Seriál – Kombinatorika I

Úvod

Tématem letošního seriálu bude kombinatorika. Ze začátku se bude spíš jednat o takové základní povídání o kombinatorice povětšinou spadající do středoškolského učiva. V pozdějších dílech seriálu se budeme věnovat i trochu pokročilejší kombinatorice.

Seriál bude z velké části zaměřen na řešení příkladů, proto ho budou doprovázet úlohy k řešení. Vyřešení těchto úloh není bezpodmínečně nutné k pochopení seriálu, nicméně když se je alespoň pokusíš řešit, získáš tím lepší představu o probíraném tématu.

Kombinatorice se budeme věnovat od úplných základů – aby seriál mohli sledovat i ti, kteří s kombinatorikou zcela začínají. Pravděpodobně nějaké základní pojmy už znáš – v takovém případě ti bude určitě stačit, když si text seriálu začneš číst od povídání o Pascalově trojúhelníku.

Základy kombinatoriky

Kombinatorika je matematická disciplína, jejíž cílem je, velmi zhruba řečeno, spočítat počet nějakých objektů, na něž jsou kladeny nějaké další podmínky. Velmi jednoduchý příklad z kombinatoriky může být spočítat počet modrých kuliček v sáčku, víme-li, že v sáčku je 5 tmavě modrých, 3 tmavě zelené, 4 světle modré a 6 světle zelených kuliček. Příkladem těžší úlohy může být třeba určit, kolika způsoby lze triangulovat[1] pravidelný n-úhelník na trojúhelníky nebo třeba také určit, kolik je různých alkanů (acyklických uhlovodíků bez dvojných vazeb) s n uhlíky.

Pravidlo součtu

Pravidlo součtu je velmi jednoduché kombinatorické pravidlo, které určitě intuitivně umíš používat. Jeho myšlenkou je, že když všechny možnosti, které chceme spočítat, umíme rozdělit do několika „nezávislých“ skupin, potom počet všech možností je roven součtu počtu možností v jednotlivých skupinách.

Pro intuitivní demonstraci tohoto pravidla se vraťme k příkladu s kuličkami v sáčku. Modré kuličky lze rozdělit do dvou „nezávislých“ skupin – a to na tmavě modré a světle modré. Tmavě modrých kuliček je 5, světle modré jsou 4, tedy počet modrých kuliček je $5 + 4 = 9$.

Matematická formulace pravidla součtu je následující:

Věta. (Pravidlo součtu.) *Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny takové, že žádné dvě nemají společný prvek. Potom počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven součtu počtů prvků množin $A_1, A_2, \dots, A_n$.*

Pro procvičení pravidla součtu si můžeš zkusit vyřešit následující úlohu:

Úloha 1. Na soustředění přijelo 18 účastníků (kluků), 21 účastníků či účastnic z ČR, 9 organizátorů (kluků), 3 účastníci či účastnice ze SR, 31 Čechů (kluků i holek), z toho 7 organizátorů (kluků) a jedna organizátorka Slovenka. Určete počet všech, co přijeli na soustředění.

Pravidlo součinu

I pravidlo součinu je jednoduché kombinatorické pravidlo, které intuitivně používáš. Jeho použití si prvně uvedeme na příkladu.

[1] Tzn. rozřezat na trojúhelníky, přičemž jsou povolené pouze řezy podél úhlopříček.

Stavebnice má tři různé tvary kostiček – tvar „L“, tvar „T“ a tvar „I“. Každá kostička může být zelená, modrá, červená, bílá nebo žlutá. Úkolem je určit počet různých typů kostiček. Řešení je nasnadě – jsou tři různé tvary kostiček a ke každému tvaru pět barev. Dohromady to je $3 \cdot 5 = 15$ různých typů kostiček.

Matematická formulace pravidla součinu je následující:

Věta. (Pravidlo součinu.) *Počet všech uspořádaných n-tic takových, že první složku můžeme vybrat k_1 způsoby, druhou složku můžeme vybrat k_2 způsoby, atd. až n. složku můžeme vybrat k_n způsoby, je $k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$.*

Vysvětlíme ještě souvislost s příkladem o stavebnici. Každá kostička je jednoznačně určena uspořádanou dvojicí (tvar, barva). Tudíž řešením přesně bylo spočítat počet těchto dvojic.

Úloha 2. Určete počet obarvení šachovnice $1 \times n$ pěti barvami tak, že žádné dvě sousední políčka nemají stejnou barvu.

Úloha 3. Určete počet posloupností délky n obsahujících jen nuly a jedničky takových, že prvních k cifer nejsou jenom nuly (pro $k \leq n$).

Permutační a kombinační čísla

Představme si, že chceme čísla 1, 2, ..., n v nějakém pořadí zapsat do posloupnosti (každé z čísel se v posloupnosti bude vyskytovat právě jednou) a ptáme se, kolika to lze udělat způsoby. Například pro $n = 3$ je šest možností, totiž možné posloupnosti jsou 123, 132, 213, 231, 312 a 321. Ukážeme si poměrně jednoduchý vzoreček pro obecné n. Zavedeme si číslo $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ a dokážeme, že počet možností je právě $n!$ (číslo $n!$ se čte jako n *faktoriál*). Tím, že máme k dispozici n prvků, máme n možností, jak zvolit první prvek posloupnosti. Když už máme zvolený první prvek, máme ze zbývajících prvků $n - 1$ možností, jak zvolit druhý prvek. Pro třetí prvek pak máme $n - 2$ možností, atd. Dohromady tedy máme $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ možností, jak zvolit všechny prvky posloupnosti (tady používáme pravidlo součinu). Trochu terminologie: Posloupnostem, v nichž se každé z čísel 1, 2, ..., n vyskytuje právě jednou, se říká *permutace množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Nyní si představme, že z čísel 1, 2, ..., n chceme utvořit nějakou k-prvkovou množinu, pro $k \leq n$; přitom nám nezáleží na pořadí prvků v množině. Opět se ptáme, kolika to jde způsoby. Například pro $n = 4$ a $k = 2$ je šest možností, a to $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$. Obecně dokážeme, že počet možností je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{(tentokrát čti } n \textit{ nad } k\text{).}$$

Podobně, jako když jsme počítali permutace, vyberme nejprve první prvek hledané množiny, potom druhý, atd. Takto získáme $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ možností. Nicméně v tomto postupu jsme každou množinu dostali $k!$-krát – totiž dostali jsme všechny její možné permutace prvků. Abychom tedy získali počet možných k-prvkových množin, musíme ještě výraz $n \cdot (n-1) \cdots (n - k + 1)$ vydělit $k!$. Všimni si, že pak už je výsledek roven *kombinačnímu číslu* $\binom{n}{k}$. O počtu k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny hovoříme jako o počtu *kombinací*.

Ve škole jsi se pravděpodobně setkal(a) ještě s variacemi, permutacemi s opakováním, variacemi s opakováním a kombinacemi s opakováním. Protože není cílem seriálu duplikovat středoškolské učivo, nebudeme jim věnovat pozornost – pro zbytek seriálu nebudou až tolik podstatné.

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

Na obrázku vidíš několik prvních řádků *Pascalova trojúhelníku*. Každé číslo (krom jedniček[2]) získáš jako součet dvou čísel, co jsou nad ním. Není těžké dokázat, například matematickou indukcí, že v řádku $n+1$ Pascalova trojúhelníku jsou právě čísla

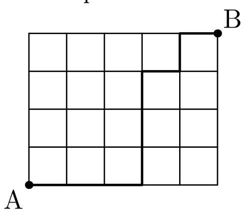
$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

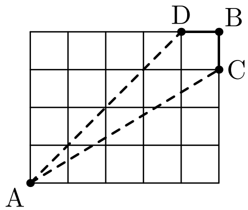
Úloha 4. Urči součet čísel v jednom řádku Pascalova trojúhelníku. Nápověda: Každé číslo má pod sebou právě 2 další čísla.

Úloha 5. Obarvěte lichá čísla v Pascalově trojúhelníku červeně a sudá modře. Všimněte si vzorku, který toto obarvení utvoří, a dokažte, že tímto vzorkem je obarvený celý Pascalův trojúhelník a ne jen jeho prvních několik řádků.

Procházky v sítích

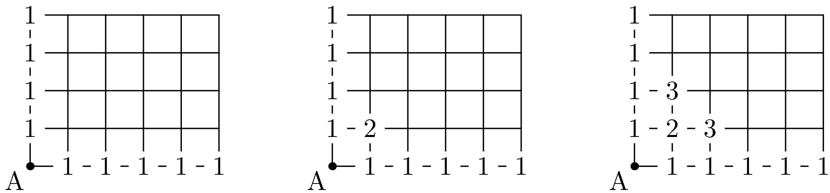
Řešme nyní následující úlohu: Máme síť z jednotkových čtverců ve tvaru obdélníku. A ptáme se, kolika cestami se lze dostat z levého dolního rohu A do pravého horního rohu B tak, že v každém kroku jdeme buď doprava nebo nahoru.





Na obrázku vlevo najdeš příklad sítě a příklad jedné z povolených cest. Když si ještě označíme C bod pod B a D bod nalevo od B (sleduj obrázek vpravo), můžeme všechny cesty vedoucí z A do B rozdělit do dvou skupin – na ty co vedou přes bod C a na ty co vedou přes bod D. Tedy počet cest vedoucích z A do B lze vyjádřit jako počet cest vedoucích z A do C plus počet cest vedoucích z A do D. Když si do tabulky začneme vpisovat počty cest vedoucích z A do ostatních políček, můžeme tyto počty postupně určit – sleduj obrázek.

[2]Nicméně každou jedničku krom té horní si můžeš představovat jako součet jedničky nad ní a nenapsané nuly.



Všimni si, že neděláme nic jiného, než že do sítě vpisujeme pootočený Pascalův trojúhelník. S tímto návodem si už snadno dokážeš, že pokud se vodorovná souřadnice A a B liší o k a svislá liší o l, potom počet cest z A do B je

$$\binom{k+l}{k} = \binom{k+l}{l}.$$

Výrazy s kombinačními čísly

Na závěr prvního dílu seriálu si ukážeme nějaké triky, jak zjednodušovat výrazy s kombinačními čísly.

Zjednodušování pomocí Pascalova trojúhelníku

Jeden z možných postupů, jak vyjádřit nějaký výraz je najít si jeho členy v Pascalově trojúhelníku a pak je nějak posčítat, poodečítat, čímž se výraz zjednoduší. Postup si demonstrujeme na následujícím příkladu:

Příklad. Zjednodušte výraz

$$\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \cdots + \binom{n+3}{n}.$$

Řešení. Zakroužkujme si jednotlivé členy výrazu v Pascalově trojúhelníku, přičemž si ještě uvědomme, že

$$\binom{3}{0} = 1 = \binom{4}{0}.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

V každém kroku můžeme dvě sousední kombinační čísla nahradit kombinačním číslem, které je pod těmito dvěma kombinačními čísly – viz obrázek. V posledním kroku nahrazujeme $\binom{n+3}{n-1}$ a $\binom{n+3}{n}$ za $\binom{n+4}{n}$. Tedy výsledný součet je $\binom{n+4}{n}$.

Počítání dvěma způsoby a kombinatorické interpretace výrazů

Dalším přístupem, kterým se v seriálu budeme zabývat, je takzvané počítání dvěma způsoby a kombinatorické interpretace výrazů. Hlavní myšlenkou je spočítat tentýž údaj (například velikost množiny) více způsoby, dostaneme pak například rovnost dvou výrazů, které na první pohled nevypadají, že by mohly mít něco společného. K tomu je velmi často vhodné najít nějakou kombinatorickou interpretaci zadaného výrazu, jehož hodnotu chceme určit. Postup si ukážeme na následujícím příkladu:

Příklad. Určete hodnotu výrazu

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n}.$$

Řešení. V Kocourkově si obecní zastupitelstvo volí radu (s alespoň jedním radním). Navíc jeden z radních bude zvolen starostou a jeden z radních bude zvolen finančníkem (může a nemusí to být tentýž radní). Zastupitelů je n. Spočítejme, kolik je možností, jak zvolit radu, starostu a finančníka.

I. způsob: Povězme, že k zastupitelů bude zvoleno radními, ty můžeme vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Potom ještě zbývá vybrat starostu a finančníka, pro které máme k^2 možností. Dohromady to je tedy $k^2\binom{n}{k}$ možností, jak vybrat k radních a mezi nimi starostu a finančníka. Uvážíme-li všechna přípustná k, dostáváme tak

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n}$$

možností, jak může volba dopadnout.

II. způsob: Nejprve zvolíme starostu a finančníka.

První situace je, že to bude tentýž zastupitel, toho můžeme vybrat n způsoby, ten podle předpokladů úlohy musí být už i nutně radním. U zbylých $n-1$ zastupitelů máme vždy 2 možnosti, jak se rozhodnout (buď budou radními nebo nebudou). Dohromady je to $n2^{n-1}$ možností.

Druhá situace je, že starostou a finančníkem budou různí zastupitelé. Prvního můžeme vybrat n způsoby, pro druhého zbývá $n-1$ způsobů, tito dva jsou už automaticky radními. U zbylých $n-2$ zastupitelů máme opět 2 možnosti, jak se rozhodnout (buď budou radními nebo nebudou). Dohromady je to $n(n-1)2^{n-2}$ možností. Spojíme-li první a druhou situaci, dostáváme

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

možností, jak může volba dopadnout.

Vzhledem k tomu, že jsme počítali tentýž údaj, musí si být výrazy získané počítáním I. i II. způsobem rovny. Příklad je tedy vyřešen,

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Úloha 6. Dokažte, že pro libovolné přirozené n platí

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$$

Nezalekni se zápisu se třemi tečkami – obě sumy jsou konečné, jedna má poslední člen $\binom{n}{n-1}$ a druhá $\binom{n}{n}$. Přitom, které z těchto dvou čísel patří do které sumy závisí na tom, zda je n sudé nebo liché.

Úloha 7. Dokažte, že pro libovolná přirozená m, n, $m \leq n$, platí

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{2n}{m}.$$

Úloha 8. Zobecněte předchozí úlohu.

Úloha 9. Dokažte binomickou větu, tj. tvrzení, že pro libovolná a, b reálná a n přirozené platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Seriál – Kombinatorika II

Úvod

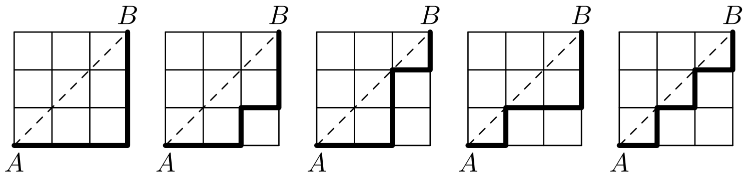
V druhém dílu seriálu se nejprve setkáš s další obdobou procházek v sítích a s Catalanovými čísly. Dále se dozvíš něco o principu inkluze a exkluze – nástroji na počítání velikosti sjednocení množin pomocí velikostí průniků některých z nich. Nakonec si ještě ukážeme nějaké další počítání dvěma způsoby, a to jednak pomocí principu inkkluze a exkluze a jednak triková řešení dvou těžších úloh.

Procházky v sítích II a Catalanova čísla

Procházky pod diagonálou

V minulém dílu seriálu jsme řešili úlohu: Máme síť z jednotkových čtverců ve tvaru obdélníku. A ptáme se, kolika cestami se lze dostat z levého dolního rohu A do pravého horního rohu B tak, že v každém kroku jdeme buď doprava nebo nahoru.

Nyní se zaměříme na následující modifikaci: Síť je tvaru čtverce $n \times n$, a celá cesta musí vést pod diagonálou (maximálně se ji může dotýkat). Například pro $n = 3$ je 5 možných cest, viz obrázek.

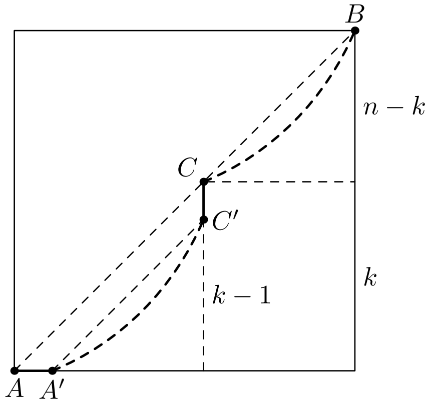


V závislosti na n si označíme c_n počet takových cest. Toto označení (pro pohodlnost dalšímu zápisu) ještě rozšíříme na $c_0 = 1$ (můžeme mít představu, že ve čtverci o nulových rozměrech body A a B splývají a existuje mezi nimi jediná cesta (nulové délky)).

Naším cílem bude odvodit rekurentní vztah

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0. \qquad (\heartsuit)$$

Mějme cestu vedoucí z bodu A do bodu B. Označme C takový bod různý od A, kde se cesta poprvé dotýká diagonály (může se i stát, že $C = B$). Označme ještě A' levého souseda A a C' dolního souseda C. Sleduj obrázek.



Tím, že C je první bod, kde se cesta dotýká diagonály, je úsek cesty mezi A' a C' celý pod diagonálou $A'C'$ (dotýkat se může). Dále, celý úsek cesty mezi C a B je pod diagonálou CB (opět se může dotýkat). Počet cest pod diagonálou AB, které mají C jako první bod dotyku, je tedy roven součinu počtů cest pod diagonálou $A'C'$ a pod diagonálou CB (pravidlo součinu). Předpokládejme, že bod C má souřadnice $[k, k]$. Potom počet cest pod diagonálou $A'C'$ je c_{k-1} a pod diagonálou CB je c_{n-k}. Dohromady to je tedy $c_{k-1}c_{n-k}$. Všimni si, že tyto počty fungují, i když je C nejbližší možný bod k A nebo $C = B$. Sečteme-li tyto výrazy pro všechny možné polohy bodu C, dostaneme přesně počet všech možných cest pod diagonálou AB. Tedy dostáváme vztah (♡).

Catalanova čísla

Catalanova čísla jsou přesně čísla c_n z předchozího povídání. Tj. jsou to čísla, která splňují $c_0 = 1$ a dále jsou definována rekurentně vztahem (♡). Mají, však i jiná vyjádření, platí například, že

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \qquad (\diamondsuit)$$

Úloha 10. Dokažte, že

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Úloha 11. Z vyjádření $c_{n+1} = f(n)c_n$ určete $f(n)$.

Vztah (♢) nebudeme dokazovat, nicméně ho můžeš používat při řešení úloh.

Není těžké dopočítat prvních několik Catalanových čísel: 1, 1, 2, 5, 14, 42, … Naopak, tato čísla jsou dosti specifický indikátor Catalanových čísel. Objevíš-li při řešení nějaké úlohy tato čísla (třeba prozkoušením malých případů), potom je velká šance, že řešením úlohy jsou právě Catalanova čísla. Pak už zbývá úlohu dokázat, k čemuž často bývá nápomocný vztah (♡).

Catalanova čísla se objevují při řešení mnoha dalších kombinatorických úloh. Uveďme si tu některé:

Úloha 12. Dokažte, že c_n udává počet korektních uzávorkování n levých a n pravých závorek. Příklad pro $n = 3$:

((())) (())() (()()) ()(()) ()()()

Úloha 13. Dokažte, že c_n je počet způsobů, jak rozřezat pravidelný $(n+2)$-úhelník na trojúhelníky (s vrcholy ve vrcholech $(n+2)$-úhelníku).

Úloha 14. Určete počet procházek ve čtvercové síti o rozměrech $n \times n$ z levého dolního rohu A do pravého horního rohu B, které vedou pouze doprava a nahoru takových, že mají právě jeden bod na diagonále AB (nepočítaje A a B).

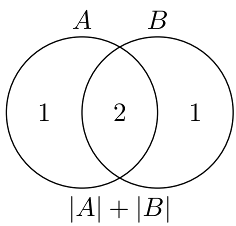
Princip inkluze a exkluze

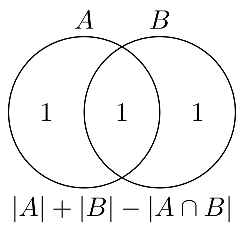
Malé příklady

V dalším textu budeme používat značení: Je-li X konečná množina, potom $|X|$ značí počet jejích prvků.

Mějme dvě konečné množiny A a B a předpokládejme, že známe $|A|$, $|B|$ a $|A \cap B|$. Naším úkolem bude určit $|A \cup B|$. Lze zvolit poměrně jednoduchý přístup. Nejprve spočítejme $|A|+|B|$. Takto jsme z $A \cup B$ započítali prvky $A \cap B$ dvakrát a ostatní prvky jednou (viz obrázek). Odečteme-li ještě $|A \cap B|$, započítáme tím každý prvek $|A \cup B|$ právě jednou. Tedy dostáváme vzoreček

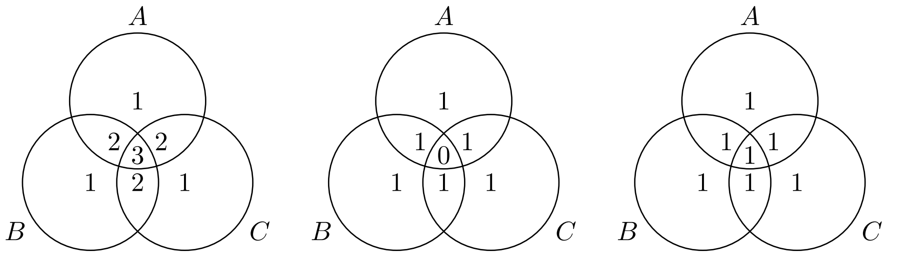
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (\spadesuit_2)$$





Řešme podobnou úlohu pro tři množiny A, B a C. Tentokrát předpokládejme, že známe $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ a $|A \cap B \cap C|$, a snažme se zjistit $|A \cup B \cup C|$. Postupujme podobným způsobem jako v předchozím případě (sleduj následující obrázek). Spočítejme nejprve $|A|+|B|+|C|$, tak jsme prvky, co jsou právě ve dvou z množin A, B, C, započítali dvakrát, prvky $|A \cup B \cup C|$ jsme započítali třikrát a ostatní prvky jednou. Když odečteme $|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|$, máme všechny prvky krom prvků $A \cap B \cap C$ započítány právě jednou, prvky z $A \cap B \cap C$ nemáme započítány vůbec, zbývá tedy přičíst $|A \cap B \cap C|$, čímž dostáváme vzoreček

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (\spadesuit_3)$$



$|A| + |B| + |C|$ $\qquad$ $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ $\qquad$ $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Obecný případ

V obecném případě platí následující věta.

Věta. (Princip inkluze a exkluze.) *Nechť $n \in N$ a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom platí*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}|.$$

Předchozí zápis principu inkluze a exkluze je poměrně krátký díky zápisu pomocí dvou sum. Protože je možné, že neumíš tak dobře pracovat se sumami, zapíšeme si princip inkluze a exkluze ještě v trochu jiném značení. Označíme

$$\begin{aligned} s_k = {} & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_n| + \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2} \cap A_k \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_{n-(k-1)} \cap A_{n-(k-2)} \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Slovy: s_n je součet velikostí všech možných průniků k množin z $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Potom se dá princip inkluze a exkluze zapsat jako

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + (-1)^{n+1} s_n. \qquad (\spadesuit)$$

Důkaz principu inkluze a exkluze provádět nebudeme. Není vyloženě těžký, nicméně je trochu technický. Pro naše účely bude zajímavější použití principu inkluze a exkluze.

Aplikace principu inkluze a exkluze

Princip inkluze a exkluze je na první pohled šílený vzoreček, u kterého není vůbec jasné, že by se mohl k něčemu hodit (vyjadřuje jedno sjednocení pomocí opravdu velkého množství průniků). Jeho význam spočívá ale v tom, že často v konkrétních situacích lze snadno vyjádřit velikost průniku několika množin, ale je těžké vyjádřit velikost sjednocení. Užitečnost principu inkluze a exkluze si ukážeme na následujících příkladech:

Příklad. Určete počet způsobů, jak obarvit vrcholy pravidelného devítiúhelníku $A_1 A_2 \cdots A_9$ (3 modře, 3 červeně a 3 zeleně) tak, že se v obarvení vyskytuje alespoň jedna trojice stejnobarevných sousedních vrcholů.

Řešení. Nechť M je množina obarvení takových, že se v nich vyskytuje trojice sousedních modrých vrcholů. Podobně jsou definovány množiny C a Z. Naším cílem je spočítat $|M \cup C \cup Z|$. K tomu využijeme vzoreček ($\spadesuit_3$).

Nejprve spočítáme $|M|$. V každém obarvení obsahujícím tři sousední modré vrcholy je pozice modrých vrcholů jednoznačně určena například prostředním vrcholem. Tedy je 9 možných pozic tří modrých vrcholů. Máme-li už umístěny modré vrcholy, je $\binom{6}{3} = 20$ možností, jak vybrat, které vrcholy budou červené, a zbývající vrcholy musejí být zelené. Dohromady je tedy $9 \cdot 20 = 180$ možností (pravidlo součinu). Podobně $|C| = |Z| = 180$.

Dále spočítáme $|M \cap C|$. Prvně si uvědomme, jak množina $M \cap C$ ve skutečnosti vypadá. Je to množina všech obarvení devítiúhelníku takových, že se v nich vyskytují tři sousední modré vrcholy i tři sousední červené vrcholy. Opět je 9 možností, jak umístit tři modré vrcholy. Jsou-li tři modré vrcholy umístěny, jsou 4 možnosti, jak umístit prostřední vrchol červených vrcholů (prostřední vrchol nemůže sousedit s úsekem modrých vrcholů). Zbylé vrcholy jsou zelené. Dostáváme tedy $|M \cap C| = 9 \cdot 4 = 36$. Podobně $|M \cap Z| = 36$ $|C \cap Z| = 36$.

Nakonec spočítejme $|M \cap C \cap Z|$. Je devět možností, jak umístit modré body. A potom jsou dvě možnosti, jak rozdělit červené a zelené body (buď úsek červených bodů sousedí s modrými po směru hodinových ručiček, nebo proti směru). Dohromady $|M \cap C \cap Z| = 9 \cdot 2 = 18$.

Využijeme-li nyní vzorečku ($\spadesuit_3$), dostáváme

$$|M \cup C \cup Z| = 180 + 180 + 180 - 36 - 36 - 36 + 18 = 450.$$

Příklad. Určete počet možných posloupností (tj. permutací) písmen A, D, H, K, O, V, ve kterých se nevyskytuje ani slovo VODA, ani slovo HOD jako podslovo. Slovo HOD se například vyskytuje v posloupnosti KHAVOD, protože ho dostaneme, když vyškrtáme písmenka K, A a V.

Řešení. Budeme počítat počet posloupností, ve kterých se vyskytuje VODA nebo HOD, toto číslo pak odečteme od počtu všech posloupností.

Označme A_{VODA} množinu posloupností, ve kterých se vyskytuje VODA, a A_{HOD} množinu posloupností, ve kterých se vyskytuje HOD. Chceme tedy spočítat $|A_{\text{VODA}} \cup A_{\text{HOD}}|$. K tomu využijeme vzorec ($\spadesuit_2$).

Nejprve spočítáme $|A_{\text{VODA}}|$. Pro posloupnost z A_{VODA} je jasné, v jakém pořadí se vyskytují písmena A, D, O a V. Mezi tato písmena pak lze přidat H pěti způsoby a následně K šesti způsoby. Dostáváme tedy, že $|A_{\text{VODA}}| = 5 \cdot 6 = 30$. Podobně $|A_{\text{HOD}}| = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Nyní spočítáme $|A_{\text{VODA}} \cap A_{\text{HOD}}|$. Jedná se o posloupnosti, ve kterých se vyskytuje VODA i HOD. Je dáno pořadí písmen O, D a A. Navíc písmena V a H musejí být před O. Dostáváme tedy 2 možnosti, jak můžou být uspořádána A, D, H, O a V (buď je V před H nebo naopak). Potom máme ještě šest možností, jak může být umístěno K. Dohromady tedy $|A_{\text{VODA}} \cap A_{\text{HOD}}| = 2 \cdot 6 = 12$.

Podle ($\spadesuit_2$) pak dostáváme

$$|A_{\text{VODA}} \cup A_{\text{HOD}}| = 30 + 120 - 12 = 138.$$

Když se vrátíme k původní úloze. Počet všech posloupností (bez nějakých podmínek) je $6! = 720$. Tedy odpověď na zadání úlohy je $720 - 138 = 582$.

Úloha 15. Určete počet čísel mezi čísly $1, 2, \ldots, 900$, která mají ve svém prvočíselném rozkladu alespoň jedno z prvočísel 2, 3, 5 či 7 (v libovolné mocnině).

Počítání dvěma způsoby II

V této části seriálu si ještě uvedeme nějaké další počítání dvěma způsoby - abychom viděli, jaké lze provádět různé triky.

Využití principu inkluze a exkluze

Využití principu inkluze a exkluze si demonstrujeme na následujícím příkladu.

Příklad. V závislosti na přirozeném $n \geq 2$ určete hodnotu součtu

$$(n-1)\binom{n}{1} - (n-2)\binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} 2\binom{n}{n-2} + (-1)^n \binom{n}{n-1}.$$

Řešení. Mějme pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ množiny $A_i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$, tj. A_i obsahuje všechna čísla od 1 do n krom prvku i. Spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Budeme se držet značení ve vztahu (♠). Snažme se spočítat s_k. Vezmeme-li průnik k množin $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}$, dostaneme množinu, která obsahuje všechny prvky 1, 2, ... , n krom prvků i_1, i_2, ... , i_k, tedy

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}| = (n-k).$$

Zbývá si rozmyslet, kolik je takových sčítanců ve vyjádření s_k. Je jich přesně tolik, kolik je k-prvkových podmnožin $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ n-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots n\}$, tedy $\binom{n}{k}$. Dostáváme tedy

$$s_k = (n-k)\binom{n}{k}.$$

Aplikujeme-li vzorec (♠), dostaneme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = (n-1)\binom{n}{1} - (n-2)\binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} 2\binom{n}{n-2} + (-1)^n \binom{n}{n-1}.$$

Na druhou stranu ale $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, tedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = n.$$

Odtud už plyne, že výraz v zadání úlohy je roven n.

Obecná poučka je následující: Ve chvíli, kdy narazíte na nějaký výraz, v němž se střídají znaménka, zkuste se zamyslet nad tím, jestli k jeho spočítání nelze využít princip inkluze a exkluze (obzvláště ještě, když se ve výrazu vyskytují kombinační čísla).

Úloha 16. Vyřešte úlohu 6 z předchozího dílu seriálu pomocí principu inkluze a exkluze. Nápověda: zvolte $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \{1\}$.

Úloha 17. (těžká) Pro přirozená n a k určete hodnotu výrazu

$$\binom{n}{0}(n+k)^n - \binom{n}{1}(n+k-1)^n + \binom{n}{2}(n+k-2)^n + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n.$$

Fígle

V této části si ještě vyřešíme dva těžší příklady. Cílem je ukázat, jaké ještě fígle se při řešení dají provádět. Pro pochopení seriálu není nutné, abys řešení těchto dvou úloh četl(a).

Příklad. Pro přirozená s a t spočtěte

$$\sum_{j=0}^{t}\binom{s+j}{j}2^{t-j}+\sum_{j=0}^{s}\binom{t+j}{j}2^{s-j}.$$

Předtím, než začneš číst řešení úlohy, doporučuji ji zkusit nějakou dobu řešit. Není to úplně nutné, ale pokud úlohu zkusíš chvíli řešit, snadněji pak pronikneš do autorského řešení.

Řešení. Vyzkoušením malých hodnot s a t nás napadne dokazovat, že hodnota výrazu je rovna 2^{s+t+1}.

Mějme množinu $\{1,2,\dots,s+t+1\}$ a každý její prvek obarvujme červeně nebo modře. Počet obarvení je jistě 2^{s+t+1}. Spočteme tento počet ještě druhým způsobem.

Interpretujeme nejdříve výraz

$$V=\sum_{j=0}^{t}\binom{s+j}{j}2^{t-j}=\sum_{j=0}^{t}\binom{s+j}{s}2^{t-j}.$$

Předpokládejme, že máme obarvení obsahující alespoň $s+1$ červených prvků. Označme $(s+1)$. červený prvek jako v. Dále zvolme j tak, aby $s+j+1=v$, a toto j považujme chvíli za pevné. V množině $\{1,2,\dots,v-1\}=\{1,2,\dots,s+j\}$ je s červeně obarvených prvků, tyto prvky je možné vybrat $\binom{s+j}{s}$ způsoby. V množině $\{v+1,\cdots,s+t+1\}$ může být každý prvek červený, nebo modrý a vzhledem k tomu, že tato množina má $t-j$ prvků, lze její obarvení vybrat 2^{t-j} způsoby. Výraz $\binom{s+j}{s}2^{t-j}$ tedy určuje počet obarvení takových, že $(s+1)$. červený prvek je prvek $v=s+j+1$. Sečteme-li tyto výrazy pro všechna možná v, dostáváme, že námi určovaný výraz V má kombinatorickou interpretaci jako počet obarvení množiny $\{1,2,\dots,s+t+1\}$ obsahujících alespoň $s+1$ červených prvků.

Podobně lze výraz

$$W=\sum_{j=0}^{s}\binom{t+j}{j}2^{s-j}=\sum_{j=0}^{s}\binom{t+j}{t}2^{s-j}$$

interpretovat jako počet obarvení množiny $\{1,2,\dots,s+t+1\}$, která obsahují alespoň $t+1$ (tentokrát!) modrých prvků. Jenže obarvení, která obsahují alespoň $t+1$ modrých prvků, jsou přesně ta, která obsahují nejvýše $s=t+s+1-(t+1)$ červených prvků.

Sečteme-li V a W, dostáváme tak počet všech obarvení, což jsme chtěli dokázat.

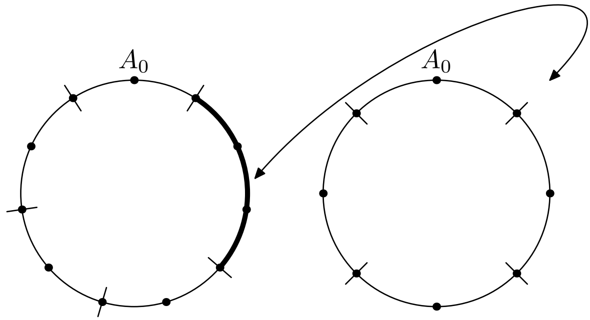
Příklad. Nechť je dáno $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$ a dále nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro $n\geq 4$ rekurentní vztah

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-3}.$$

Dokažte, že pro každé prvočíslo p je číslo a_p dělitelné p.

Tato úloha na první pohled nevypadá, že by měla s kombinatorikou něco společného. Přesto si ukážeme hezké kombinatorické řešení. Před čtením řešení opět doporučuji si nejprve s úlohou trochu pohrát.

Řešení. Uvažujme kružnici rozdělenou body $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ na n stejných částí. Naším cílem bude počítat počet rozdělení kružnice na oblouky délky 2 nebo 3 s vrcholy $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ (celou kružnici, je-li n rovné 2 nebo 3, považujme také za oblouk). Takovéto dělení nazveme *vhodné n dělení.* Označme b_n počet vhodných n dělení. Zřejmě $b_1=0$, $b_2=2$,$b_3=3$ (když počítáme b_2 a b_3, je důležité, kde oblouk začíná). Naším cílem bude dokázat, že $b_n = b_{n-2} + b_{n-3}$, čímž dokážeme, že $b_n = a_n$. Abychom dokázali, že $b_n = b_{n-2} + b_{n-3}$, přiřadíme (pro $n \geq 4$) jednoznačně každému vhodnému n dělení jedno $(n-2)$ dělení, nebo jedno $(n-3)$ dělení, viz obrázek.



Nechť o je oblouk, který celý následuje co nejblíže za bodem A_0 ve směru hodinových ručiček, tento oblouk stáhneme a dostaneme vhodné $(n-2)$ dělení nebo $(n-3)$ dělení - podle toho, jakou měl oblouk délku. Naopak, máme-li vhodné $(n-2)$ dělení nebo $(n-3)$ dělení, doplňme do nejbližšího dělícího bodu oblouk délky 2 nebo 3, čímž získáme vhodné n dělení. To znamená, že přiřazení je jednoznačné, a tedy $a_n = b_n$.

Zbývá ukázat, že je-li p prvočíslo, potom počet vhodných p dělení je dělitelný p. Za tímto účelem si vhodná dělení rozdělíme do několika skupin a ukážeme, že každá skupina má p prvků. Dvě vhodná dělení dáme do stejné skupiny, pokud lze jedno získat otočením druhého. Máme p možných otočení, tedy pokud ukážeme, že žádné otočení nedává dvě stejná dělení, znamená to, že každá skupina obsahuje p prvků. Pro spor předpokládejme, že existuje dělení D a úhel $\alpha = \frac{k}{p}360^\circ$ (kde $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$), že se D otočením o α nezmění. Potom se ale nemění ani otočením o 2α, 3α, … , $(p-1)\alpha$. Protože p je prvočíslo, jeden z těchto násobků ve skutečnosti odpovídá otočení o $\frac{1}{p}360^\circ$ (to je známá vlastnost prvočísel, do které v tomto textu nebudeme zabíhat). Nicméně otočením o tento úhel se dělení musí změnit, protože každý oblouk má délku alespoň 2.

Řešení (některých) úloh předchozího dílu seriálu

Řešení úlohy 1. Nejprve spočítáme počet všech účastníků a účastnic dohromady. Ze zadání plyne, že jich je 21 z ČR a 3 ze SR, dohromady tedy 24. Nyní budeme chtít spočítat počet všech organizátorů či organizátorek. Je mezi nimi 9 kluků. Dále víme, že je 31 Čechů (kluků i holek), přitom 21 z nich jsou účastnící či účastnice a 7 z nich jsou kluci organizátoři, tedy zbývají 3 organizátorky. A jedna organizátorka je ze SR. Dohromady to dává 13 organizátorů či organizátorek, a počet všech je tedy 37.

Řešení úlohy 2. První políčko můžeme obarvit 5 barvami. Druhé potom můžeme obarvit už jen 4 barvami (nemůže mít stejnou barvu jako první). Třetí také čtyřmi barvami (nemůže mít stejnou barvu jako druhé). A tak dále, až poslední opět čtyřmi barvami. Dohromady je počet obarvení $5 \cdot 4^{n-1}$ podle pravidla součinu.

Řešení úlohy 3. Prvních k cifer můžeme vybrat $2^k - 1$ způsoby (totiž všech posloupností na prvních k cifrách je 2^k – každá cifra může být vybrána dvěma způsoby, ale musíme odečíst 1 za posloupnost samých nul). Zbylých $n-k$ cifer lze vybrat 2^{n-k} způsoby. Dohromady je tedy počet způsobů $(2^k-1)(2^{n-k})$.

Řešení úlohy 4.
I. Řešení: Jak už je napsáno v nápovědě, číslo $\binom{n}{k}$ (pro $k \neq 0, n$) je součet $\binom{n-1}{k-1}$ a $\binom{n-1}{k}$. Navíc $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$ a $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$. Sčítáme-li tedy $(n+1)$. řádek Pascalova trojúhelníku a použijeme-li předchozí vztahy, dostaneme, že je tento součet roven dvakrát součtu n. řádku. Odtud už není těžké indukcí dokázat, že součet $(n+1)$. řádku,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n},$$

je roven 2^n.
II. Řešení: Použijeme-li binomickou větu (úloha 9) pro $(1+1)^n$ dostáváme přesně

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

III. Řešení: Počítejme počet podmnožin n-prvkové množiny. Těch je 2^n. Jiný způsob, jak se k tomuto počtu dostat je počítat jednotlivě pro všechna k počet k-prvkových podmnožin – těch je $\binom{n}{k}$. Počítáme-li pro všechna k, dostáváme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Řešení úlohy 5 vynecháme. Důvod je bohužel takový, že je technicky náročné na kreslení obrázků, a tudíž ho nestíhám napsat před odesíláním komentářů. Za to se omlouvám.

Řešení úlohy 6.
I. Řešení: Je analogické prvnímu řešení úlohy 4.
II. Řešení: Je analogické druhému řešení úlohy 4 - binomická věta se použije pro $(1+(-1))^n$.
III. Řešení: Na levé straně rovnosti je počet podmnožin liché velikosti n-prvkové množiny A. Na pravé straně je počet podmnožin sudé velikosti množiny A. Vyberme si pevně jeden prvek $a \in A$. Máme-li $B \subset A$, přiřaďme jí množinu $B \cup \{a\}$, pokud B neobsahuje a, nebo jí přiřaďme $B \setminus \{a\}$, pokud B obsahuje a. Tímto způsobem převádíme podmnožiny sudé velikosti na podmnožiny liché velikosti a naopak. To ukazuje, že počet podmnožin sudé velikosti a počet podmnožin liché velikosti jsou si rovny.

Řešení úlohy 7. V zadání se bohužel vyskytla chyba (snad snadno opravitelná). Totiž správné zadání má být:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{2n}{m}.$$

Úlohu vyřešíme počítáním dvěma způsoby. Šachový kroužek navštěvuje n chlapců a n děvčat, na turnaj se má vybrat m z nich. Spočtěme, kolik je možností.
I. způsob: Možností je $\binom{2n}{m}$.
II. způsob: Vybere se k chlapců $n-k$ děvčat, pro nějaké $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. To lze udělat $\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}$ způsoby. Sečteme-li tento výraz pro všechna možná k, dostáváme

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k}.$$

Tím je úloha vyřešena – hodnoty spočítané prvním a druhým způsobem si musí být rovny.

Řešení úlohy 8. Bude-li, podle řešení předchozí úlohy, n chlapců a r děvčat, dostáváme pro $m \leq n, r$:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{r}{m-k} = \binom{n+r}{m}.$$

Pravděpodobně existují i jiná zobecnění.

Řešení úlohy 9.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n}.$$

Když tento výraz roznásobíme, znamená to, že v každé závorce vybereme a nebo b, takto vybrané prvky vynásobíme a výsledky sečteme přes všechny možné výběry. Kolikrát můžeme dostat výraz $a^i b^{n-i}$? Musíme právě v i případech vybrat a (a ve zbylých $(n-i)$ případech už vyjde b). To můžeme udělat $\binom{n}{i}$ způsoby. Odtud už dostáváme znění binomické věty.

Kombinatorika III

Úvod

Poslední díl seriálu se bude věnovat vytvořujícím funkcím. Tento díl je z velké části inspirován knihou Kapitoly z diskrétní matematiky od Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila. Přeji, ať se ti líbí i poslední díl seriálu.

Vytvořující funkce

Náplní této části seriálu bude ukázat si takzvanou metodu vytvořujících funkcí pro řešení rozličných kombinatorických úloh. Jedná se o metodu, která je hlavně početní (a tedy občas trochu technicky náročná), v mnoha příkladech lze tuto metodu obejít nějakým trikem; na druhou stranu tato metoda může být velmi užitečná, pokud nás zrovna žádný trik nenapadne.

Upozorněme ještě, že pokud bychom chtěli metodu vytvořujících funkcí dělat zcela pořádně, museli bychom pořádně probrat jisté partie vysokoškolské matematiky (matematické analýzy, komplexní analýzy) – z tohoto důvodu si sem tam něco pouze zmíníme, aniž bychom zacházeli do detailů.

Definice vytvořující funkce

Metoda vytvořujících funkcí spočívá v tom, že najdeme recept, jak převádět některé funkce na posloupnosti a naopak. Když využíváme toho, že v některých situacích se snáze pracuje s funkcemi a v některých situacích se snáze pracuje s posloupnostmi, umožní nám tato metoda objevit nečekané souvislosti.

Definice. *Mějme posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. Přiřaďme této posloupnosti funkci*

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Funkce F se pak nazývá vytvořující funkce[3] *posloupnosti* $(a_i)_{i=0}^{\infty}$.

Konečné a nekonečné součty

Drobný problém v předchozí definici je v tom, že není jasné, co je to nekonečný součet. Pokud je posloupnost v definici od jistého členu nulová, tj., je tvaru $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, potom její vytvořující funkce je $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, jedná se tedy o polynom a nemáme žádné problémy s nekonečnými součty. Nicméně se nám bude hodit umět pracovat i s vytvořujícími funkcemi posloupností s nekonečně mnoha nenulovými členy. Náš základní přístup bude takový, že s těmito součty budeme pracovat stejně, jako kdyby se jednalo o součty konečné (tj. budeme je přirozeným způsobem sčítat, násobit, ...).

První aplikace – zatím ne moc přesvědčivá

Abychom dostali alespoň trochu představu o tom, jak vytvořující funkce souvisejí s kombinatorikou, uveďme si jeden příklad. Rozhodně se nejedná o příklad, který by použití vytvořujících funkcí vyžadoval – na druhou stranu jeho výhoda je v tom, že je jednoduchý na pochopení.

Příklad. Mějme dvě krabičky s lístečky s čísly. V první krabičce jsou sudá čísla mezi 1 a 10, v druhé krabičce jsou prvočísla mezi 1 a 10. Ptejme se, kolika způsoby lze vybrat jeden lísteček z každé krabičky tak, že součet čísel na těchto lístečcích je 11.

Řešení. Přiřaďme každé krabičce polynom v proměnné x, v němž se (s koeficienty 1) vyskytují právě ty mocniny x^k, že lísteček s číslem k patří do příslušné krabičky. Tj., první krabičce přiřadíme polynom

$$P_1(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8,$$

druhé krabičce

$$P_2(x) = x^2 + x^3 + x^5 + x^7.$$

Co se stane, když tyto polynomy vynásobíme? Podívejme se na koeficient u x^{11}. Ten získáme tak, že vezmeme nějaká x^{k_1} v polynomu $P_1(x)$ a x^{k_2} v polynomu $P_2(x)$ taková, že $k_1 + k_2 = 11$ (tedy $x^{k_1} x^{k_2} = x^{11}$), a za každou takovou dvojici se koeficient u x^{11} zvýší o 1. To ale znamená, že koeficient u x^{11} v $P_1(x)P_2(x)$ je přesně roven počtu způsobů, jak vybrat lístečky z první a druhé krabičky (s čísly k_1 a k_2) tak, aby součet těchto čísel byl 11.

Konkrétně

$$P_1(x)P_2(x) = x^4 + x^5 + x^6 + 2x^7 + x^8 + 3x^9 + x^{10} + 3x^{11} + x^{12} + 3x^{13} + 2x^{15} + x^{17}.$$

Tedy odpověď na otázku v úloze je 3.

Samozřejmě, toto řešení je zbytečně složité, protože v tomto případě vynásobit dané polynomy je o kus těžší, než vyřešit úlohu elementárně. Jeho jediným cílem bylo dát do souvislosti násobení polynomů a počítání možností – pochopení této souvislosti je klíčové pro pochopení významu vytvořujících funkcí. Časem si ukážeme situaci, kdy bude jednodušší násobit než řešit úlohu elementárně.

---

[3] Mně osobně termín vytvořující funkce nezní moc dobře – raději bych používal například termín „funkce vytvořená posloupností“, nicméně se v tomto textu budu snažit dodržovat termín, který se již používá.

Geometrická řada

Na střední škole ses pravděpodobně už setkal(a) s konečnou geometrickou řadou

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

a víš, že tento součet je roven (pro $x \neq 0$)

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{G}$$

Pokud náhodou geometrickou řadu neznáš, lze vztah (G) jednoduše dokázat tak, že

$$(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = (1-x) + x(1-x) + \cdots + x^n(1-x) =$$

$$= 1 + (-x + x) + (-x^2 + x^2) + \cdots + (-x^n + x^n) - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}.$$

Naším dalším cílem bude sečíst[4] nekonečnou geometrickou řadu

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

Bez nějakého většího vysvětlování zmíníme, že tento součet má význam jenom v případě, kdy $|x| < 1$ (můžeš si zkusit rozmyslet proč asi).

Předpokládejme, že tento součet existuje a označme ho S, tedy

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots = 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + Sx,$$

odtud už snadno odvodíme, že $S = \frac{1}{1-x}$, tj.

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}. \tag{G_∞}$$

Všimni si, že takto jsme spočítali naši první vytvořující funkci od nekonečné posloupnosti. Vztah (G_∞) totiž říká, že vytvořující funkce posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ je funkce $\frac{1}{1-x}$.

Operace s vytvořujícími funkcemi

Zatím známe vytvořující funkci jenom jedné nekonečné posloupnosti. Nyní si ukážeme několik operací, které nám dovolí určit vytvořující funkce mnoha dalších posloupností.

Násobení reálným číslem (O1). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$ a t reálné. Potom funkce $tf(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(ta_0, ta_1, \dots)$.

Sčítání (O2). Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou po řadě vytvořujícími funkcemi posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$. Potom $f(x) + g(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$.

---

[4] Ještě jednou připomeňme, že jsme si neřekli, co onen nekonečný součet je, a tedy s nekonečným součtem budeme pracovat pouze intuitivně (a z pohledu matematické analýzy bychom museli ještě leccos vysvětlit, aby naše úpravy byly zcela korektní).

Posouvání posloupnosti doprava (O3). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Potom $x^n f(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, \dots)$.

Posouvání posloupnosti doleva (O4). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Tentokrát si ji už pro názornost rozepišme, tj.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Potom

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \cdots ,$$

dostáváme tedy, že $\frac{f(x)-a_0-a_1x-\cdots a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n, a_{n+1}, \dots)$.

Dosazení x^n za x (O5). Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Co se stane, když za x dosadíme x^n? Dostaneme

$$f(x^n) = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \cdots .$$

Tedy že $f(x^n)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, \underbrace{0, 0, \dots 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$.

Dosazení tx za x (O6).Mějme funkci $f(x)$, která je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$, a t reálné. Potom $f(tx)$ je vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, ta_1, t^2 a_2, \dots)$.

Násobení (O7). Pravděpodobně nejkomplikovanější operací, kterou zde zmíníme, je násobení funkcí. Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou po řadě vytvořujícími funkcemi posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$. Naším cílem bude určit posloupnost, jejíž vytvořující funkce bude $f(x)g(x)$. Zapišme si tedy $f(x)$ a $g(x)$ jako mocninné řady, tj.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots , \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots .$$

Potom

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = {} & a_0 b_0 + \\ & + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \\ & \vdots \\ & + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \\ & \vdots \end{aligned}$$

Pokud ti to bude příjemnější, lze předchozí zápis zkrátit na

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n .$$

Máme tedy, že $f(x)g(x)$ je vytvořující funkce posloupnosti $(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + + a_2 b_0, \cdots)$.

Ještě dodejme terminologickou poznámku. Posloupnosti $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + + a_2b_0, \cdots)$ se obvykle říká *konvoluce* posloupností $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$.

Příklad. Určete vytvořující funkci posloupnosti $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \cdots)$. Určete, která posloupnost má vytvořující funkci $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

Řešení. Posloupnost $(1, 1, \dots 1)$ má podle vztahu (G_∞) vytvořující funkci $\frac{1}{1-x}$. Podle operace (O5) má posloupnost $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \cdots)$ má vytvořující funkci $\frac{1}{1-x^3}$. Posuneme-li tuto posloupnost operací (O3) doprava o jedno či dvě místa, dostáváme, že po řadě posloupnosti $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ a $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ mají vytvořující funkce po řadě $\frac{x}{1-x^3}$ a $\frac{x^2}{1-x^3}$. Nyní už stačí použít (O1) a (O2) k tomu, abychom odvodili, že posloupnost v zadání má vytvořující funkci

$$\frac{2}{1-x^3} + \frac{3x}{1-x^3} + \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{2+3x+x^2}{1-x^3}.$$

Dále řešme druhou část příkladu. Začněme opět tím, že posloupnost $(1, 1, \dots, 1)$ má podle (G_∞) vytvořující funkci $\frac{1}{1-x}$. Podle (O6) má posloupnost $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ vytvořující funkci $\frac{1}{1-2x}$. Zbývá podle (O7) určit konvoluci těchto dvou posloupností. Jedná se o posloupnost

$$(1 \cdot 1, 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1, \cdots) = (1, 3, 7, 15, 31 \dots) = (2 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots).$$

Ještě ukážeme o kousek trikovější řešení druhé části příkladu. Upravujme

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1 + (1-2x)}{(1-x)(1-2x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Z tohoto vyjádření je už vidět, že se jedná o vytvořující funkci posloupnosti $(2 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - - 1, \dots)$.

Úloha 17. Ověřte, že fungují vztahy v operacích (O1), (O2), (O3) a (O6).

Úloha 18. Určete vytvořující funkce následujících posloupností:

(i) $(1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, \dots)$,
(ii) $(2008, 134, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
(iii) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$,
(iv) $(1, 1, -2, 2, 4, 4, -8, 8, 16, 16, -32, 32, \dots)$,
(v) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$.

Úloha 19. K následujícím vytvořujícím funkcím nalezněte příslušné posloupnosti.

(i) $\frac{1}{1+2x}$,
(ii) $\frac{1}{1-x^2}$,
(iii) $\frac{1}{(1-x)^2}$,
(iv) $\frac{1}{(1-x)^3}$.

Fibonacciho čísla

Už jsme vybudovali dostatek teorie k tomu, abychom si mohli ukázat první skutečnou aplikaci vytvořujících funkcí. Je početně docela náročná, na druhou stranu, dostaneme takový výsledek, že u něj bude zřejmé, že ho nelze odvodit žádným jednoduchým způsobem.

Pravděpodobně ses už někdy setkal(a) s Fibonacciho čísly, která jsou definována jako

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ a } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.$$

Není těžké spočítat prvních pár členů $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, ... Na první pohled se tato čísla neřídí žádným přesným vzorečkem. Přesto si dejme za úkol nějaký vzoreček pro F_n najít.

Hlavní myšlenkou našeho postupu bude najít vytvořující funkci posloupnosti $(F_0, F_1, F_2, \cdots)$ a z ní pak naopak zjistit přesné vyjádření F_n.

Označme f příslušnou vytvořující funkci, potom platí

$$\begin{aligned} f(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots, \\ xf(x) &= \phantom{F_0 + {}} F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \cdots, \\ x^2f(x) &= \phantom{F_0 + F_0x + {}} F_0x^2 + F_1x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Nyní využijeme rekurentního zadání Fibonacciho čísel, pro větší názornost si ještě rekurentní vztah zapišme jako $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$. Potom dostáváme

$$f(x) - xf(x) - x^2f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = x.$$

Tedy

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Nyní budeme chtít tuto funkci převést zpátky na posloupnost. K tomu nám poslouží rozklad podobný známému[5] rozkladu na parciální zlomky. Kvadratická rovnice $x^2 + x - 1 = 0$ má dva kořeny

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Všimni si, že $x_1x_2 = -1$. Budeme se f snažit vyjádřit jako

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{A}{1 - \frac{1}{x_1}x} + \frac{B}{1 - \frac{1}{x_2}x} = \\ &= \frac{A\left(1 - \frac{1}{x_2}x\right) + B\left(1 - \frac{1}{x_1}x\right)}{1 - x - x^2} = \frac{A(1 + x_1x) + B(1 + x_2x)}{1 - x - x^2}, \end{aligned}$$

kde A a B jsou nějaká reálná čísla. Chceme tedy, aby $0 = (A + B)$ a $1 = Ax_1 + Bx_2$. Hodnoty A a B lze například zjistit řešením této soustavy rovnic. Vyřešením této soustavy dostáváme

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = \frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Z vyjádření

$$f(x) = \frac{A}{1 - \frac{1}{x_1}x} + \frac{B}{1 - \frac{1}{x_2}x}$$

[5]Pokud rozklad na parciální zlomky neznáš, ničemu to nevadí.

dostáváme už hned (použitím operací (O1), (O2) a (O6)), že f je vytvořující funkce posloupnosti $A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_2}\right)^n$, tedy (s využitím vztahu $x_1x_2 = -1$ snadno spočítáme $\frac{1}{x_1}$ a $\frac{1}{x_2}$)

$$F_n = A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right).$$

Všimni si, že jsme tím i například dokázali, že vzoreček výše, plný $\sqrt{5}$, je vždy celé číslo.

Podivné kostky

Mějme dvě obvyklé šestistěnné hrací kostky (ať se nám kostky snáze rozlišuje, řekněme, že jedna je červená – kostka C a druhá je modrá – kostka M). Ptejme se, kolika způsoby může například padnout součet 4, když hodíme oběma kostkami naráz. Odpověď je jednoduchá: Jsou to tři způsoby, a sice jedna možnost je, že padne 1 na červené kostce a 3 na modré, druhá možnost je, že na obou kostkách padne 2, a třetí možnost je, že padne 3 na červené a 1 na modré. Představme si, že po nás chce někdo vyrobit dvě jiné (tj. takové, že mají na stěnách jiná čísla) šestistěnné kostky takové, že počet způsobů, že padne nějaký součet, je stejný, jako kdyby se jednalo o klasické šestistěnné kostky.

Laciný způsob jak takové kostky vyrobit by byl například namalovat na první kostku čísla 0, 1, 2, 3, 4 a 5 a na druhou kostku čísla 2, 3, 4, 5, 6 a 7. Abychom této možnosti předešli, požadujme ještě, že čísla, která na kostky budeme malovat, jsou přirozená.

Podobně jako v úvodní motivační úloze, přiřadíme kostkám nějaké polynomy. Konkrétně kostce K přiřadíme polynom

$$p_K = a_1x + a_2x^2 + \cdots ,$$

kde a_i značí počet stran kostky K s číslem i. Všimněte si, že u šestistěnné kostky je součet koeficientů vždy roven 6. Klasickým šestistěnným kostkám je přiřazený polynom

$$p_C = p_M = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Jak zjistíme, kolika způsoby padne při hodu dvěma kostkami K a L součet s? Podobně jako v první motivační úloze, vynásobíme p_K a p_L a podíváme se na koeficient u x^s (rozmysli si!). Pro klasické šestistěnné kostky dostáváme

$$\begin{aligned} p_C \cdot p_M &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = \\ &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Naším cílem je tedy najít dvě jiné šestistěnné kostky A a B takové, že $p_A \cdot p_B = p_C \cdot p_M$. Za tímto účelem upravujme

$$p_C = p_M = x(1+x+x^2+x^3(1+x+x^2)) = x(1+x^3)(1+x+x^2) = x(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2).$$

Tedy

$$p_A \cdot p_B = x^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2(1+x+x^2)^2.$$

Všimni si, že polynomy $(1-x+x^2)$ a $(1+x+x^2)$ už nelze rozložit na lineární členy s celočíselnými koeficienty.

Do polynomů p_A a p_B tedy chceme nějak rozdělit jednotlivé součinitele x, $1+x$, $1-x+x^2$ a $1+x+x^2$. Tím, že p_A i p_B začínají od x, musí být x v každém z nich právě jednou. Dále značme $\#(q)$ součet koeficientů nějakého polynom q. Rozmysli si, že pro polynomy q_1 a q_2 platí $\#(q_1)\#(q_2) = \#(q_1 q_2)$. Má platit, že $\#(p_A) = \#(p_B) = 6$. Dále není těžké zjistit, že $\#(1+x) = 2$, $\#(1-x+x^2) = 1$ a $\#(1+x+x^2) = 3$. Odtud je zřejmé, že $1+x$ a $1+x+x^2$ musejí být obsaženy i v p_A, i v p_B každý právě jednou. Jediné, v čem se tedy polynomy p_A a p_B mohou lišit od p_C a p_M, je v tom, jak obsahují $(1-x+x^2)$. Konkrétně například nechť

$$p_A = x(1+x)(1-x+x^2)^2(1+x+x^2) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8$$

a

$$p_B = x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4.$$

Všimněte si, že jsme měli štěstí, že nám vyšly nezáporné koeficienty. Podle definice p_A a p_B tedy dostáváme, že kostka A obsahuje stěny s čísly 1, 3, 4, 5, 6 a 8 a kostka B obsahuje stěny s čísly 1, 2, 2, 3, 3 a 4. Když s těmito kostkami budete hrát hru, ve které jimi budete házet najednou a půjde vám pouze o součet stěn, nerozpoznáte tyto kostky od klasických.

Úloha 20. Dokažte, že analogická úloha má vždy řešení pro k-stěnné kostky, pokud je k sudá a zároveň není mocninou 2.

Úloha 21. (těžší) Dokažte, že analogická úloha nemá řešení pro pětistěnné kostky.

Náznaky dalších aplikací

Vzhledem k tomu, že už předcházející text je docela komplikovaný, nebudeme se pouštět podrobně do dalších aplikací. Tento text už nemusíš číst k tomu, abys mohl(a) řešit seriálové úlohy, nicméně může se ti hodit, pokud někdy jindy budeš chtít použít vytvořující funkce.

Za zmínku stojí zobecněná kombinační čísla a zobecněná binomická věta. Je-li r reálné a k přirozené, potom se zobecněné kombinační číslo definuje jako

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Zobecněná binomická věta říká, že pro r reálné je funkce $(1+x)^r$ vytvořující funkcí pro posloupnost

$$\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right),$$

tj.

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots. \tag{B}$$

Vztah (B) nám tedy umožňuje relativně jednoduše určit posloupnosti příslušející například vytvořujícím funkcím $\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$ nebo $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

Úloha 22. Pro n přirozené vyjádřete členy posloupnosti příslušející vytvořující funkci $\frac{1}{(1-x)^n}$ pomocí nezobecněných kombinačních čísel.

Úloha 23. V přihrádce je 30 modrých, 40 červených a 50 žlutých kuliček. Určete počet způsobů, jak vybrat 70 z těchto kuliček.

Úloha 24. (těžká) Nechť $c_0, c_1, c_2, \dots$ jsou Catalanova čísla definovaná v předchozím dílu seriálu a nechť C je vytvořující funkce příslušející posloupnosti $(c_0, c_1, \dots)$.

(i) Dokažte, že $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

(ii) Dokažte, že $c_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}$.

(iii) Upravte c_n na $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Řešení (některých) úloh předchozího dílu seriálu

Řešení úlohy 10.

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Řešení úlohy 11.

$$f(n) = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)\binom{2(n+1)}{n+1}}{(n+2)\binom{2n}{n}} = \frac{(n+1)\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{(n+2)\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+2}.$$

Řešení úlohy 12. Nebudeme zde psát podrobné řešení, pouze napovíme, že označíme-li z_n počet správných uzávorkování, potom $z_0 = z_1 = 1$ a z_n splňuje rekurentní vztah (♡)

$$z_n = z_0 z_{n-1} + z_1 z_{n-2} + \cdots + z_{n-1} z_0,$$

což se snadno dokáže tak, že se rozebere, kde končí první závorka:

$$\Big(\underbrace{()((\ldots)}_{z_k}\Big)\underbrace{(()\ldots)}_{z_{n-k-1}}.$$

Řešení úlohy 13. Podobně jako v předchozí úloze chceme odvodit rekurentní vztah (♡) pro Catalanova čísla. Tentokrát si pevně vyberme jeden vrchol A řezaného $(n+2)$-úhelníku a rozebírejme, který nejbližší vrchol ve směru hodinových ručiček k vrcholu A je spojený řezem s vrcholem A (může se stát, že takový vrchol není, což dává nějaké další možnosti).

Řešení úlohy 14. Označme C bod na diagonále (různý od A, B), kterým procházka prochází. Nechť (k,k) jsou souřadnice bodu C. Rozmysli si, že je právě $2c_{k-1}$ možných procházek z A do C (totiž jsou buď pod diagonálou o kousek níže, nebo nad diagonálou o kousek výše). Podobně je $2c_{n-k-1}$ možných procházek z C do B. Dohromady je to

$$4(c_0 c_{n-2} + c_1 c_{n-3} + \cdots + c_{n-2} c_0) = 4c_{n-1}$$

procházek.

Řešení úlohy 15. Označme A_i množinu všech čísel mezi $1, 2, \ldots, 900$ takových, že jsou dělitelná číslem i. Naším úkolem je určit $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$. Nejprve si všimněme (díky nesoudělnosti), že $A_2 \cap A_3 = A_6$, $A_2 \cap A_5 = A_10$, …, $A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7 = A_{210}$. Dále si rozmysli, že $A_i = \left\lfloor \frac{900}{i} \right\rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x (tj. x zaokrouhleno dolů na celé číslo). Podle tohoto vzorečku už snadno spočítáme

$$A_2 = 450, A_3 = 300, A_5 = 180, A_7 = 128,$$

$$A_6 = 150, A_{10} = 90, A_{14} = 64, A_{15} = 60, A_{21} = 42, A_{35} = 25,$$

$$A_{30} = 30, A_{42} = 21, A_{70} = 12, A_{105} = 8,$$

$$A_{210} = 4.$$

Podle principu inkluze a exkluze je tedy

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 450 + 300 + 180 + 128 - 150 - 90 - 64 - 60 - 42 - 25+$$
$$+ 30 + 21 + 12 + 8 - 4 = 694.$$

Řešení úlohy 16. Řešení napíšeme pouze náznakem. Volíme-li $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \{1\}$, dostáváme podle principu inkluze a exkluze

$$1 = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}.$$

Odtud už snadno plyne požadovaný vztah.

Řešení úlohy 17 vynecháme vzhledem k podobnosti se zadáním šestého příkladu druhého dílu seriálu (původní očekávání bylo, že tento text dostaneš až po termínu odeslání řešení druhého dílu seriálu).