Povídání k páté sérii

Milý řešiteli, jistě se nyní tvůj dychtivý zrak, spíše než k tomuto textu, obrací k novým úlohám, na které se již tak dlouho těšíš. Pozdržíš-li ovšem svůj zvídavý pohled ještě chvilku na těchto řádcích, slibujeme, že nebudeš litovat. Dozvíš se totiž, jak se takové úlohy o minimech a maximech řeší a jakých chyb se při nich nesmíš dopustit. Více vysvětlí následující příběh.

Byla jednou přednáška na Matfyzu a Kenny se na ní pěkně nudil. No a když se Kenny nudí, tak otravuje ostatní. Zeptal se tedy Dominika, který seděl vedle něj: „Schválně, jestli víš, kolik nejvíce koní se dá umístit na klasickou šachovnici tak, aby se žádní dva neohrožovali.“ Dominik, který jinak bývá na přednáškách celkem pozorný, uznal, že tato úloha je vcelku zajímavá a začal ji řešit.

Po chvíli kreslení se dotázal: „Šestnáct?“ Kenny se usmál a povídá: „Šestnáct je docela málo, určitě zvládneš víc.“ Dominik opět chvíli kreslil a pak vyhrkl „Dvacet čtyři! A to už je určitě nejvíc.“ Kenny věděl, že je Dominik mimo, ale chtěl ho v tom trochu podusit. „Proč by to podle tebe mělo být nejvíc?“ Dominik hbitě odpověděl: „No, dám jich osm na první a poslední řadu a pak ještě osm na čtvrtou řadu a víc už jich na tam dát nemůžu, takže je dvacet čtyři maximum.“

Kenny pochopil, že bude muset Dominikovi ještě něco vysvětlit: „No ale to přece není pravda! Jak víš, že kdybys koně začal umisťovat nějak jinak, tak by se jich nakonec nemohlo vejít víc? Musel bys dokázat, že jsi je umisťoval nejlepším způsobem, a něco takového se dokazuje *hodně* těžko. Mimoto, dvacet čtyři není maximum, dá se jich tam naskládat víc.“ Odpověď Dominika nepotěšila a seděl bezradně dál.

Kenny to viděl a Dominikovi napověděl: „Dá se jich tam postavit dokonce třicet dva.“ Dominikovi svitlo a uvědomil si, že každý kůň ohrožuje jen pole opačné barvy, než na kterém stojí. Když tedy umístí koně na všechna pole bílé barvy, žádní dva se neohrožují. Třicet dva koní se tedy opravdu dá umístit.

Dominikův zájem opět vzrostl a tak se pichlavě zeptal: „A jak teda budeš dokazovat, že pro víc už to nejde, když nestačí říct, že další se tam nedá přidat?“ Kenny byl samozřejmě připraven a rovnou spustil: „Představ si, že si tu šachovnici rozdělím na osm obdélníků 4x2. Teď, kdyby koní bylo třicet tři, už by jich v jednom obdélníku muselo být aspoň pět.“ „To znám, tomu se říká Dirichletův princip,“ přerušil na chvíli Dominik Kennyho. Ten hned pokračoval: „A v obdélníčku 4x2 pět navzájem neohrožených koní být nemůže, protože každý kůň spotřebuje dvě pole – to, na kterém stojí, a jedno další, které ohrožuje. Pro třicet tři to tedy nejde.“

Dominika odpověď uspokojila, ale chtěl si ještě rýpnout: „Ale teď jsi dokázal jenom, že nejde umístit třicet tři koní. Jak víš, že nejde umístit ani nějaké vyšší číslo?“ Kenny uznal, že Dominik našel ve vysvětlení skulinku, a pravil: „On sice můj důkaz bude fungovat i pro vyšší čísla, ale máš pravdu, že v nějakém jiném příkladě by to tak jasné být nemuselo.“ To již oběma stačilo, aby uznali, že maximum je skutečně třicet dva. Přednáška skončila a Kenny byl rád, že už konečně může jít domů.

Jak jste viděli, vyřešit úlohu tak, aby byl Kenny spokojený, není vůbec jednoduché. Naštěstí už ale víte, jak na to.

5. série

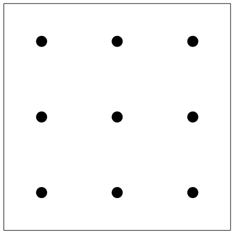
Téma:	Maxima a minima
Datum odeslání:	11. února 2008

0. ÚLOHA (1 BOD)

Povyprávěj nám svůj nejextrémnější matematický zážitek.

1. ÚLOHA (3 BODY)

Na obrázku vidíš devět pravidelně uspořádaných bodů, které jsou ohraničené čtvercem. Tvým úkolem je do tohoto obrázku dokreslit další čtverce tak, abys každé dva body od sebe oddělil[1]. Kolik nejméně čtverců na to potřebuješ?



2. ÚLOHA (3 BODY)

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Pro jaký bod P ležící na obvodu trojúhelníku ABC bude $|PA| + |PB| + |PC|$ minimální?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Myreg má 2008 tabulek sedmdesátidvouprocentní čokolády, které mají postupně jednu, dvě, tři až 2008 kostiček. Myreg si každý den vybere několik tabulek a z každé z nich sní stejný počet dílků[2]. Za kolik nejméně dnů může Myreg všechny čokolády sníst a jakým způsobem?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Při hře lodě ve čtverci 7x7 nám soupeř umístil někam loď o velikosti 1x4 (ale mohl ji i otočit na 4x1). Kolik nejméně výstřelů nám dá jistotu, že jeho loď zasáhneme?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jarda vyhrál od Kazašských železnic permanentku na cestování vlakem po jejich první a jediné, zbrusu nové železniční trati. Tato přímá trať byla postavena s kazašskou precizností – nemá žádné odbočky a je na ní $n \geq 2$ měst, pričemž každá dvě sousední města jsou od sebe vzdálená přesně 40 km. Jarda si tedy přišel do jednoho z nich permanentku vyzvednout a s úžasem zjistil, že do každého z měst má zadarmo pouze jedinou cestu. Chudák Jarda se však strašně rád vozí

[1] Body jsou oddělené, pokud není možné dojít z jednoho do druhého, aniž bychom překročili nějakou čáru.

[2] Samozřejmě si musí tabulky vybrat tak, aby to bylo možné.

vláčkem, a proto by chtěl procestovat co nejvíce kilometrů. Poraďte mu: Jaká může být jeho nejdelší cesta, pokud nechce nic platit?[3]

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán trojúhelník ABC, uvnitř něj mějme bod P. Postupně vedeme tři rovnoběžky se stranami trojúhelníku procházející bodem P. Rovnoběžka s AB protne BC v bodě X, rovnoběžka s BC protne AC v bodě Y a rovnoběžka s AC protne AB v bodě Z. Dokažte, že maximum výrazu

$$\frac{|BX||CY||AZ|}{|CX||AY||BZ|}$$

je 1/8, a zjistěte, pro který bod P se nabývá.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zámek trezoru se odemkne, pokud se nastaví správná čísla na třech kotoučích, pro každý z nich máme 8 možností. Trezor se ale pokazil, nyní k jeho odemčení stačí, budou-li alespoň dva kotouče nastaveny správně. Na kolik nejméně pokusů můžeme trezor uzamčený libovolnou kombinací s jistotou odemknout? Pokusem míníme to, že kotouče libovolně nastavíme a poté zkusíme, jestli je kombinace správná a trezor jde odemknout.

Řešení 5. série

0. úloha

Povyprávěj nám svůj nejextrémnější matematický zážitek.

Možná trochu překvapivě přišlo relativně málo „řešení“ nulté úlohy. Asi jste nedokázali z toho množství vašich extrémních zážitků s „královnou věd“ vybrat ten úplně nejzajímavější nebo vám přišlo téměř nemožné vyjádřit onu jistě úchvatnou příhodu pomocí slov nebo číslic. `:-)` Přesto se našlo pět statečných, kteří se poprali *s extrémy bez trémy*! Každý ode mě tím pádem dostal bod. Protože vaše výkony byly vyrovnané a naše zásoby čokolády jsou omezené, s obtížemi jsem vybral tři z vás, kteří nejvíc oslovili mou duši nebo podráždili mou bránici. Vy zde uvedení se těšte na theobrominovou bombu! `;-)`

Karel Kolář se nám svěřil téměř surrealisticky ...

Můj nejsilnější a nejúžasnější matematický zážitek se udál ve velice zajímavé, špatně determinovatelné rovině imaginárního snění. Stalo se to přesně dne, na který si nepamatuji, protože tento sen se mnou tolik otřásl. Bylo to tak neurčité a přesto to šlo přes plochu. Dalo by se říci, že se udál najednou (limitně), ale trvalo to celé věky. Jednalo se o kombinaci, možná permutaci, či spíše variaci všeho, co jsem z matematické analýzy znal. Bylo to dech beroucí, skoro až integrující do komplexity. Mělo to neklesající, přímo rostoucí tendenci a nikde se nedalo mluvit o nějakém inflexním bodu – a to přestože to nebylo ani trochu prosté. Měl jsem skoro pocit, že lze vytvořit dvouúhelník, ale trojúhelník není vůbec tak euklidovsky jednoduchý, jak se dříve mohl zdát. Ale jednoho dne jsem začal zapomínat jak derivace na členy polynomu. Cítil jsem se jako jedno malé číslo v matici, která se rozléhá napříč jedenáctirozměrným vesmírem.

[3] Mezi městy se lze pohybovat jen vlakem.

… člověku jde skoro až mráz po zádech. :-) Na druhou stranu **Adam Borovský** nám popisuje čistě realisticky svou mimořádnou historku, kterou by nikdo úmyslně nezrežíroval …

Při posledních letních prázdninách jsme s kamarády čekali na tramvaj číslo čtyři. Dlouho nic nejelo, když jsme najednou zahlédli přijíždějící tramvaj. Za chvíli jsme viděli, že přijíždějí dokonce dvě. Zeptal jsem se bystrozrakého kámoše: „Co jede?“ Ten odpověděl: „Tři a jedna.“ A vzápětí na to druhý kamarád: „ … jsou čtyři, tak jedem, ne?!“

A jeli jste. A my také „popojedem“ a přesuneme se k tomu, jaké eskapády prožívá kvůli matematice **Hana Šustková** …

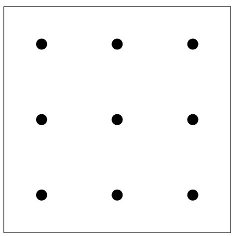
Mezi mé nejextrémnější zážitky patří pravidelně nalézt budovy, kde se koná matematická olympiáda, a setkání s místními matematiky. Buď totiž hledáme nové cesty a musíme občas přelézt nějaký ten plot nebo nějakou tu psí boudu, jindy zjišťujeme, že podchody a nadchody jsou na druhé straně města a mezi rozjeté automobily pro jistotu nelezeme, nebo konečně dorazíme k budově, která se tváří svou věčnou mlčenlivostí zamknutá. Když spěchám, tak mi tyto zážitky připadají velice extrémní. Zvláště proto, že po olympiádách v zimním období bývám pravidelně nemocná.

A poté konečně vejdete a potkáváte zmatené matematiky, jak čučí na tabuli metr krát metr „Olympiáda 1. patro doleva“ a zeptají se na cestu. Pak jsem vždycky v rozpacích, zda vůbec mezi matematiky patřím.

… Tak o tom vůbec, Hanko, nepochybuji, když řešíš náš seminář. :-) Závěrem chci pochválit všechny, kteří se s námi podělili o svůj extrémní prožitek s matematikou, a zároveň vám s ní všem přeji i nadále spoustu zábavy! :-)

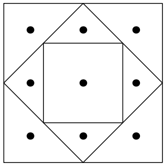
1. úloha

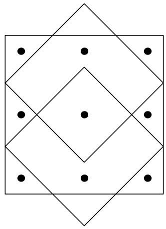
Na obrázku vidíš devět pravidelně uspořádaných bodů, které jsou ohraničené čtvercem. Tvým úkolem je do tohoto obrázku dokreslit další čtverce tak, abys každé dva body od sebe oddělil[4]. Kolik nejméně čtverců na to potřebuješ?



Přidání dvou čtverců stačí k rozdělení všech devíti bodů mřížky. Na každém obrázku je jedno správné řešení. Řešení vpravo našel pouze *Pavel Kratochvíl*, pro lepší viditelnost byly body mírně posunuty.

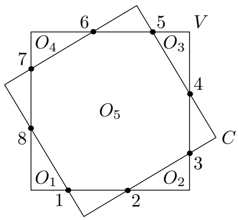
[4]Body jsou oddělené, pokud není možné dojít z jednoho do druhého, aniž bychom překročili nějakou čáru.





Je však potřeba dokázat, že je řešení s doplněním dvou čtverců nejlepší možné. Předpokládejme pro spor, že by stačil jenom jeden čtverec, označme si ho C. Vnější čtverec si označme V. Rozmyslete si, že C může protnout každou stranu V nejvýše ve dvou bodech[5]. Čtverec je konvexní množina[6] a má rovnoběžné protilehlé strany, z čehož už to snadno plyne.

Nová oblast nám vznikne vždycky mezi sousedními body průniku. Těch je nejvýše osm, extrémní případ je nakreslen na obrázku níže. Mohou vytvořit osm oddělených oblastí, ale pouze polovina z nich může ležet uvnitř čtverce V, na obrázku jsou označeny O_1 až O_4. K nejvýše čtyřem vzniklým oblastem přičteme ještě vnitřní oblast čtverce C, na obrázku označena O_5. Máme devět bodů a pouze pět oblastí, podle Dirichletova principu[7] vždy existuje oblast, ve které jsou alespoň dva body. To je ale spor, a proto nám jeden čtverec rozhodně stačit nebude.



2. úloha

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit?

Za každý nákup v Barevném království zaplatíme jednou bankovkou (platíme dvěma, ovšem jednu nám vrátí). Máme-li 29 bankovek, můžeme udělat nejvýše 28 nákupů, neboť za jednu bankovku si už nic nekoupíme. Je však potřeba ukázat, že 28 nákupů opravdu učinit lze. Toho nahlédneme následovně: nejdříve čtyřikrát nakoupíme za zelené a modré bankovky – zbyde nám 24 červených bankovek a 1 modrá. No a teď nakupujeme za červenou a k ní střídáme modrou a zelenou (tzn. za červenou a modrou nám vrátí zelenou, za červenou a zelenou nám vrátí modrou). Takhle pokračujeme, až vyčerpáme všechny červené bankovky, což nastane po uskutečnění 24 nákupů. Dohromady jsme tudíž opravdu učinili 28 nákupů.

---

[5]pokud s ním nesdílí část hranice, ale tím spíše by nám jeden čtverec nestačil.

[6]konvexní množina je taková množina bodů, že pro libovolné dva její body X a Y i úsečka XY leží uvnitř množiny.

[7]princip, kdy se do n přihrádek umisťuje $n+1$ kuliček, a *Dirichletův princip* říká, že v aspoň jedné přihrádce budou kuličky dvě.

Stojí za povšimnutí, že ať nakupujeme jakkoli, ovšem tak, ať nám nakonec zbyde 1 bankovka, bude barva této bankovky modrá. Při každém nákupu se totiž mění parita počtu bankovek každé barvy, tudíž po 28 nákupech je počet červených a zelených bankovek sudý (t.j. 0) a počet modrých bankovek lichý (t.j. 1).

3. úloha

Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Pro jaký bod P ležící na obvodu trojúhelníku ABC bude $|PA| + |PB| + |PC|$ minimální?

Vieme, že bod P leží na obvode trojuholníka ABC. Ako prvé si všimneme, že ak bod P leží na niektorej zo strán trojuholníka, potom nám súčet dvoch dĺžok z výrazu $|PA| + |PB| + |PC|$ dáva práve dĺžku inkriminovanej strany. Táto hodnota sa nemení pre ľubovoľnú polohu bodu P na tejto strane, a preto nám ostáva umiestniť ho tak, aby jeho vzdialenosť od protiľahlého vrcholu bola minimálna. Hľadaná poloha je päta výšky spustená z protiľahlého vrcholu.

Keďže trojuholník je pravouhlý, päty výšok sa nachádzajú na jeho obvode, pričom špeciálne dve z nich splývajú v bode C. Počet kandidátov na polohu bodu P sme teda zúžili na vrchol C a pätu výšky spustenej z bodu C. Majme klasické označenie strán ($|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$) a dĺžku výšky na stranu c si označme v. Ukážeme, že výraz $a + b$ je za našich podmienok vždy menší ako výraz $c + v$. Pre spor predpokladajme, že je to naopak:

$$a + b \geq c + v$$

Obe strany nerovnosti sú kladné, takže môžme umocniť na druhú.

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq c^2 + 2cv + v^2$$

Použijeme Pythagorovú vetu a skutočnosť, že $cv = ab$, čo platí, pretože oba výrazy vyjadrujú dvojnásobok obsahu trojuholníka.

$$2ab \geq 2cv + v^2$$
$$0 \geq v^2$$

Lenže štvorec výšky je vždy kladný, a teda sme dospeli k sporu, čím sme dokázali, že výraz $|PA| + |PB| + |PC|$ je minimálny, ak bod P leží vo vrchole C.

4. úloha

Myreg má 2008 tabulek sedmdesátidvouprocentní čokolády, které mají postupně jednu, dvě, tři až 2008 kostiček. Myreg si každý den vybere několik tabulek a z každé z nich sní stejný počet dílků[8]. Za kolik nejméně dnů může Myreg všechny čokolády sníst a jakým způsobem?

Řešení úlohy se skládá ze **dvou částí**. Nejprveme ukážeme, že 11 dnů Myregovi stačí k tomu, aby všechnu čokoládu snědl, a poté vyvrátíme možnost, že by to mohl udělat rychleji.

Řešení první části:

Řekneme, že nějaký počet kostiček sníme *úplně*, když je sníme ze všech tabulek, ze kterých to je možné. Je dobré si uvědomit, že vhodným *úplným* snězením určitého počtu kostiček se snižuje maximum počtu kostiček v tabulce alespoň na polovinu. Nyní snadno pochopíme, že stačí *úplně*

[8]Samozřejmě si musí tabulky vybrat tak, aby to bylo možné.

sníst následující počty kostiček: 1004, 502, 251, 126, 63, 32, 16, 8, 4, 2 a 1. Jíst budeme 11-krát a 11 dní tedy stačí.

Řešení druhé části (podle Tomáše Pavlíka):
Budeme postupovat odzadu a zkoumat, kolik dnů potřebujeme na to, abychom od stavu, v němž je vše snězeno, postupným přidáváním dospěli ke stavu, kdy máme oněch 2008 tabulek s původními počty kostiček. Označíme si $r(i)$ počet různých velikostí tabulek po i-tém dnu. Určitě $r(1) = 1$, protože v prvním dnu přidáme jen jeden počet kostiček. Snadno si uvědomíme, že v jednom dni nemůžeme tento počet více než zdvojnásobit, protože z jednoho druhu tabulky (z hlediska počtu kostiček) můžeme udělat nejvýše dva. Prostě k ní nové kostičky přidáme, nebo ne. Víme tedy, že $r(i+1) \leq 2r(i)$. Tedy všechny hodnoty $r(i)$ jsou shora omezené. Přesněji $r(2) \leq 2$, $r(3) \leq 4$, ... , $r(10) \leq 1024$. Vidíme, že pro první až desátý den jsou všechny hodnoty menší než 2008, tedy než počet ke kterému chceme dojít, takže za tolik dnů není možné 2008 různých tabulek vytvořit. A nejde ani všechnu čokoládu za tuto dobu sníst, protože každý takový postup by se dal obrátit.

Řešení druhé části (podle Miroslava „Myrega“ Klimoše):
Předpokládejme, že se dá všechna čokoláda sníst za 10 či méně dnů, a označme si p_i počet kostiček, které byly snězeny v i-tém dni. Pokud byly všechny tabulky snědeny, dá se každé z čísel $1, 2 \ldots 2008$ zapsat jako součet nějakých p_i (rozmysli si). Ovšem čísla p_i dávají nejvýše $2^{10} = 1024$ možných součtů (každé z oněch čísel se v součtu buď objeví, nebo ne, má tedy dvě možnosti). A máme spor.

5. úloha
Při hře lodě ve čtverci 7x7 nám soupeř umístil někam loď o velikosti 1x4 (ale mohl ji i otočit na 4x1). Kolik nejméně výstřelů nám dá jistotu, že jeho loď zasáhneme?

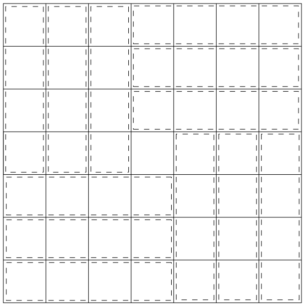
Řešení spočívá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme 12 výstřelů, které nám dají jistotu, že zasáhneme libovolně položenou loď, a poté dokážeme, že pro libovolně položených 11 výstřelů bude vždy existovat alespoň jedna loď, kterou jsme nezasáhli. Pak můžeme tvrdit, že 12 výstřelů je minimum, které nám dá jistotu, že zasáhneme každou loď.

Dvě nejčastější varianty, jak najít hledaných 12 výstřelů vypadají takto: (důkaz toho, že zasáhneme libovolnou loď plyne z obrázků)

			×			
			×			
			×			
×	×	×		×	×	×
			×			
			×			
			×			

			×			
×				×		
	×				×	
		×				×
			×			
×				×		
	×				×	

Důkaz tvrzení, že 11 výstřelů nestačí, provedeme následujícím způsobem. Prvně nalezneme v poli 7×7 dvanáct lodí, které se nepřekrývají, tedy třeba tyto:



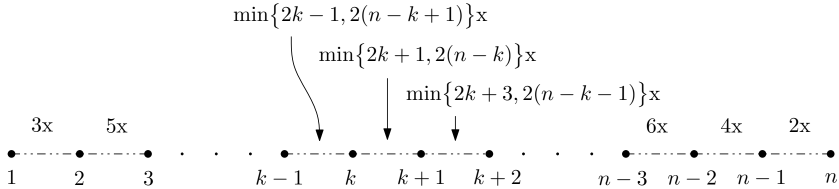
Nyní, abychom po hledaných 11 výstřelech určitě zasáhli jakoukoli loď, musíme určitě zasáhnout i všechny lodě na předchozím obrázku. Jelikož se ale tyto lodě nepřekrývají, potřebujeme k zásahu všech 12-ti lodí alespoň 12 výstřelů. A tedy při 11 výstřelech bude jedna z načrtnutých lodí nezasažena.

6. úloha

Jarda vyhrál od Kazašských železnic permanentku na cestování vlakem po jejich první a jediné, zbrusu nové železniční trati. Tato přímá trať byla postavena s kazašskou precizností – nemá žádné odbočky a je na ní $n \geq 2$ měst, pričemž každá dvě sousední města jsou od sebe vzdálená přesně 40 km. Jarda si tedy přišel do jednoho z nich permanentku vyzvednout a s úžasem zjistil, že do každého z měst má zadarmo pouze jedinou cestu. Chudák Jarda se však strašně rád vozí vláčkem, a proto by chtěl procestovat co nejvíce kilometrů. Poraďte mu: Jaká může být jeho nejdelší cesta, pokud nechce nic platit?[9]

Spočítejme nejdříve, kolikrát maximálně může Jarda každý úsek tratě projet. Města si pracovně označme čísly 1, 2, ... , n. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že Jarda vyjel z jedno z měst 1, 2, ... , $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, označme ho k_0, jinak situaci osově symetricky podle středu celé železnice prohodíme. Podotkněme (ne každý si to uvědomil), že město k_0 může Jarda ještě jednou navštívit. Úsek $1 \cdots 2$ může Jarda projet dvakrát, $2 \cdots 3$ mohl Jarda projet maximálně čtyřikrát – do a z každého města, které se za ním nachází.

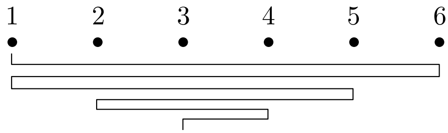
Obecně úsek $k \cdots (k+1)$ může Jarda projet $2k$-krát pro $k < k_0$. Úseky $k \cdots (k+1)$ pro $k \geq k_0$ už můžou být projety $2k+1$-krát, pokud to umožnují „kapacity“ měst za městem $k+1$. Analogicky odpovídají maximální počty projetí na druhé straně tratě – úsek $(n-1) \cdots n$ dvakrát, úsek $(n-2) \cdots (n-1)$ čtyřikrát, ... , úsek $(n-k-1) \cdots (n-k)$ $2k$-krát. Uprostřed tratě, kde se námi spočítané maximální počty zleva a zprava potkají, bereme ten menší z nich. Počty projetí úseků jsou znázorněny na obrázku.



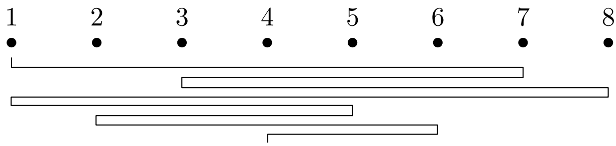
[9] Mezi městy se lze pohybovat jen vlakem.

Ukážeme ještě, že jde maximálních počtů na každém úseku dosáhnout. Nejobecnější strategie zní: „jeď vždy přes půlku.“ Tím každý úsek projede přesně tolikrát, kolik mu umožní počet měst za ním. Jedna z konkrétnějších strategií, kterou našla většina řešitelů, se řídí pravidlem „jeď pokaždé co nejdál“.

Ukázka strategie „jeď pokaždé co nejdál“ pro $n = 6$:



Ukázka jednoho obecného maximálního projetí pro $n = 8$:



7. úloha

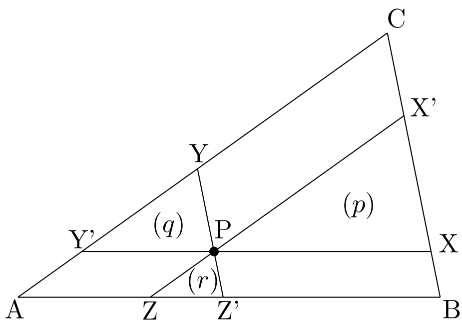
Je dán trojúhelník ABC, uvnitř něj mějme bod P. Postupně vedeme tři rovnoběžky se stranami trojúhelníku procházející bodem P. Rovnoběžka s AB protne BC v bodě X, rovnoběžka s BC protne AC v bodě Y a rovnoběžka s AC protne AB v bodě Z. Dokažte, že maximum výrazu

$$\frac{|BX||CY||AZ|}{|CX||AY||BZ|}$$

je $1/8$, a zjistěte, pro který bod P se nabývá.

První řešení přes podobnosti a AG-nerovnost:

Hlavní myšlenkou bude využití několika podobných trojúhelníků a získanou nerovnost vyřešíme pomocí AG-nerovnosti. Začneme obrázkem.



Díky rovnoběžnosti dostaneme podobné trojúhelníky $\triangle ABC \sim \triangle PXX' \sim \triangle Y'PY \sim \triangle ZZ'P$ s koeficienty podobnosti vzhledem k $\triangle ABC$ po řadě p, q, r. Nyní můžeme přepsat poměr

$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BX|}{|CX'| + |X'X|} = \frac{|Z'P|}{|YP| + |X'X|} = \frac{r|BC|}{q|BC| + p|BC|} = \frac{r}{q+p}$$

a analogicky vyjádříme další dva poměry. Původní nerovnost můžeme ekvivalentně přepsat jako

$$\frac{|BX||CY||AZ|}{|CX||AY||BZ|} = \frac{pqr}{(p+q)(q+r)(r+p)} \leq \frac{1}{8}.$$

Navíc $p, q, r \in \mathbb{R}^+$, takže můžeme dále ekvivalentně upravovat

$$pqr = \sqrt{pq}\sqrt{qr}\sqrt{rp} \leq \left(\frac{p+q}{2}\right)\left(\frac{q+r}{2}\right)\left(\frac{r+p}{2}\right),$$

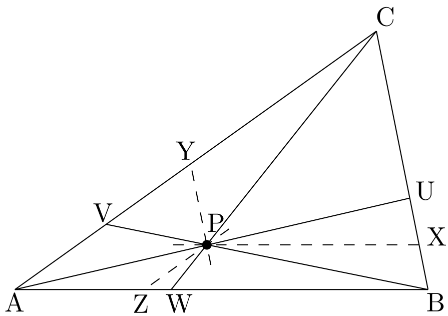
přičemž podle AG-nerovnosti je $\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}$ (nebo též $0 \leq (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$) a analogicky další dvě nerovnosti, jejichž vynásobením dostaneme dokazovanou nerovnost.

Ještě zbývá zjistit, pro který bod P nastává rovnost. Ta nastane, pokud rovnost nastane i ve všech AG-nerovnostech, tj. $p = q = r$. Odtud máme $|PZ'| = |PY|$, protože $|PZ'| = r|BC| = q|BC| = |PY|$, takže bod P bude ležet na těžnici t_a v $\triangle ABC$. Analogickou úvahou bude bod P ležet na těžnicích t_b i t_c, ty se protínají v jednom bodě a P je tedy těžiště.

Druhé řešení podle Cevovy a van Aubelovy věty[10]:
Budeme dokazovat ekvivalentní nerovnost

$$\frac{|CX||AY||BZ|}{|BX||CY||AZ|} \geq 8.$$

Bodem P vedeme tři přímky postupně z vrcholů A, B, C, které protnou protilehlé strany po řadě v bodech U, V, W.



Díky rovnoběžnosti $AB \parallel PX$ můžeme přepsat poměr $\frac{|CX|}{|BX|} = \frac{|CP|}{|WP|}$. Z van Aubelovy věty ovšem máme $\frac{|CP|}{|WP|} = \frac{|CU|}{|BU|} + \frac{|CV|}{|AV|}$. Spolu se dvěma analogickými rovnostmi přepíšeme původní nerovnost

$$\frac{|CX||AY||BZ|}{|BX||CY||AZ|} = \left(\frac{|CU|}{|BU|} + \frac{|CV|}{|AV|}\right)\left(\frac{|AV|}{|CV|} + \frac{|AW|}{|BW|}\right)\left(\frac{|BW|}{|AW|} + \frac{|BU|}{|CU|}\right) = \frac{|CU||AV||BW|}{|BU||CV||AW|} + \frac{|AV|}{|CV|} + \frac{|CU|}{|BU|} + \frac{|AW|}{|BW|} + \frac{|BW|}{|AW|} + \frac{|BU|}{|CU|} + \frac{|CV|}{|AV|} + \frac{|CV||AW||BU|}{|AV||BW||CU|} \geq 8.$$

[10]Pokud tyto věty neznáš, můžeš je najít na příklad na `http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfVanAubelTheorem.html` nebo na `http://www.ies.co.jp/math/java/vector/ceva/ceva.html`, na wikipedii a jinde. Nenech se při tom zmást, že jako van Aubelova věta se označuje i jiné tvrzení, hovořící o čtyřúhelníku (`http://mathworld.wolfram.com/vanAubelsTheorem.html`). Obě tato tvrzení se připisují van Aubelovi.

Podle Cevovy věty je však $\frac{|CV||AW||BU|}{|AV||BW||CU|} = 1$, čímž se nám první a poslední člen v tom nehorázně dlouhém řádku zjednoduší na 1. Se zbývajícími členy si poradíme pomocí známé nerovnosti $A + \frac{1}{A} \geq 2$ pro $A \in \mathbb{R}^+$ (ta je ekvivalentní s $(A-1)^2 \geq 0$) tak, že budeme postupně volit $A = \frac{|AV|}{|CV|}$, $A = \frac{|CU|}{|BU|}$ a nakonec $A = \frac{|AW|}{|BW|}$. To nám celkově dá $\frac{|CX||AY||BZ|}{|BX||CY||AZ|} \geq 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$. Zbývá vyšetřit, kdy nastává rovnost. Ta nastane, právě když při každém dosazení bylo $A = 1$, tedy když $|AV| = |CV|$, $|CU| = |BU|$ a $|AW| = |BW|$. To ale znamená, že U, V, W jsou středy příslušných stran a P je těžiště.

Třetí řešení přes hmotné body – volně podle Pepy Ondřeje:
K důkazu použijeme metodu hmotných bodů, o které se můžeš něco dozvědět v knihovničce PraSátka[11]. Na začátku sestrojíme body U, V, W stejně jako ve druhém řešení a potom tedy máme $\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|WP|}{|CP|}$ a snažíme se dokázat

$$\frac{|BX||CY||AZ|}{|CX||AY||BZ|} = \frac{|WP||UP||VP|}{|CP||AP||BP|} \leq \frac{1}{8}.$$

Hmotnosti bodů A, B, C si označme po řadě $m(A) = a$, $m(B) = b$, $m(C) = c$. Tyto hmotnosti zvolíme tak, aby P bylo těžiště $\triangle ABC$, zřejmě $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, protože P leží uvnitř trojúhelníka. Potom platí $|WP| \cdot (a + b) = |CP| \cdot c$ (můžeš to chápat i fyzikálně jako zákon páky), tedy $\frac{|WP|}{|CP|} = \frac{c}{a+b}$ a analogickými úvahami dostaneme

$$\frac{|WP||UP||VP|}{|CP||AP||BP|} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8},$$

což je tatáž nerovnost, kterou jsme již dokázali v prvním řešení. Rovnost nastává, právě když $a = b = c$, tedy když hmotnosti bodů A, B, C jsou stejné, což znamená, že P je obyčejné těžiště.

8. úloha
Zámek trezoru se odemkne, pokud se nastaví správná čísla na třech kotoučích, pro každý z nich máme 8 možností. Trezor se ale pokazil, nyní k jeho odemčení stačí, budou-li alespoň dva kotouče nastaveny správně. Na kolik nejméně pokusů můžeme trezor uzamčený libovolnou kombinací s jistotou odemknout? Pokusem míníme to, že kotouče libovolně nastavíme a poté zkusíme, jestli je kombinace správná a trezor jde odemknout.

Nejdřív naznačíme analogii s 8. úlohou loňské 1. série.

Každé nastavení tří kotoučů si můžeme představit jako pole v trojrozměrné šachovnici $8\times8\times8$. Jedním pokusem, tj. volbou uspořádané trojice čísel (a, b, c), kde $a, b, c \in \{1, \ldots, 8\}$, vybereme políčko o souřadnicích (a, b, c), resp. vodorovný řádek (a, y, z), vodorovný sloupec (x, b, z) a svislý sloupec (x, y, c), kde $x, y, z \in \{1, \ldots, 8\}$, neboť k otevření trezoru stačí uhodnutí dvou „souřadnic“. Dále zde tuto myšlenku rozvíjet nebudu, vzorové řešení této úlohy je k dispozici na webu. V jejím duchu by závěr zněl: „Minimální počet věží, které musíme rozmístit na trojrozměrné šachovnici $8 \times 8 \times 8$, aby každé volné pole nějaká věž ohrožovala, je 32.“

Ukažme si nyní, jak se úloha dala řešit bez využití této analogie.

[11] Konkrétně tak, že si na webu `http://mks.mff.cuni.cz` otevřeš Knihovnu a v ní najdeš seriál s názvem Geometrie. Nebo zkus vynikající článek `http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=382`.

První postřeh – v každé uspořádané trojici (a, b, c), kde $a, b, c \in \{1, \ldots, 8\}$, jsou jistě alespoň dvě z čísel a, b, c menší než 5 anebo větší než 4. Rozdělme tedy čísla 1 až 8 do dvou skupin: $P = \{1, 2, 3, 4\}$ a $Q = \{5, 6, 7, 8\}$.

Dále (podle *Jany Faltýnkové*) si představme, že máme pro každý kotouč jen dvě možnosti, a to písmena A a B. Celkem můžeme z těchto písmen vytvořit 8 různých uspořádaných trojic: AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB. Všimněme si nyní, že pokud vyzkoušíme dvě vhodné trojice, trezor na dva pokusy určitě otevřeme. Například kombinace AAB otevře krom sebe sama také AAA, ABB a BAB, stejně tak kombinace BBA otevře krom sebe sama také BBB, BAA, ABA. Vidíme tedy, že při volbě pokusů AAB a BBA už trezor jistě otevřeme. Na druhou stranu mezi těmito osmi možnými trojicemi neexistuje žádná, která by otevřela krom sebe více než tři další. Na jeden pokus tedy trezor jen tak neotevřeme. Trojmístnou kombinaci čísel A a B otevřeme nejdříve na druhý pokus.

Nyní se vraťme do reality a uvědomme si, že písmena A a B pro nás budou symbolizovat kterákoli z čísel 1 až 8. Máme trojice AAB a BBA, které nám zaručují dostatečný počet (vhodných) pokusů nutných pro otevření trezoru. Dosadíme-li nyní za A postupně všechna čísla ze skupiny P a v kombinaci s nimi za B postupně všechna čísla ze skupiny Q, trezor se podaří otevřít. Dvojici AB můžeme volit $4 \times 4 = 16$ způsoby, pro každou takovou dvojici zkusíme trezor otevřít kombinacemi AAB a BBA. Celkem tedy potřebujeme 32 pokusů.