# 3. podzimní série

**Téma:** Kombinatorika

**Datum odeslání:** 7. prosince 2009

1. ÚLOHA (3 BODY)

Monča potřebuje zatelefonovat Pepovi, avšak nemá u sebe svůj telefonní seznam PraSátek. Zná však předvolbu 723 a vzpomněla si, že Pepovo číslo obsahuje právě tři po sobě jdoucí nuly, přičemž žádná jiná nula se již v čísle nevyskytuje. Spočteš, z kolika možností bude Monča hádat?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Vejtek má dvě ponožky, žlutou a zelenou. Považuje však za společensky nepřijatelné, aby každý den měl na sobě stejně oblečené ponožky. Urči, na kolik dní mu tyto dvě ponožky vystačí, pokud je může dávat na sebe v různém pořadí či naruby nebo nosit jen některou či žádnou.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Olin dal Ťamovi následující posloupnost teček a čárek délky $4n$.

$$\underbrace{--\bullet\bullet--\bullet\bullet\ldots--\bullet\bullet}_{4n}$$

Ťam okamžitě rozpoznal morseovku bez oddělovačů a jal se do ní oddělovače dopnit. Chtěl ale, aby mu vznikala jen písmenka ze slova MATEMATIKA[1]. Kolika způsoby může Ťam provést toto dělení?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

ŠnEk se chce dostat z jednoho rohu krychle do protějšího, avšak plazit se chce pouze po hranách[2] a do večera stihne urazit nejvýše vzdálenost pěti hran. Pomoz šnEkovi zjistit, kolik takových cest má.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kolik je zlomků $\frac{p}{q}$ v základním tvaru takových, že $pq = 20!$ a $\frac{p}{q} < 1$?[3]

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme 25 kuliček, z nichž některé jsou bílé a některé černé, rozdělených do dvou krabiček. Pravděpodobnost, že vytáhneme z obou krabiček bílou kuličku, je 0,54. Spočti pravděpodobnost, že vytáhneme z obou krabiček černou kuličku.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Alča si do čtvercové sítě $n \times n$ zapisuje čísla tak, že číslo v každém políčku odpovídá počtu obdélníků v síti, které ho obsahují. Například pro $n = 3$:

---

[1] Slovo matematika se v morseovce zapíše jako $--/\bullet-/-/\bullet/--/\bullet-/-/\bullet\bullet/-\bullet-/\bullet-$.

[2] Otáčet se a měnit směr chce jen ve vrcholech, může jít víckrát po té samé hraně.

[3] Faktoriál z čísla $n$, zkráceně $n!$, je číslo $1 \cdot 2 \cdots n$.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 9 | 12 | 9 |
| 12 | 16 | 12 |
| 9 | 12 | 9 |

Dokaž, že součet všech čísel ve čtverci je roven[4] $\binom{n+2}{3}^2$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme všechna devíticiferná čísla taková, že každá z číslic se v jejich desítkovém zápisu vyskytuje právě jednou a nula se zde nevyskytuje. Rozhodni, zda můžeme tato čísla rozdělit na dvě skupiny tak, že součet druhých mocnin čísel v první skupině je roven součtu druhých mocnin čísel ve skupině druhé.

# Řešení 3. podzimní série

**1. úloha**

Monča potřebuje zatelefonovat Pepovi, avšak nemá u sebe svůj telefonní seznam PraSátek. Zná však předvolbu 723 a vzpomněla si, že Pepovo číslo obsahuje právě tři po sobě jdoucí nuly, přičemž žádná jiná nula se již v čísle nevyskytuje. Spočteš, z kolika možností bude Monča hádat?

České telefonní číslo má 9 cifer i s předvolbou. Trojici nul můžeme mít na čtyřech pozicích (723000∗∗∗, 723∗000∗∗, 723∗∗000∗ a 723∗∗∗000). Na pozice hvězdiček hledáme tři čísla nabývající hodnot 1 až 9 (= 9 cifer). Počet možností nahrazení trojice hvězdiček je tedy variace s opakováním $V(3,9) = 9^3$. To stačí vynásobit našimi čtyřmi možnostmi umístění nul a máme výsledek:

$$4 \cdot 9^3 = 2916.$$

Monča bude hádat z 2916 možných čísel.

Obecně pro $n$ cifer za předvolbou máme $n-2$ možností umístění trojice nul a $n-3$ zbylých pozic (hvězdiček). Výsledek lze zapsat $(n-2) \cdot 9^{n-3}$.

**2. úloha**

Vejtek má dvě ponožky, žlutou a zelenou. Považuje však za společensky nepřijatelné, aby každý den měl na sobě stejně oblečené ponožky. Urči, na kolik dní mu tyto dvě ponožky vystačí, pokud je může dávat na sebe v různém pořadí či naruby nebo nosit jen některou či žádnou.

Řešení si rozdělíme do několika částí, podle počtu a způsobu použití ponožek:

(a) Vejtek si obleče pouze jednu ponožku. Na výběr má ze dvou nohou, dvou barev a dvou obrácení ponožky. Má tedy $2^3 = 8$ možností.

(b) Použije obě, na každou nohu jednu. Nejprve zvolí na kterou nohu dá jakou ponožku. To může provést dvěma způsoby. Dále pro každou ponožku vybere, zda bude převrácená, či nikoliv. To jest dohromady $2 \cdot 2^2 = 8$ způsobů.

[4] Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ se definuje jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ a udává počet možností, jak z $n$ rozlišitelných předmětů vybrat $k$ bez ohledu na pořadí výběru.

(c) Obleče si obě ponožky na jednu nohu. Zde si kromě nohy, barvy a obrácení může zvolit i pořadí, tj. která ponožka bude svrchní a která spodní. Dostáváme navíc $2^4 = 16$ možností.

Sečteme-li jednotlivé možnosti a uvědomíme-li si, že Vejtek může jít i bos, dospějeme k výsledku 33.

**3. úloha**
Olin dal Ťamovi následující posloupnost teček a čárek délky $4n$.

$$\underbrace{- - \bullet \bullet - - \bullet \bullet \ldots - - \bullet \bullet}_{4n}$$

Ťam okamžitě rozpoznal morseovku bez oddělovačů a jal se do ní oddělovače dopnit. Chtěl ale, aby mu vznikala jen písmenka ze slova MATEMATIKA[5]. Kolika způsoby může Ťam provést toto dělení?

Nejprve si všimneme, že písmeno K ($- \bullet -$) se v posloupnosti nemůže nikde vyskytnout, protože jsou vždy dvě tečky vedle sebe (žádná není osamocená). Zbývají nám tedy písmena M ($--$), I ($\bullet\,\bullet$), T ($-$), E ($\bullet$) a A ($\bullet-$). Další pozorování je, že kdykoliv se v zadané posloupnosti vyskytne tečka bezprostředně za čárkou, musí být odděleny oddělovačem, neboť v žádném ze zbývajících písmen se znaky takto po sobě nevyskytují. V posloupnosti se tedy oddělovače určitě budou nacházet na těchto místech:

$$- - / \bullet \bullet - - / \bullet \bullet - - / \ldots / \bullet \bullet - - / \bullet \bullet\,.$$

Posloupnost se nám takto rozpadla na $n+1$ úseků, z nichž první a poslední jsou tvořeny dvěma stejnými znaky a prostředních $n-1$ je ve tvaru $\bullet\,\bullet - -$. Protože jsou tyto úseky odděleny oddělovači, můžeme je dále dělit samostatně, nezávisle na sobě. První a poslední úsek můžeme zřejmě rozdělit dvěma způsoby – buď oddělovač mezi znaky umístíme ($-/-$), nebo ne ($--$). Prostřední úseky lze rozdělit pěti způsoby:

$$\bullet\bullet / - -, \quad \bullet/\bullet / - -, \quad \bullet\bullet / - /-, \quad \bullet/\bullet / - /-, \quad \bullet/\bullet -/ -\,.$$

Protože je prostředních úseků $n-1$, lze je dohromady rozdělit oddělovači $5^{n-1}$ způsoby (pro každý úsek se možnosti vynásobí). Nakonec ještě každý z okrajových úseků dokážeme rozdělit dvěma způsoby. Celkový počet způsobů rozdělení posloupnosti oddělovači je tedy $2 \cdot 5^{n-1} \cdot 2 = 4 \cdot 5^{n-1}$.

**4. úloha**
ŠnEk se chce dostat z jednoho rohu krychle do protějšího, avšak plazit se chce pouze po hranách[6] a do večera stihne urazit nejvýše vzdálenost pěti hran. Pomoz šnEkovi zjistit, kolik takových cest má.

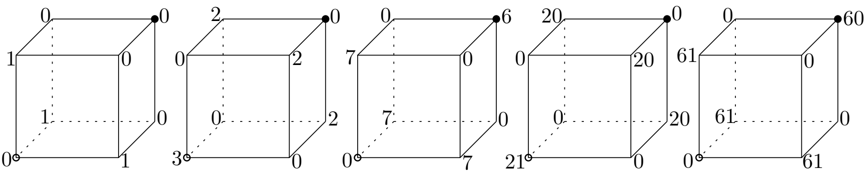
**První řešení:**
Umístěme krychli do souřadnicového systému tak, že šnEk začíná ve vrcholu $[0,0,0]$, má se dostat do vrcholu $[1,1,1]$ a hrany krychle jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Pokaždé, když šnEk přeleze jednu hranu, změní právě jednu souřadnici z 0 na 1 nebo naopak. Nejkratší

[5] Slovo matematika se v morseovce zapíše jako $- - / \bullet - / - / \bullet / - - / \bullet - / - / \bullet\bullet / - \bullet - / \bullet -$.
[6] Otáčet se a měnit směr chce jen ve vrcholech, může jít víckrát po té samé hraně.

cesta, kterou se dostane do protějšího vrcholu, má tedy délku 3, to když postupně změní všechny tři souřadnice z 0 na 1. Počet takových cest je $3! = 6$, protože záleží pouze na pořadí, v jakém to udělá. Snadno si rozmyslíš, že přeplazením libovolných čtyř hran se šnEk do cíle dostat nemůže. Zbývá poslední případ, kdy přeleze pět hran. V tomto případě dvě souřadnice změní pouze jednou a jednu třikrát. To může udělat $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ způsoby, neboť má tři možnosti, jak vybrat souřadnici, kterou změní třikrát, a $\frac{5!}{3!}$ způsobů, jak uspořádat 5 prvků (5 změn jedné ze souřadnic), z nichž 3 jsou stejné[7] (třikrát změní tu samou). Celkem má tedy šnEk na výběr z 66 různých cest.

**Druhé řešení:**

Toto řešení je založeno na následující jednoduché myšlence: Víme-li, kolika způsoby se šnEk přelezením $n$ hran může dostat do každého z vrcholů, umíme u každého vrcholu jednoduše spočítat, kolika způsoby se do něj lze dostat přelezením $n+1$ hran, a to tak, že sečteme čísla u všech jeho sousedů udávající, kolika způsoby se do toho kterého vrcholu dalo dostat přes $n$ hran. Podívejme se na následující obrázek. Předpokládejme, že šnEk leze z vrcholu označeného prázdným kolečkem do vrcholu označeného plným kolečkem. Na obrázku jsou u všech vrcholů vyznačeny počty způsobů, jak se do nich lze dostat přelezením po řadě jedné, dvou, tří, čtyř a pěti hran. Vypočítali jsme je postupně použitím výše popsané úvahy. Nyní se stačí podívat na čísla u cílového vrcholu. Vidíme, že šnEk má 6 různých cest na tři hrany vedoucích do cíle, dalších 60 využívajících pět hran a žádné jiné cesty po méně než pěti hranách neexistují. Opět jsme dospěli k celkovému počtu možností 66.




**Dodatek:**

Předpokládejme (jako mnoho řešitelů této úlohy), že pokud se šnEk dostane po třech hranách do cílového vrcholu, cesta pro něj končí a už nikam dál neleze. Pak musíme od právě nalezeného počtu 66 odečíst počet cest, které vedou na tři hrany do cíle a pak si ještě odskočí do jednoho se tří sousedních vrcholů a zpět. Takových cest je $6 \cdot 3 = 18$. Celkový počet možností, jak se může šnEk dostat do cíle, aniž by jím předtím prošel, je tedy pouze 48.

**5. úloha**

Kolik je zlomků $\frac{p}{q}$ v základním tvaru takových, že $pq = 20!$ a $\frac{p}{q} < 1$?[8]

Na čísla $p$ a $q$ klademe ze zadání tři podmínky. Za prvé musí být nesoudělná, neboť zlomek $\frac{p}{q}$ se nemá dát krátit. Za druhé musí být součin $p \cdot q$ roven číslu 20!. Třetí podmínku $p < q$ ponechejme zatím stranou a rozložme si 20! na prvočísla:

---

[7] Pro lepší pochopení výrazu $\frac{5!}{3!}$ si představ, že zkoumáš počet možností, jak dát za sebe tři modré, jednu červenou a jednu zelenou kuličku. Kdyby měla každá kulička jinou barvu, tak je to 5!, ale že mají tři stejnou barvu, tak musíme výsledek vydělit 3!.

[8] Faktoriál z čísla $n$, zkráceně $n!$, je číslo $1 \cdot 2 \cdots n$.

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Z nesoudělnosti $p$ a $q$ plyne, že pokud nějaké z prvočísel dělí $p$, pak nemůže dělit $q$, a tedy musí dělit $p$ rovnou v té mocnině, ve které dělí číslo 20!. Totéž platí i naopak. Mezi čitatele a jmenovatele tedy vlastně nerozdělujeme prvočísla, ale prvočísla ve svých úplných mocninách. Množinu těchto si označme $M$.

$$M = \{2^{18}, 3^8, 5^4, 7^2, 11, 13, 17, 19\}.$$

U každého z osmi prvků $M$ si vybíráme, zda ho dáme do čitatele nebo do jmenovatele. Máme proto celkem $2^8 = 256$ možností jak sestavit zlomek, aby vyhovoval prvním dvěma podmínkám (pokud do jedné části zlomku zrovna nepřipadne nic, dáme tam jedničku).

Teď je ještě potřeba zakomponovat do řešení podmínku $p < q$. To je však snadné, pokud si uvědomíme, že vyhovuje-li zlomek $\frac{a}{b}$ prvním dvěma podmínkám, vyhovuje jim i zlomek $\frac{b}{a}$. Oněch 256 zlomků lze tedy uspořádat do dvojic navzájem vůči sobě převrácených zlomků, z nichž právě jeden bude vždy větší než 1 a druhý menší než 1. Na okraj se hodí zmínit, že žádný zlomek určitě nebude roven jedné, jelikož čitatel a jmenovatel jsou vždy různá čísla.

Hledaný počet zlomků je tedy $256 : 2 = 128$.

**6. úloha**

Mějme 25 kuliček, z nichž některé jsou bílé a některé černé, rozdělených do dvou krabiček. Pravděpodobnost, že vytáhneme z obou krabiček bílou kuličku, je 0,54. Spočti pravděpodobnost, že vytáhneme z obou krabiček černou kuličku.

Označme $c_1 > c_2$ počty kuliček ve větší a menší krabičce (rozuměj s větším a menším počtem kuliček). Zjevně $c_1, c_2 > 0$, aby bylo co tahat. Dále označme $b_1, b_2$ počty bílých kuliček ve větší a menší krabičce.

Pravděpodobnost vytáhnutí bílé kuličky z větší krabičky je $\frac{b_1}{c_1}$, z menší krabičky $\frac{b_2}{c_2}$, a protože jsou tyto pravděpodobnosti nezávislé, tak podle zadání platí

$$\frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} = 0{,}54,$$

což po úpravě dává

$$50 b_1 b_2 = 27 c_1 c_2.$$

Celkem je kuliček $c_1 + c_2 = 25$ a z předchozí rovnice plyne $50 \mid c_1 c_2$, máme tak jen dvě možnosti na počty kuliček v krabičkách: (1): $c_1 = 20$ a $c_2 = 5$ nebo (2): $c_1 = 15$ a $c_2 = 10$.

(1) Jelikož $27 \mid b_1 b_2$, $b_2 \leq c_2$ a $b_2 > 0$, tak je jedinou možností pro menší krabičku $b_2 = 3$. Dopočtem zjistíme $b_1 = 18$ a pravděpodobnost vytáhnutí černých kuliček z obou krabiček je pak

$$\frac{c_1 - b_1}{c_1} \cdot \frac{c_2 - b_2}{c_2} = \frac{20 - 18}{20} \cdot \frac{5 - 3}{5} = 0{,}04.$$

(2) Protože $b_1 b_2 = \frac{27}{50} \cdot c_1 c_2 = \frac{27}{50} \cdot 15 \cdot 10 = 81$ a $b_1, b_2 < 25$, tak nutně $b_1 = b_2 = 9$. Pravděpodobnost vytáhnutí černých kuliček z obou krabiček je

$$\frac{c_1 - b_1}{c_1} \cdot \frac{c_2 - b_2}{c_2} = \frac{15 - 9}{15} \cdot \frac{10 - 9}{10} = 0{,}04.$$

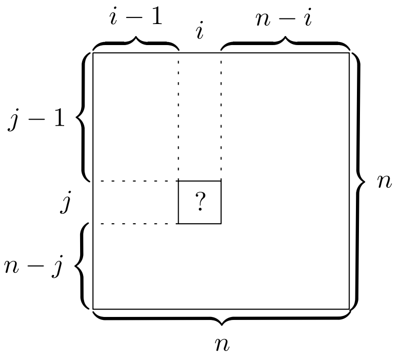
V obou možných případech vyšla hledaná pravděpodobnost 0,04, což je odpověď na naši úlohu.

**7. úloha**
Alča si do čtvercové sítě $n \times n$ zapisuje čísla tak, že číslo v každém políčku odpovídá počtu obdélníků v síti, které ho obsahují. Například pro $n = 3$:

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 12 | 9 |
| 12 | 16 | 12 |
| 9 | 12 | 9 |

Dokaž, že součet všech čísel ve čtverci je roven[9] $\binom{n+2}{3}^2$.

**První řešení:**
Podívejme se, jak v tabulce $n \times n$ vypadá číslo na pozici[10] $[i,j]$, hledáme tedy všechny obdélníky, ve kterých se tato pozice nachází.




Každý obdélník je jednoznačně zadán polohou svého levého horního a pravého spodního vrcholu. Pokud chceme, aby čtvereček $[i,j]$ ležel uvnitř, máme pro výběr polohy levého horního rohu celkem $i \cdot j$ možností, neboť ten musí ležet někde v horním levém obdélníku $i \times j$. Obdobně můžeme pravý spodní roh obdélníka, ve kterém leží čtvereček $[i,j]$, vybrat celkem $(n-i+1)(n-j+1)$ možnostmi. Takto jsme popsali všechny obdélníky obsahující čtvereček $[i,j]$, tudíž v něm bude číslo $ij(n-i+1)(n-j+1)$.

Hledáme-li součet všech čísel v tabulce $n \times n$, hledáme vlastně součet

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij(n-i+1)(n-j+1) = \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)\sum_{j=1}^{n} j(n-j+1) = \left(\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)\right)^2 .$$

[9]Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ se definuje jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ a udává počet možností, jak z $n$ rozlišitelných předmětů vybrat $k$ bez ohledu na pořadí výběru.

[10]Pozice vlevo nahoře je $[1,1]$.

Nyní už stačí jen spočítat hledaný součet. Zde použijeme známé vztahy

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

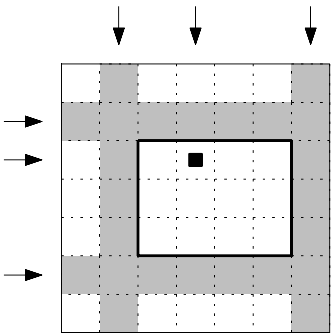
Kdo je nezná, tak se s nimi může seznámit v naší knihovně v příspěvku *sčitovanie (sčítání sum).* Máme tedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n}(n+1)i - i^2 = (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \\ = \frac{(n+1)n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \\ = \frac{n(n+1)(3n+3-2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} &= \\ = \binom{n+2}{3}&,\end{aligned}$$

a proto nám celkový součet vychází $\binom{n+2}{3}^2$, což jsme chtěli dokázat.

**Druhé řešení – trikové:**
Přeformulujeme-li zadání, hledáme vlastně počet dvojic [obdélník, políčko] takových, že obdélník obsahuje políčko. K řešení nám vystačí pouhá kombinatorická interpretace, počítejme počet těchto dvojic [obdélník, políčko].

Vezměme si danou tabulku $n \times n$ a přidejme dva řádky a dva sloupce, vždy jeden na začátek a jeden na konec tak, že nám vznikne tabulka $(n+2) \times (n+2)$, která obsahuje původní tabulku uprostřed. Zvolme nyní tři řádky a tři sloupce, jako na obrázku.



Každý takový výběr nám jednoznačně určuje dvojici [obdélník, políčko] v původním čtverci $n \times n$. První a poslední vybraný řádek společně s prvním a posledním sloupcem vytvoří hranice obdélníku, průnik druhého vybraného řádku a druhého vybraného sloupce označují hledané políčko. Projdeme-li tedy všechny trojice řádků a sloupců, dostaneme libovolnou dvojici [obdélník, políčko]. Tři řádky a tři sloupce můžeme zvolit celkem $\binom{n+2}{3}^2$ způsoby[11], což je i součet v původní tabulce $n \times n$.

**8. úloha**
Mějme všechna devíticiferná čísla taková, že každá z číslic se v jejich desítkovém zápisu vyskytuje právě jednou a nula se zde nevyskytuje. Rozhodni, zda můžeme tato čísla rozdělit na dvě skupiny tak, že součet druhých mocnin čísel v první skupině je roven součtu druhých mocnin čísel ve skupině druhé.

Rozdělení existuje, čísla přidělíme do skupin podle posledního trojčíslí. Symbol $\overline{abc}$ od teď bude značit trojmístné číslo s ciframi $a$, $b$, $c$ v tomto pořadí.

Zkoušením pro trojciferná čísla s různými ciframi $a$, $b$, $c$ bychom zjistili

$$\overline{abc}^{\,2} + \overline{bca}^{\,2} + \overline{cab}^{\,2} = \overline{acb}^{\,2} + \overline{bac}^{\,2} + \overline{cba}^{\,2},$$
$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{cba}.$$

Toho hned využijeme v rovnosti

$$(k + \overline{abc})^2 + (k + \overline{bca})^2 + (k + \overline{cab})^2 = (k + \overline{acb})^2 + (k + \overline{bac})^2 + (k + \overline{cba})^2,$$

která, jak by bylo vidno z roznásobení, platí pro libovolné celé číslo $k$.

Každou skupinu čísel se shodným prvním šestičíslím umíme díky předchozí rovnosti rozdělit do dvou skupin tak, že se bude součet jejich druhých mocnin rovnat. Čísel je šest, protože jsou zbylé tři cifry až na své pořadí jednoznačně určeny.

$$\overline{\text{šestičíslí}\,abc}^{\,2} + \overline{\text{šestičíslí}\,bca}^{\,2} + \overline{\text{šestičíslí}\,cab}^{\,2} = \overline{\text{šestičíslí}\,acb}^{\,2} + \overline{\text{šestičíslí}\,bac}^{\,2} + \overline{\text{šestičíslí}\,cba}^{\,2}.$$

Všechna čísla jsme rozdělili, úloha je vyřešena.

[11] Dvakrát vybíráme trojice z $(n+2)$-tic.