pozná, že byly magické? Dal se z nich složit pravoúhlý trojúhelník :-). Navíc nejdelší měřila 90,5 cm. Háňa se zaradovala a už byla na cestě zpátky, když tu najednou z křoví u cesty vyskočili dva zlí loupežníci Jarda a Kenny. Než se Háňa nadála, už si s tyčkami Jarda zlověstně hrál. Po chvíli zvedl hlavu a hrdě prohlásil, že kdyby měl každou tyčku čtyřikrát, složil by z nich kvádr o povrchu na chlup přesně $238,9999 dm^2$. Kenny vypadal šokovaně. Jarda viděl, že chce Háňa tyčky zpátky, tak jí slíbil, že jí je vrátí, když mu poví, jak jsou tyčky dlouhé dohromady. Kenny se temně zasmál. Poradíte Háně? (Háňa ví, jak je Jarda pečlivý, tak raději počítá v milimetrech.)

Vzorové řešení přes kvadratickou rovnici

Hledáme obvod o. Povrch bude S, délka nejdelší tyčky c. Pak zjevně platí $o^2 = 2c^2 + S$, neboli $o^2 - (2c^2 + S) = 0$, tedy $o_{1,2} = \pm 2007$

1. úloha

Zde leží Diofantos. Ach jaký to zázrak! Tento náhrobek vám sdělí jeho stáří. Bůh mu dopřál, aby byl šestinu svého života chlapcem, po uplynutí dvanáctiny vyrašil na jeho lících vous, po další sedmině zažehl pro Diofanta svíci manželství a po pěti letech jej obdařil synem. Aj! Když nebohý chlapec dosáhl poloviny celkové délky života svého otce, vzal si jej krutý osud. Otec ještě čtyři roky tišil svůj žal vědou o číslech, než i jeho život dosáhl konce.

Kolika let se dožili Diofantos a jeho syn?

Našou úlohou je zistiť, ako dlho žil Diofantos a jeho syn. Označme d dĺžku Diofantovho života. Ako vieme zo zadania, chlapec dosiahol polovicu celkovej dĺžky života svojho otca, a teda vek syna je $\frac{d}{2}$. Musíme si uvedomiť, že všetky úseky Diofantovho života sú disjunktné, čiže sa neprelínajú. To znamená, že ak ich spočítame dostaneme dĺžku celého Diofantovho života. Takže máme všetky potrebné informácie na to aby sme si zostavili rovnicu:

$$\frac{d}{6} + \frac{d}{12} + \frac{d}{7} + 4 + \frac{d}{2} + 5 = d$$

Po vyriešení získame výsledok $d = 84$. Takže Diofantos žil 84 rokov a jeho syn 42 rokov.

2. úloha

Vyřeš v reálných číslech soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + 5 &= y + 5x \\ xy + 6 &= 2y + 3x. \end{aligned}$$

Obě rovnice upravíme na součinový tvar, který nás snadno dovede k řešení.

$$xy - y = 5x - 5$$
$$xy - 2y = 3x - 6$$

$$y(x-1) = 5(x-1)$$
$$y(x-2) = 3(x-2)$$

$$(y-5)(x-1) = 0$$
$$(y-3)(x-2) = 0$$

Z první rovnice vyplývá: $y = 5$ nebo $x = 1$, podobně z druhé: $y = 3$ nebo $x = 2$. Pokud je $y = 5$, musí už být $x = 2$. Pokud je $x = 1$, musí už být $y = 3$. Odtud je již jasné, že jediná možná řešení jsou $[1, 3]$ a $[2, 5]$.

3. úloha

Najdi všechny čtveřice přirozených čísel[3] $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ řešící rovnici $n^a + n^b = n^c$.

Úlohu šlo řešit několika různými způsoby, jeden byl zajímavější než druhý. Zde jeden z možných postupů:

Je vidět, že $c > a, b$ (jinak by platilo $n^a \leq 0$ nebo $n^b \leq 0$). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $a \geq b$ (kdyby to náhodou neplatilo, tak můžeme neznámé a a b přejmenovat). Celou rovnici vydělíme (nenulovým) číslem n^a:

$$1 + n^{b-a} = n^{c-a}$$

Protože $a \geq b$, je $n^{b-a} \leq 1$. Na pravé straně máme přirozené číslo (protože $c > a$), a tedy i levá strana musí být přirozená. Tedy n^{b-a} je přirozené číslo, což nám spolu s podmínkou $n^{b-a} \leq 1$ dává jedinou možnost, a to

$$n^{b-a} = 1.$$

Takže musí být $b - a = 0$, $a = b$.

Tím nám rovnice přešla na tvar $2n^a = n^c$ a po vydělení (nenulovým) n^a máme $2 = n^{c-a}$. Dvojku lze získat jako přirozenou mocninu přirozeného čísla právě jedním způsobem, a to jako 2^1, z čehož vyplývá $n = 2$, $c - a = 1$.

Každé řešení rovnice tedy musí splňovat: $a = b, c = a + 1, n = 2$. Na druhou stranu každá čtveřice čísel tvaru $(a, b, c, n) = (a, a, a + 1, 2)$, kde a je libovolné přirozené číslo, rovnici splňuje ($2^a + 2^a = 2^{a+1}$). Tím jsme našli všechna řešení.

4. úloha

Mějme reálná čísla x, y, z, pro která platí

$$x + y + z = 0$$
$$xy + yz + zx = 0.$$

Dokaž, že $x = y = z = 0$.

[3] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

První řešení

Nejjednodušší řešení, které v různých obměnách použila i většina řešitelů, je založeno na prostých ekvivalentních úpravách obou rovnic.

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$

$$xy + yz + zx = 0 \tag{2}$$

Umocnění (1) rovnice na druhou dává:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

Odečtením dvojnásobku (2) rovnice získáváme: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Pro druhé mocniny reálných čísel platí: $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$, $z^2 \geq 0$. Z toho plyne jediné možné řešení $x = y = z = 0$.

Druhé řešení:

Na zajímavější řešení přes Viètovy vztahy přišli jen tři řešitelé, a proto jsme za něj udělovali kladné imaginární body.

Mějme normovanou kubickou rovnici $t^3 + at^2 + bt + c = 0$. Pro její kořeny x, y, z a koeficienty platí Vietovy vztahy:

$$\begin{aligned} -a &= x + y + z \\ b &= xy + yz + zx \\ -c &= xyz \end{aligned}$$

Kdo si všimnul podobnosti s naší soustavou, položil $a = b = 0$. Námi hledaná x, y, z jsou řešeními rovnice $t^3 + c = 0$, které je ovšem jediné, a to $-\sqrt[3]{c}$. To znamená $x = y = z = -\sqrt[3]{c}$. Což vzhledem k platnosti (1) implikuje následující: $x = y = z = 0$.

5. úloha

Nechť a, b, c jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka, c buď délka přepony. Zjisti, jaký musí být poměr $\frac{a}{b}$, aby čísla a, b, c řešila rovnici:

$$\frac{c + a}{b} + \frac{b}{c + a} = 4$$

Tato úloha se dala řešit hned několika způsoby. Můžeme začít například tak, že budeme hledat ze začátku poměr $\frac{c+a}{b}$ a z toho potom vykouzlíme poměr $\frac{a}{b}$. Podíváme-li se tedy na zadanou rovnici jako na rovnici s neznámou $x = \frac{c+a}{b}$, dostáváme rovnici $x + \frac{1}{x} = 4$, která vede na kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 1 = 0$. Zde máme diskriminant $D = 16 - 4 = 12$ a máme tedy řešení $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Nyní je nutné si všimnout, že $\frac{c+a}{b} = x_2 = 2 - \sqrt{3} < 1$ a tudíž $c + a < b$, což je ve sporu s trojúhelníkovou nerovností, tudíž možnost $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ neposkytuje žádné řešení. Zaměřme se teda na možnost $\frac{c+a}{b} = x_1 = 2 + \sqrt{3}$.

Snadnou úpravou dostaneme

$$2 + \sqrt{3} = \frac{c + a}{b} = \frac{(c + a)(c - a)}{b(c - a)} = \frac{c^2 - a^2}{b(c - a)} = \frac{b^2}{b(c - a)} = \frac{b}{c - a}.$$

Porovnáním převrácených výrazů na levé a pravé straně máme $\frac{c-a}{b} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$. Nyní však

$$2\frac{a}{b} = \frac{c+a}{b} - \frac{c-a}{b} = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3},$$

a proto je hledaný poměr $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

6. úloha

Vyřeš v kladných reálných číslech rovnici

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1).$$

Pravú stranu rovnice roznásobíme, prehodíme na ľavú stranu a upravíme:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 &= 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} + 2\sqrt{xy} \\ x^2 - 2x\sqrt{y} + y + y^2 - 2y\sqrt{x} + x + xy - 2\sqrt{xy} + 1 &= 0 \\ (x-\sqrt{y})^2 + (y-\sqrt{x})^2 + (\sqrt{xy}-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Kľúčovou úvahou v tejto úlohe bolo všimnúť si, že rovnica sa dá upraviť na súčet štvorcov (druhých mocnín), ktorý sa rovná nule. Druhá mocnina je totiž vždy väčšia alebo rovná nule, takže ak ich máme viac v súčte, ktorý je nulový, musí byť každá z nich nula. Z toho teda máme tri rovnice:

$$(x-\sqrt{y})^2 = 0 \qquad (y-\sqrt{x})^2 = 0 \qquad (\sqrt{xy}-1)^2 = 0$$

Nula je jediné číslo, ktoré je po umocnení na druhú nula, takže každá zo zátvoriek musí byť 0. Tým pádom:

$$x = \sqrt{y} \qquad y = \sqrt{x} \qquad \sqrt{xy} = 1$$

Sem sa väčšina z vás dostala. Ale nie všetci ste si uvedomili, čo to znamená. Máme totiž tri rovnice o dvoch neznámych. Z dvoch z nich vieme vypočítať x aj y, napr. z prvých dvoch. Jednoduchým dosadením vyjde $x = \sqrt[4]{x}$, po umocnení a úprave $(x-1)^2(x^2+x+1) = 0$, čo má medzi kladnými reálnymi číslami iba riešenie $x = 1$ a spätným dosadením $y = 1$.

Ale to ešte neznamená, že tieto vypočítané hodnoty splňujú aj tretiu rovnicu. Mohlo by sa stať, že by tretia rovnica nesedela a v tom prípade by úloha nemala žiadne riešenie. Z toho dôvodu je nutné buď riešenie overiť v tretej rovnici alebo spraviť skúšku správnosti. Tak ju spravíme a sme hotoví:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 1(1 + 1 + 1)$$

Jediným riešením je $x = y = 1$.

7. úloha

Vyřeš v reálných číslech soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x^2}{1+4x^2} \\ z &= \frac{4y^2}{1+4y^2} \\ x &= \frac{4z^2}{1+4z^2} \end{aligned}$$

Předvedeme zde několik různých přístupů k řešení úlohy, protože každý z nich dává dobrý návod, jak u podobných příkladů postupovat. Nejprve si ovšem všimneme, že pravé strany zadaných rovnic nabývají hodnot z intervalu $\langle 0,1)$ (podíl dvou kladných čísel, kde jmenovatel je větší než čitatel), a proto i levé strany mohou nabývat pouze těchto hodnot. Tedy x, y, $z \in \langle 0,1)$. Dále si všimneme, že pokud zjistíme hodnotu jedné z neznámých, můžeme již dosazováním do zadaných rovnic jednoznačně určit hodnoty zbylých dvou.

První řešení (sčítací)
Všechny rovnice sečteme:

$$\frac{4x^2}{4x^2+1}+\frac{4y^2}{4y^2+1}+\frac{4z^2}{4z^2+1}=x+y+z$$

Převedeme neznámé na levou stranu a upravíme do tvaru:

$$\frac{x(2x-1)^2}{4x^2+1}+\frac{y(2y-1)^2}{4y^2+1}+\frac{z(2z-1)^2}{4z^2+1}=0$$

Na levé straně máme součet tří nezáporných čísel a na pravé nulu. Každý ze zlomků musí tudíž být roven nule. Odtud máme dvě možné hodnoty pro x: 0 a $\frac{1}{2}$. A ty nám určují jediná dvě řešení celé soustavy: $[0,0,0]$ a $[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Celý postup lze zpřehlednit substitucí a=$\frac{1}{x}$, b=$\frac{1}{y}$, c=$\frac{1}{z}$ a následným převrácením rovnic (mám na mysli umocnění na -1), jak učinili tři řešitelé.

Druhé řešení (využívající nerovnosti)
Označíme si $f(t)=\frac{4t^2}{1+4t^2}$ a dokážeme, že $t \geq f(t)$. Tedy, že

$$t \geq \frac{4t^2}{1+4t^2}$$

To ekvivalentně upravíme na

$$\frac{t(2t-1)^2}{4t^2+1} \geq 0$$

a odtud už vidíme, že nerovnost platí. A pak tuto nerovnost postupně použijeme na všechny tři neznámé a dostaneme:

$$y=f(x) \leq x=f(z) \leq z=f(y) \leq y$$

Pak nutně $x=y=z$ (rozmysli si) a úlohu snadno dořešíme.

Třetí řešení (využívající monotonii)
Ukážu, že f na intervalu $(0,1)$ roste. Upravíme její předpis na

$$f(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{4t^2}}$$

a všimneme si, že pokud zvětšíme hodnotu t, snížíme hodnotu jmenovatele a tím zvýšíme hodnotu celého zlomku. Zvolíme si $x \geq y$, pak víme

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z \geq x$$

a opět máme $x = y = z$ (Případ $y \geq x$ se vyřeší obdobně). Uvědom si, že následující postup by fungoval pro jakoukoliv rostoucí nebo klesající funkci f, třeba $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$.

Čtvrté řešení (podle Jakuba Štočka)
Zadané rovnice od sebe po dvou odečteme (druhou od první, třetí od druhé a první od třetí), čímž získáme novou soustavu, jejíž jednotlivé rovnice upravíme na:

$$\begin{aligned} y - z &= (x - y)\frac{x + y}{(1 + 4x^2)(1 + 4y^2)} \\ z - x &= (y - z)\frac{y + z}{(1 + 4y^2)(1 + 4z^2)} \\ x - y &= (z - x)\frac{z + x}{(1 + 4z^2)(1 + 4x^2)} \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že znaménka všech levých i pravých stran závisí pouze na uspořádání x, y, z. Můžeme tedy probrat případy $x \geq y$ a $x \leq y$ a postupovat jako v předchozích případech.

Páté řešení (trikové)
Už jen naznačím cestu. Substituce:

$$x = \frac{1}{2}tg\ \alpha,\ y = \frac{1}{2}tg\ \beta,\ z = \frac{1}{2}tg\ \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$$

a pak úprava s využitím základních goniometrických vzorců. Poté se všechny rovnice vynásobí a výsledek je nasnadě. Přeji dobrou zábavu.

8. úloha
Nechť existuje $n > 0$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$x_i = \frac{1}{x_i - x_1} + \frac{1}{x_i - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_n}$$

a navíc je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 45$. Urči n.

Zo zadania vieme, že $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 45$. V každom člene x_i^2 môžeme jedno x_i zapísať ako

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

a dostávame tak vyjadrenie

$$x_i^2 = x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_i}{x_i - -x_j}.$$

Keď sčítame všetkých týchto n súm, môžeme vytvoriť dvojice tvaru $\frac{x_i}{x_i - -x_j} + \frac{x_j}{x_j - x_i}$, kde prvý zlomok je z vyjadrenia x_i^2 a druhý z vyjadrenia x_j^2. Súčet takejto dvojice je jedna (ako si každý ľahko overí).

Celkovo teda máme:

$$45 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_i}{x_i - x_j} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i - x_j} + \frac{x_j}{x_j - x_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Jediné kladné riešenie kvadratickej rovnice $n(n-1)/2 = 45$ je $n = 10$.