6. série

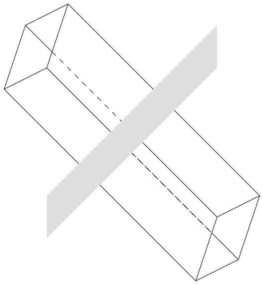
Téma: Shodnost a rovnoběžnost

Datum odeslání: 16. března 2009

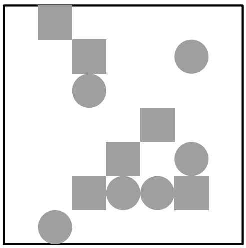
0. úloha (1 bod)

Na poslední výběrovce se nám stala nemilá věc. Vymysleli jsme pěkné zadání nulté úlohy, nicméně nikdo si ho nepoznamenal. Naštěstí se nám dochovalo alespoň pár řešení od některých orgů.

Lenka si nakreslila obrázek.



V **Alčiných** poznámkách byl u nulté úlohy objeven také obrázek.



Miško bleskurychle nahlédl do problému a poznamenal si pouze: *Zrejmé!*

A nejvíce se rozepsal **Dominik**.

```
   sbírejte        r ocha t
vhodné            o var s
vhodná           pov  ěz
vhodný             hn   ojník
vhodnó             prosímtě
      problematiku    buben
        starost          tě
           mladost     milužež
```

Pomůžete nám přijít na to, jak znělo původní zadání? Určitě bylo hrozně zajímavé, když ho všichni začali rovnou řešit a nechtěli se byť jen na chvilenku zdržovat s jeho zapsáním. (-:

1. ÚLOHA (3 BODY)

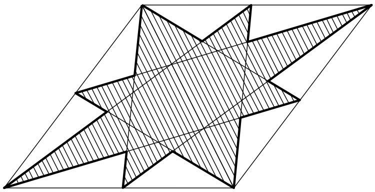
Nalezněte dva čtyřúhelníky, které mají stejné délky stran, shodují se ve dvou vnitřních úhlech, a přesto nejsou shodné.

2. ÚLOHA (3 BODY)

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Průsečík jeho úhlopříček označme X. Dokažte, že tento čtyřúhelník je rovnoběžník, víte-li, že trojúhelníky PQX a RSX jsou shodné.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Spojíme-li v rovnoběžníku všechny středy stran se všemi vrcholy, vznikne uprostřed deformovaná osmicípá hvězda (viz obrázek). Spočítejte poměr obsahů této hvězdy a původního rovnoběžníku.



4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buďte e a f různé rovnoběžky a X bod, který je od obou stejně vzdálen. Na přímkách e a f nalezneme takové body E a F, že $|\sphericalangle EXF| = 90^\circ$. Určete množinu všech možných pat výšek z bodu X na stranu EF, hýbeme-li touto stranou.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nakresleme si ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho výšky AX, BY a CZ. Nyní nalezněme průsečíky výšek trojúhelníků AYZ, BZX a CXY a postupně je označme X', Y' a Z'. Dokažte $\triangle XYZ \cong \triangle X'Y'Z'$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na stranách RS a ST trojúhelníka RST najdeme po řadě body X a Y takové, že $|RX| = |TY|$. Dále na jeho straně TR bod Z takový, že čtyřúhelník $SXZY$ je tětivový. Nyní sestrojme přímky r a t jakožto tečny ke kružnici opsané $\triangle RST$ vedené postupně body R a T. Průsečík r a přímky ZX označme K a průsečík t a přímky ZY označme L. Dokažte $|ZK| = |ZL|$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC a CD jsou stejně dlouhé a který není lichoběžník.[1] Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že $|AS| = |SD|$, právě když $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 120^\circ$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

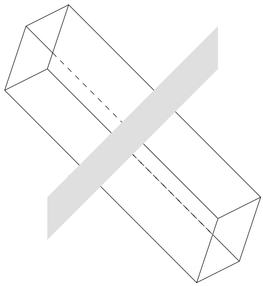
Osy úhlů $\sphericalangle KMS$, $\sphericalangle MKS$ a $\sphericalangle KSM$ protnou kružnici opsanou trojúhelníku MKS v postupně bodech M', K' a S'. Úsečky $M'K'$ a $M'S'$ dělí stranu KS na tři části. Střed prostřední části označme M_1. Obdobně definujeme body K_1 a S_1. Dokažte, že úsečky MM_1, KK_1 a SS_1 procházejí jedním bodem tehdy a jedině tehdy, pokud je $\triangle MKS$ rovnoramenný.

[1] Neboli žádné dvě jeho strany nejsou rovnoběžné.

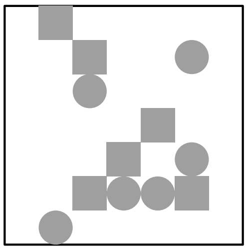
Řešení 6. série

0. úloha
Na poslední výběrovce se nám stala nemilá věc. Vymysleli jsme pěkné zadání nulté úlohy, nicméně nikdo si ho nepoznamenal. Naštěstí se nám dochovalo alespoň pár řešení od některých orgů.

Lenka si nakreslila obrázek.



V **Alčiných** poznámkách byl u nulté úlohy objeven také obrázek.



Miško bleskurychle nahlédl do problému a poznamenal si pouze: *Zrejmé!*

A nejvíce se rozepsal **Dominik**.

```
 sbírejte        r ocha t
vhodné           o var s
vhodná          pov  ěz
vhodný            hn   ojník
vhodnó            prosímtě
   problematiku    buben
    starost          tě
     mladost     milujež
```

Pomůžete nám přijít na to, jak znělo původní zadání? Určitě bylo hrozně zajímavé, když ho všichni začali rovnou řešit a nechtěli se byť jen na chvilenku zdržovat s jeho zapsáním. (-:

Řešení (nebo zadání? :)) se sešlo nemnoho, leč ta, která přišla, stála za to. Uvádím jich zde hned několik, prvním třem posíláme sladkou odměnu.

Řešení Veroniky Paštykové:
K tématu shodnost bezpochyby patří zrcadlo. Obyčejné zrcadlo ukazuje shodně to, co před něj postavíme, ale jak by vypadalo takové „rafinované zrcadlo“? =)

MIŠKO si takové rafinované zrcadlo pro jistotu zrovna vyrobil, a když se v něm zřel, označil úlohu za zřejmou.
LENKA nakreslila pod zrcadlo obraz kvádru, a to tak, že rafinované zrcadlo ukazuje kvádr převráceně.
ALČA vytvořila půdorys zrcadlového bludiště plného kulatých a čtverhranných sloupů s rafinovanými zrcadly.
A na závěr DOMINIK sesbíral vhodnou problematiku mladého hnojníku zrcadlícího se ve starostlivém bubnu s ovarem.

Řešení Martina Bucháčka:
Ach jo, tak takováto bota už se PraSátkům dlouho nepodařila! Ještě že mí kamarádi z roku 5555 už vynalezli stroj času, a když mě o jarních prázdninách navštívili, mohli jsme se přenést v to osudné odpoledne do budovy Matfyzu a podívat se, jak se to všechno vlastně seběhlo ...

Přišli jsme do nějaké místnosti, kde před tabulí postával nějaký matematik (nevím který, protože PraSátko řeším prvním rokem a tváře orgů neznám) (každopádně to byl matematik, protože měl dlouhé vlasy a brýle) a říkal zadání nulté úlohy: „Váš úkol je jednoduchý, přátelé, na tabuli napíšu slovo a vy budete muset toto slovo každý trochu zašifrovat, ale ne tak, aby šifra šla vyluštit, dáte pouze indicie. Nejdříve Dominik, potom Alča, po ní Lenka a nakonec Miško. Každý navážete na to, co vytvořil ten před vámi, aby po čtyřech indiciích naši soutěžící mohli slovo hravě vyluštit!“

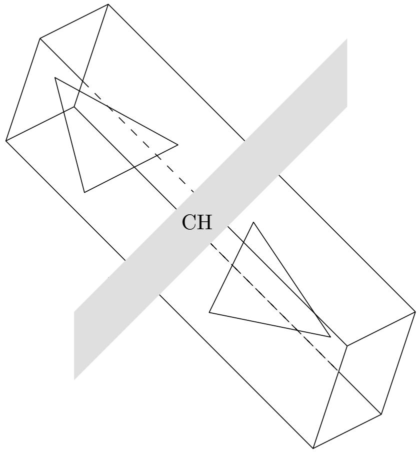
Co čert nechtěl, do tiskárny se nedostalo zadání úlohy, pouze šifry orgů a k tomu leckdy neúplné! Podívejme se, jak to tedy všechno bylo!

Nejprve se rozepsal Dominik. Tady kupodivu nic v zadání nulté úlohy nechybělo!

Po Dominikovi přišla na řadu Alča. Ta vedle otištěného čtverečku napsala ještě druhý plný čísel:

2, 5	2, 5	7, 1	8, 2	1, 3	1, 2	1, 1
2, 5	4, 1	6, 1	2, 6	6, 2	5, 8	5, 8
3, 3	2, 6	1, 8	9, 1	1, 4	1, 5	3, 5
9, 9	3, 1	3, 5	6, 1	14, 3	6, 3	6, 1
9, 7	6, 6	6, 3	9, 7	9, 3	3, 3	6, 6
13, 1	3, 6	13, 2	13, 1	1, 8	7, 1	1, 8
13, 2	9, 9	9, 3	14, 3	9, 4	9, 4	21, 2

A Lenčin výtvor ve skutečnosti vypadal takto:



Nakonec Miško připsal: *Zrejme* (čárka úmyslně chybí)*! To je predsa každý matematik!*

Ovšem mně se stala taková nepěkná věc – zapomněl jsem, co na té tabuli bylo za slovo! Poradíte mi? `(-:`

Řešení Ondry Šmída:
Vypsánek již dávno ztratil motivaci a zapsánek nepracuje s takovou vervou jako dřív. Zjisti, proč vypsánek žaloval na zapsánka.

Řešení Honzy Bílka:
Úloha byla zajímavá, ale vůbec se netýkala matematiky. Zněla takto: „Na čem se se svými spolužáky shodnete (shodnost a rovnoběžnost, proto shodnete), že je nejlepší školní předmět? Pokuste se kreativně znázornit.“

Lenka a její třída mají rádi deskriptivní geometrii, proto nakreslila kvádr, kterým prochází klacek (šrafovaný).

To Dominik si zase nejraději hraje s mateřským jazykem a se spolužáky nejraději tvoří asociativní řady (každý řekne slovo – klidně vymyšlené – na základě předchozího).

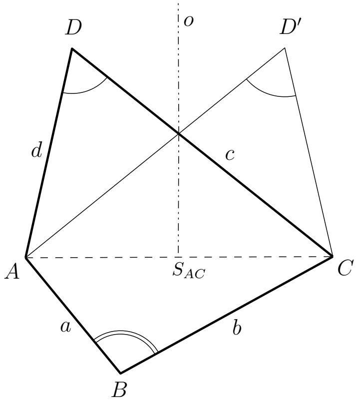
A co Miško? Inu, jelikož je v matematické třídě, je zřejmé, že jejich oblíbeným předmětem bude cokoliv, co se týká matematiky.

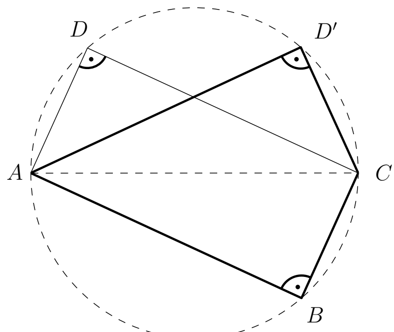
Jaký předmět ale znázorňuje Alčin obrázek? To neuhodnete. Alča ve škole totiž vůbec nedává pozor a celé dny jen hraje se spolužačkou z lavice jednu hru. Určitě ji znáte. Napovím vám, většina hráčů v ní kreslí místo čtverečků křížky.

Řešení Jiřího Hadravy:
Vymysli řešení k libovolné úloze, která tě napadne a o které si myslíš, že nenapadne žádného jiného řešitele.

1. úloha
Nalezněte dva čtyřúhelníky, které mají stejné délky stran, shodují se ve dvou vnitřních úhlech, a přesto nejsou shodné.

Dva hledané čtyřúhelníky můžeme nalézt tak, že si vezmeme libovolný konvexní čtyřúhelník, kde $a \neq b \wedge c \neq d$. Poté podle osy úhlopříčky (dané body A a C) v osové souměrnosti zobrazíme $\triangle ADC$ na $\triangle CD'A$. Zachováme tak velikosti délek stran c a d i úhel u vrcholu D. Speciální případ je obdélník a deltoid (viz obrázek). Čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABCD'$ tedy mají čtyři stejně dlouhé strany, dva stejně velké vnitřní úhly, a přesto nejsou shodné.

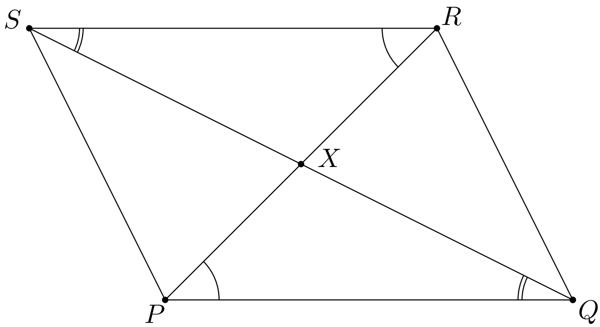




2. úloha
V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Průsečík jeho úhlopříček označme X. Dokažte, že tento čtyřúhelník je rovnoběžník, víte-li, že trojúhelníky PQX a RSX jsou shodné.

Zo zhodnosti $\triangle PQX$ a $\triangle RSX$ dostávam nasledujúce informácie:

$$|PQ| = |RS|, \quad |QX| = |SX|, \quad |PX| = |RX|,$$
$$|\sphericalangle PQX| = |\sphericalangle RSX|, \quad |\sphericalangle QXP| = |\sphericalangle SXR| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle XPQ| = |\sphericalangle XRS|.$$



Takže poďme riešiť:

I. riešenie:
To, že platí $|QX| = |SX|$ a $|PX| = |RX|$ znamená, že sa v $\square PQRS$ rozpoľujú uhlopriečky, a to už nutne znamená, že $\square PQRS$ je rovnobežník.

II. riešenie:
Všimnime si priamky PQ, QS a RS. Keďže uhly $\sphericalangle PQS$ a $\sphericalangle RSQ$ majú rovnakú veľkosť, musia byť priamky PQ a RS rovnobežné. Takéto uhly sa nazývajú striedavé. Lenže štvoruholník, v ktorom sú dve protiľahlé strany zhodné (máme $|PQ| = |RS|$) a rovnobežné, je už nutne rovnobežník.

III. riešenie:
Uhly $\sphericalangle PXS$ a $\sphericalangle QXR$ sú vrcholové, a teda majú rovnakú veľkosť. Táto informácia spolu s $|QX| = |SX|$ a $|PX| = |RX|$ nám dáva zhodnosť $\triangle PXS$ a $\triangle RXQ$. Takže dostávame $|PS| = |RQ|$, čo znamená, že v $\square PQRS$ majú protiľahlé strany rovnakú veľkosť, a teda $\square PQRS$ je rovnobežník.

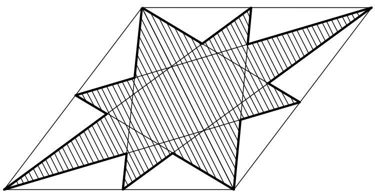
IV. riešenie:
Začneme rovnako ako v III. riešení a dokážeme zhodnosť $\triangle PXS$ a $\triangle RXQ$. Porovnaním uhlov dostaneme

$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle PQS| + |\sphericalangle SQR| = |\sphericalangle RSQ| + |\sphericalangle QSP| = |\sphericalangle RSP|,$$
$$|\sphericalangle QPS| = |\sphericalangle QPR| + |\sphericalangle RPS| = |\sphericalangle SRP| + |\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle SRQ|.$$

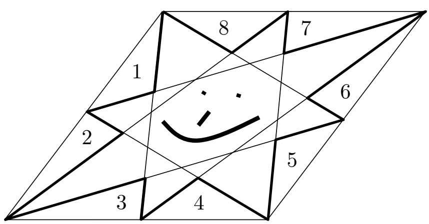
To znamená, že v $\square PQRS$ sú protiľahlé uhly rovnaké, a to znamená, že to je rovnobežník.

V. riešenie:
Začneme ako v II. riešení tým, že ukážeme rovnobežnosť priamok PQ a RS. Pokračujeme zhodnosťou $\triangle PXS$ a $\triangle RXQ$ (III. a IV. riešenie) a jej použitím dostaneme rovnobežnosť priamok RQ a PS (rovnaký postup ako II. riešenie). Takže dokopy sme zistili, že protiľahlé strany $\square PQRS$ sú rovnobežné, čo znamená, že to je rovnobežník.

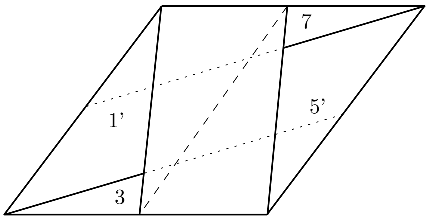
3. úloha
Spojíme-li v rovnoběžníku všechny středy stran se všemi vrcholy, vznikne uprostřed deformovaná osmicípá hvězda (viz obrázek). Spočítejte poměr obsahů této hvězdy a původního rovnoběžníku.

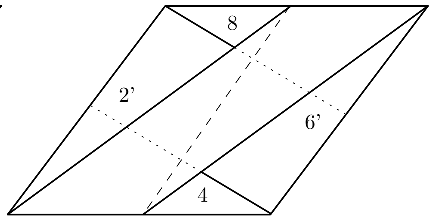


Uvažujme jednotkový obsah rovnoběžníku. Spočtěme nejprve obsah zbytku rovnoběžníku, tj. bez hvězdy. Označme si zbylé oblasti čísly 1 až 8 jako na obrázku:



Nyní si všimneme, že ze symetrie (středová symetrie podle středu rovnoběžníku) platí $S_1 = S_5$, $S_2 = S_6$, $S_3 = S_7$ a $S_4 = S_8$. Proto uvažme následující obrazce,





kde k' vznikne z k pro $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ dvojnásobným „nafouknutím“ podle nejbližšího vrcholu rovnoběžníku (nebo by se též dalo říci stejnolehlostí o středu v nejbližším vrcholu rovnoběžníku a koeficientu 2). Proto bude $S_{1'} = 4S_1$, $S_{5'} = 4S_5$, $S_{2'} = 4S_2$ a $S_{6'} = 4S_6$. Dále z obrázků (středová souměrnost) plynou rovnosti:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}S = S_{1'} + S_3 + S_{5'} + S_7 = 4S_1 + S_3 + 4S_5 + S_7 = 5S_1 + 5S_3,$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}S = S_{2'} + S_4 + S_{6'} + S_8 = 4S_2 + S_4 + 4S_6 + S_8 = 5S_2 + 5S_4.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostáváme

$$\frac{2}{5} = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8.$$

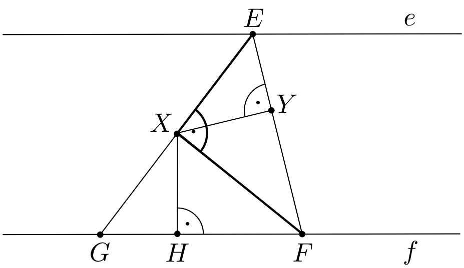
Tedy obsah hvězdy je $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, a proto výsledný poměr je:

$$\frac{S_{\text{hvězdy}}}{S_{\text{rovnoběžníku}}} = \frac{3}{5}.$$

4. úloha

Buďte e a f různé rovnoběžky a X bod, který je od obou stejně vzdálen. Na přímkách e a f nalezneme takové body E a F, že $|\sphericalangle EXF| = 90°$. Určete množinu všech možných pat výšek z bodu X na stranu EF, hýbeme-li touto stranou.

Priamka EX pretne priamku f v bode G. Trojuholníky XEF a XGF sú zhodné, lebo sa zhodujú v dvoch stranách a uhle medzi nimi, pretože $|EX| = |GX|, |FX| = |FX|, |\sphericalangle EXF| = = |\sphericalangle FXG|$. Preto výška na stranu FG, teda úsečka XH, má rovnakú dĺžku ako výška na stranu EF, teda úsečka XY.

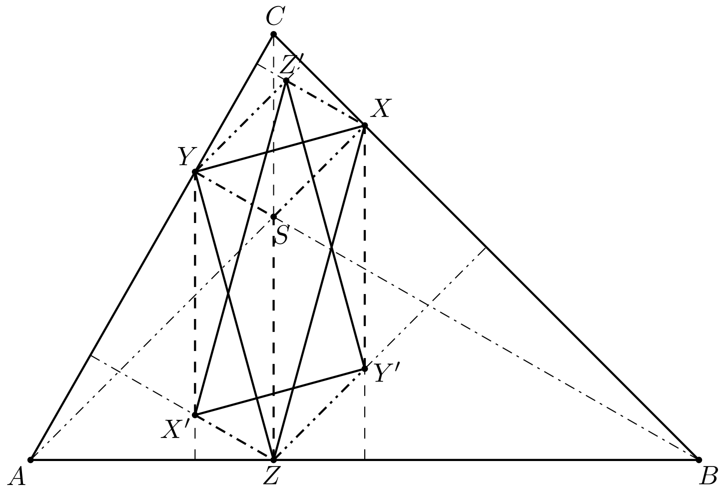


Tým pádom je $|XY|$ konštantné a všetky možné päty Y ležia na kružnici $k(X; |XH|)$. Ku každému $Y \in (k \setminus \overleftrightarrow{XH})$ nájdeme konštrukciou pomocou kolmice spätne body E a F. Len pre $Y \in (k \cap \overleftrightarrow{XH})$ zodpovedajúce body E a F neexistujú, pretože by bola priamka EF v tomto prípade rovnobežná s priamkami e a f, čo nie je možné.

5. úloha

Nakresleme si ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho výšky AX, BY a CZ. Nyní nalezněme průsečíky výšek trojúhelníků AYZ, BZX a CXY a postupně je označme X', Y' a Z'. Dokažte $\triangle XYZ \cong \triangle X'Y'Z'$.

Aby sme dokázali, že trojuholníky XYZ a $X'Y'Z'$ sú zhodné, dokážeme, že $|XY| = |X'Y'|$. Analogicky sa dajú dokázať rovnosti $|YZ| = |Y'Z'|$ a $|XZ| = |X'Z'|$, a teda trojuholníky budú zhodné podľa vety *sss*.

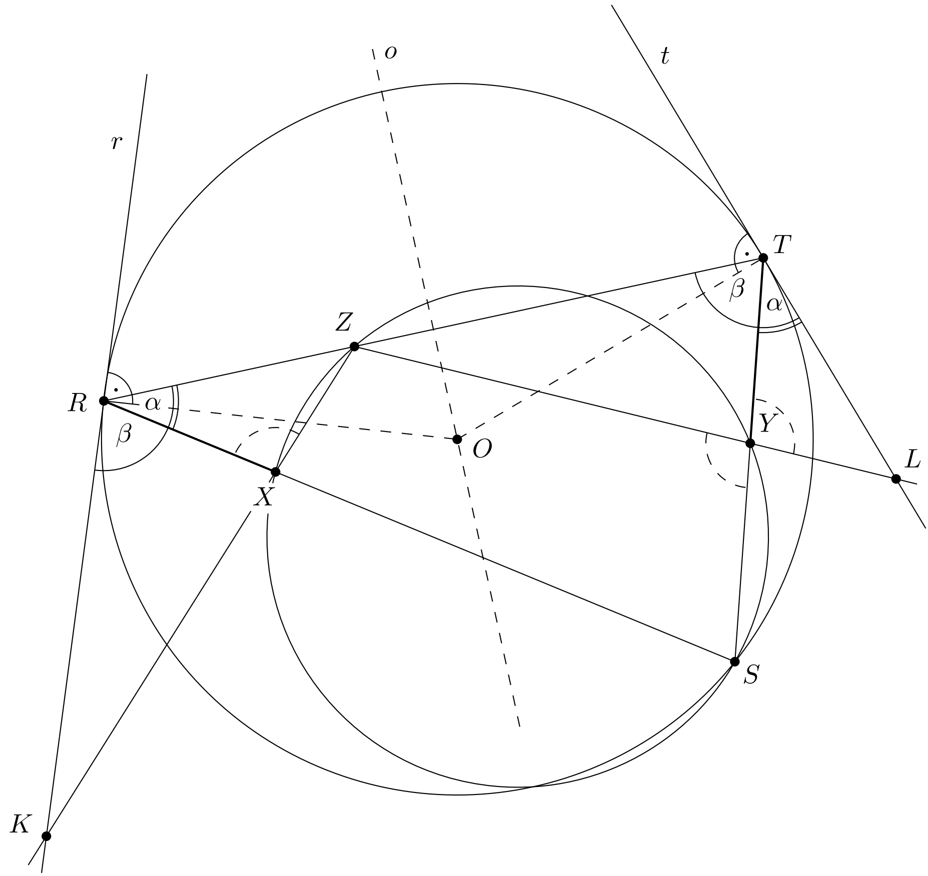


Bod S je ortocentrum (priesečník výšok) trojuholníka ABC. Na prvý pohľad je zrejmé, že YX', ZC a XY' sú rovnobežné (výšky na stranu AB), ZY', AX a YZ' sú rovnobežné (výšky na stranu BC) a XZ', BY a ZX' sú rovnobežné (výšky na stranu AC). Z toho vyplýva, že $ZY'BS$ a $SBZ'Y$ sú rovnobežníky a $|ZY'| = |SB| = |YZ'|$. Podobne $X'ZSY$ a $YSXZ'$ sú rovnobežníky a $|X'Z| = |YS| = |Z'X|$. Pretože ZY' je rovnobežná s YZ' a $X'Z$ je rovnobežná s $Z'X$, sú aj uhly $X'ZY'$ a $XZ'Y$ zhodné, a teda celé trojuholníky $X'ZY'$ a $XZ'Y$ sú zhodné. A keď sú zhodné trojuholníky, musia byť zhodné aj ich strany $X'Y'$ a XY.

6. úloha

Na stranách RS a ST trojúhelníka RST najdeme po řadě body X a Y takové, že $|RX| = |TY|$. Dále na jeho straně TR bod Z takový, že čtyřúhelník $SXZY$ je tětivový. Nyní sestrojme přímky r a t jakožto tečny ke kružnici opsané $\triangle RST$ vedené postupně body R a T. Průsečík r a přímky ZX označme K a průsečík t a přímky ZY označme L. Dokažte $|ZK| = |ZL|$.

Zřejmě platí rovnost $|\sphericalangle SRT| = |\sphericalangle STL|$, neboť se jedná o obvodový a úsekový úhel (na obrázku značeno α). Ze stejného důvodu platí $|\sphericalangle STR| = |\sphericalangle SRK|$ (na obrázku β). Díky tětivovému čtyřúhelníku $SXZY$ shledáváme, že rovněž čárkované úhly jsou stejné ($|\sphericalangle TYL| = |\sphericalangle SYZ| = 180^\circ - |\sphericalangle SXZ| = |\sphericalangle RXZ|$). Proto trojúhelníky $\triangle RXZ$ a $\triangle TYL$ jsou shodné podle věty *usu* (shodují se v úhlu α, čárkovaném úhlu a straně $|RX| = |TY|$). Ovšem shodnost nalézáme i u trojúhelníků $\triangle RXK$ a $\triangle TYZ$ opět podle věty *usu* (shodují se v téže straně, úhlu β a úhlu opačném k čárkovanému úhlu). Odtud dostáváme $|ZK| = |ZX| + |XK| = |LY| + |YZ| = |LZ|$.



7. úloha

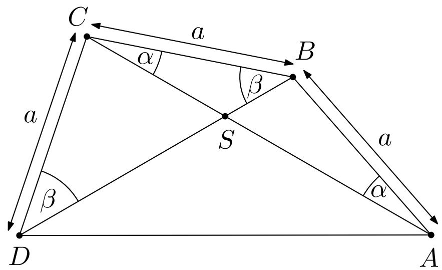
Uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC a CD jsou stejně dlouhé a který není lichoběžník.[2] Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že $|AS| = |SD|$, právě když $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 120^\circ$.

[2]Neboli žádné dvě jeho strany nejsou rovnoběžné.

Řešení podle Myrega Klimoše:

Začněme faktem, který platí i bez podmínek z ekvivalence. Dvojnásobným použitím sinové věty dostaneme

$$\frac{|SA|}{\sin|\sphericalangle ABS|}=\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ASB|}=\frac{|CD|}{\sin|\sphericalangle CSD|}=\frac{|SD|}{\sin|\sphericalangle SCD|}. \qquad (\Upsilon)$$



Pokud navíc $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CSD|$, je $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník, takže tuto možnost vylučuje zadání. Označme podmínku, že $ABCD$ není lichoběžník (neboli $|\sphericalangle ABS| \neq |\sphericalangle CSD|$), jako (Ξ). Pak postupujeme:

$$\begin{aligned}\Big(|SA|=|SD|\Big) &\overset{(\Upsilon)}{\iff} \sin|\sphericalangle ABS| = \sin|\sphericalangle SCD| \overset{(\Xi)}{\iff} |\sphericalangle ABS| + |\sphericalangle SCD| = 180^\circ\\ &\iff (180^\circ-2\alpha-\beta)+(180^\circ-2\beta-\alpha)=180^\circ \iff \alpha+\beta=60^\circ\\ &\iff (180^\circ-2\alpha)+(180^\circ-2\beta)=240^\circ \iff |\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle BCD|=240^\circ\\ &\iff |\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle ADC|=120^\circ.\end{aligned}$$

A je vymalováno.

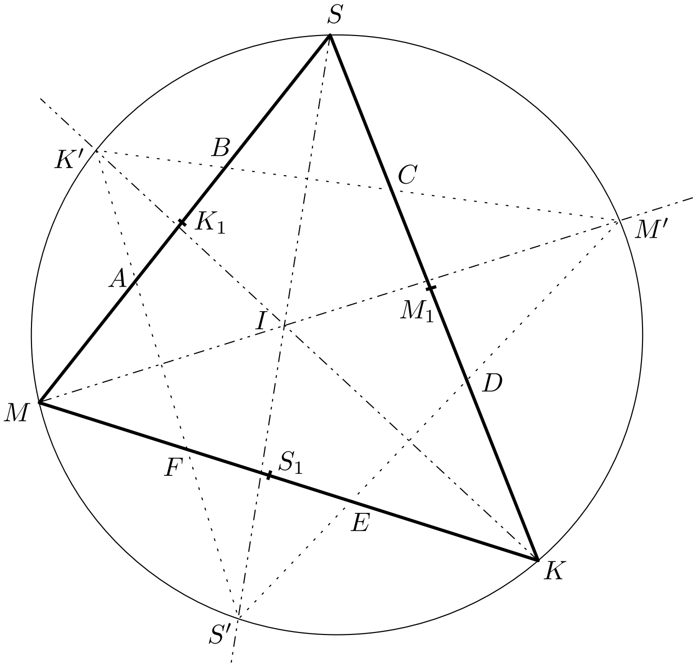
8. úloha

Osy úhlů $\sphericalangle KMS$, $\sphericalangle MKS$ a $\sphericalangle KSM$ protnou kružnici opsanou trojúhelníku MKS v postupně bodech M', K' a S'. Úsečky $M'K'$ a $M'S'$ dělí stranu KS na tři části. Střed prostřední části označme M_1. Obdobně definujeme body K_1 a S_1. Dokažte, že úsečky MM_1, KK_1 a SS_1 procházejí jedním bodem tehdy a jedině tehdy, pokud je $\triangle MKS$ rovnoramenný.

Nejprve si vezmeme obecný trojúhelník MKS a budeme zkoumat, co pro dané rozestavení bodů platí. Našim cílem bude vyjádření poměrů $\frac{|KM_1|}{|SM_1|}$ a podobných a následné použití *Cevovy věty*[3].

Označme I střed kružnice vepsané $\triangle MKS$ a α, β, γ úhly u vrcholů M, K, S, dále m, k, s délky stran a označení bodů A až F přejmeme z obrázku.

[3] Tato věta klade, jak uvidíš později, ekvivalentní podmínku na to, aby se tři přímky vedené z vrcholů trojúhelníku protnuly v jednom bodě. Pokud bys o ní chtěl vědět více, zajisté mnoho užitečného najdeš v naší knihovně.



Prvním dílčím tvrzením je, že I je ortocentrem trojúhelníku $M'K'S'$. K důkazu nám stačí ukázat, že $KK' \perp M'S'$, $MM' \perp K'S'$, $SS' \perp M'K'$. Ukažme tedy, že platí například $KK' \perp M'S'$, ostatní kolmosti se dokáží analogicky. K tomu stačí vhodně využít obvodové úhly.

$$|\sphericalangle M'S'K| = |\sphericalangle M'MK| = \frac{\alpha}{2},$$
$$|\sphericalangle S'KK'| = |\sphericalangle S'KM| + |\sphericalangle MKK'| = |\sphericalangle S'SM| + \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Označíme-li tedy X průsečík přímek $M'S'$ a KK', pak dopočtením úhlů v $\triangle S'KX$ získáme, že $|\sphericalangle S'XK| = 90°$, tedy $KK' \perp M'S'$ a I je pak ortocentrem $\triangle M'K'S'$.

Prvním důsledkem tohoto zjištění je, že $\triangle DEK$ je rovnoramenný, neb v něm splývá výška s osou úhlu. Ze stejných důvodů jsou rovnoramenné i trojúhelníky BCS a AMF.

Nyní využijeme známé tvrzení, že osový obraz ortocentra podle libovolné ze stran leží na kružnici opsané. V našem případě to znamená, že v osové souměrnosti podle $M'S'$ přejde bod I do bodu K (rozmysli si) a můžeme říci, že trojúhelníky EKD a EID jsou shodné. V další části řešení provedeme v rychlém sledu několik úvah:

(i) $EKDI$ je kosočtverec (má stejně dlouhé strany).
(ii) $DI \| EK$ a obdobně $AI \| MF$ (využíváme i kosočtverec $MFIA$).
(iii) A, I a D leží v přímce, která je rovnoběžná s MK.
(iv) Podobně pro trojice bodů C, I, F a B, I, E.
(v) Trojúhelníky $\triangle AIB$, $\triangle IDC$, $\triangle FEI$ jsou všechny podobné $\triangle MKS$ (jen užijeme rovnoběžnosti).

Odvozené podobnosti nám již umožní vyjádřit například $\frac{|MK_1|}{|SK_1|}$. Označme x poměr podobnosti trojúhelníků AIB a MKS tak, aby platilo $|AB| = kx$. Pak též platí $|MA| = |AI| = sx$ a $|BS| = |BI| = mx$ (vzpomeň na kosočtverce). Hledaný poměr již snadno vyjádříme

$$\frac{|MK_1|}{|SK_1|} = \frac{sx + \frac{kx}{2}}{mx + \frac{kx}{2}} = \frac{2s + k}{2m + k}.$$

Obdobně vypočteme i poměry, v nichž body M_1 a S_1 dělí strany $\triangle MKS$.

Podle Cevovy věty pro $\triangle MKS$ procházejí přímky MM_1, KK_1, SS_1 jedním bodem právě tehdy, když platí

$$\frac{(2s + k)(2m + s)(2k + m)}{(2m + k)(2k + s)(2s + m)} = 1,$$

což lze ekvivalentně upravit na tvar

$$(m - k)(k - s)(s - m) = 0,$$

z něhož je tvrzení úlohy již zřejmé.