4. jarní série

Téma: Finální myšmaš

Datum odeslání: 10. KVĚTNA 2010

1. ÚLOHA

Pro reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Ukažte, že vztah

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

(a) neplatí pro žádné n sudé, (2 BODY)

(b) platí pro každé n liché. (3 BODY)

2. ÚLOHA

(a) Určete všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro něž je

$$4^x+4^y$$

čtvercem.[1] (2 BODY)

(b) Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, pro něž je

$$4^x+4^y+4^z$$

čtvercem. (3 BODY)

3. ÚLOHA

(a) Šavlík dostal od Kuby rovnostranný trojúhelník o straně 47 rozdělený na 47^2 shodných rovnostranných trojúhelníčků. Nešťastnou náhodou se však tři rohové trojúhelníčky odlouply. Dokáže Šavlík vydláždit vzniklý obrazec kosočtverci o straně 1 a jednom vnitřním úhlu 60°? (2 BODY)

(b) Kuba dostal od Šavlíka pravidelný šestiúhelník o straně n. Půjčil si Šavlíkovy kosočtverce a celý šestiúhelník jimi vydláždil. Všiml si, že kosočtverce může rozdělit do tří skupin podle toho, jak jsou v šestiúhelníku natočené. Dokažte, že v každé skupině musí být stejný počet kosočtverců. (3 BODY)

4. ÚLOHA

(a) Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $|\sphericalangle ABC| = 90°$) a uvnitř úsečky AB bod M takový, že $|\sphericalangle CMD| = 90°$. Ukažte, že kolmice na MD vedená bodem A, kolmice na MC vedená bodem B a přímka CD procházejí jedním bodem. (2 BODY)

---

[1] Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla. Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

(b) Je dán trojúhelník ABC a uvnitř úsečky BC bod D. Kružnice k se středem K, jež má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou ABC, se dotýká úseček AD a BD postupně v bodech P a Q. Podobně kružnice l se středem L má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou a dotýká se úseček AD, DC postupně v bodech R a S. Ukažte, že přímky KL, PQ a RS všechny procházejí středem kružnice vepsané ABC. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) Rozhodněte, zda lze obarvit mřížové body[2] roviny dvěma barvami tak, aby žádné dva body o vzdálenosti 5 neměly stejnou barvu. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze obarvit mřížové body roviny dvěma barvami tak, aby žádné dva body o vzdálenosti n neměly stejnou barvu. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel (x, y), které jsou řešením rovnice

$$\frac{1}{x+2009} + \frac{2010}{y+2010} = 1.$$

(2 BODY)

(b) Pro reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_1 &= x_2 x_1^2, \\ x_3 - 2x_2 &= x_3 x_2^2, \\ &\vdots \\ x_1 - 2x_n &= x_1 x_n^2. \end{aligned}$$

(3 BODY)

7. ÚLOHA

(a) Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé: kdykoliv je prostor rozřezán na jednotkové krychle, každá krychle sdílí celou svou stěnu s alespoň jednou jinou. (2 BODY)

(b) Ukažte, že existuje 2010 konvexních mnohostěnů, které dokážeme rozmístit do prostoru tak, že se každé dva dotýkají, ale přitom žádné tři nemají společný bod. (3 BODY)

Řešení 4. jarní série

1. úloha

Pro reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Ukažte, že vztah

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

[2] To jsou body s celočíselnými souřadnicemi.

(a) neplatí pro žádné n sudé,

(b) platí pro každé n liché.

Ze zadání vidíme, že čísla a, b, c musí být různá od nuly.

(a) Předpokládejme podle zadání, že n je sudé. Pro libovolné nenulové reálné číslo r tak platí, že $r^n > 0$, a je tedy

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{(a^n + b^n + c^n)}.$$

Pokud k levé straně nerovnosti přičteme další dva kladné členy ($1/b^n$ a $1/c^n$), určitě nenastane rovnost. Tím jsme ukázali, že vztah neplatí pro žádné sudé n.

(b) Vynásobme rovnost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{(a+b+c)}$$

jmenovateli, abychom se zbavili zlomků. Dostaneme tvar

$$3abc + ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c = abc,$$

který upravíme na

$$2abc + ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c = 0.$$

Z něj vytkneme výraz $(a + b)$ a následně i $(a + c)$:

$$(a+b) \cdot (bc + c^2 + ac + ab) = 0,$$
$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = 0.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když je alespoň jedna závorka rovna nule. Výraz je symetrický, tedy ať je to bez újmy na obecnosti první závorka: $a = -b$. Obdobně upravme i rovnost

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(a^n + b^n + c^n)}$$

do tvaru

$$(a^n + b^n) \cdot (a^n + c^n) \cdot (b^n + c^n) = 0.$$

Z něj ihned vidíme, že pro liché n je při předpokladu $a = -b$ závorka $(a^n + b^n)$ nulová. Dokazovaná rovnost tedy platí.

2. úloha

(a) Určete všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro něž je

$$4^x + 4^y$$

čtvercem.[3]

[3]Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla. Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

(b) Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, pro něž je

$$4^x + 4^y + 4^z$$

čtvercem.

(a)
Podľa Radka Marciňu:
Môžeme predpokladať, že $x \geq y$. Označme $p = x - y$, kde p je celé nezáporné číslo. Potom

$$4^x + 4^y = (2^y)^2 (4^p + 1) .$$

Uvedomme si, že ak švorec vydelíme štvorcom, dostaneme opäť štvorec. Takže $4^p + 1$ musí byť štvorec, keďže sme pôvodný výraz vydelili výrazom $(2^y)^2$. Lenže $4^p + 1$ nemôže byť štvorcom, pretože sa nachádza medzi dvoma za sebou idúcimi štvorcami:

$$(2^p)^2 = 4^p < 4^p + 1 < 4^p + 2 \cdot 2^p + 1 = (2^p + 1)^2 .$$

Úloha teda nemá riešenie.

(b)
Podle Mirka Olšáka:
Postupujme podobně jako v části (a). Nejdříve BÚNO předpokládejme, že $x \geq y \geq z$. Označme $p = x - z$ a $q = y - z$. Zjevně $p \geq q$, p, q jsou celá nezáporná čísla a platí

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^z(4^p + 4^q + 1).$$

Stačí zjistit, kdy je $V = 4^p + 4^q + 1$ čtverec. Pokud by q bylo rovno nule, pak by

$$(2^p)^2 = 4^p < V = (2^p)^2 + 1 + 1 < (2^p + 1)^2,$$

takže dále mějme $p, q \in \mathbb{N}$. Je tedy jednak V lichý a jednak $V \geq 9$. Upravme ($a \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} 4^p + 4^q + 1 &= (2a + 1)^2, \\ 4^p + 4^q + 1 &= 4a^2 + 4a + 1, \\ 4^{q-1}(4^{p-q} + 1) &= a(a + 1). \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Čísla a a $a + 1$ jsou nesoudělná, takže stačí rozebrat dva případy.

(i) Pokud $4^{q-1} | a$, označme $a = b \cdot 4^{q-1}$. Po dosazení do ($\heartsuit$) získáme

$$4^{p-q} = 4^{q-1}b^2 + b - 1.$$

Pravou stranu odhadneme dvěma sousedními čtverci jako

$$(2^{q-1}b)^2 \leq 4^{q-1}b^2 + b - 1 < (2^{q-1}b + 1)^2,$$

kde rovnost v první nerovnosti nastává jen pro $b = 1$.

Je-li $b = 1$, pak musí být $4^{p-q} + 1 = a + 1$, a tedy $p - q = q - 1$. Tomu odpovídají trojice tvaru $(x, y, z) = (2t - u - 1, t, u)$, kde $t > u$. Všechny trojice tohoto tvaru jsou zároveň řešením úlohy, neboť

$$4^{2t-u-1} + 4^t + 4^u = (2^{2t-u-1} + 2^u)^2.$$

(ii) Pokud $4^{q-1}|a+1$, označme analogicky $a+1 = b \cdot 4^{q-1}$, čímž s pomocí (♡) získáme

$$4^{p-q} = 4^{q-1}b^2 - b - 1.$$

Pravou stranu se opět pokusíme odhadnout sousedními čtverci. Je-li $b \geq 3$, pak fungují odhady

$$(2^{q-1}b - 1)^2 = 4^{q-1}b^2 - 2^q b + 1 < 4^{q-1}b^2 - b - 1 < (2^{q-1}b)^2$$

a žádné řešení nedostáváme.

Je-li $b = 2$, mělo by platit $4^{p-q} = 4^q - 3$, což je možné jen v případě $p = q, q = 1$, který už je ovšem zahrnutý v bodě (i).

Konečně je-li $b = 1$, mělo by platit $4^{p-q} = 4^{q-1} - 2$, což ale neplatí nikdy, neboť žádné dvě mocniny čtyřky se neliší o dvojku.

Všechna řešení úlohy jsou tvaru $(x, y, z) = (2t - u - 1, t, u)$, kde $t > u$, plus řešení, která získáme přeuspořádáním proměnných x, y, z.

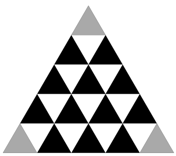
3. úloha

(a) Šavlík dostal od Kuby rovnostranný trojúhelník o straně 47 rozdělený na 47^2 shodných rovnostranných trojúhelníčků. Nešťastnou náhodou se však tři rohové trojúhelníčky odlouply. Dokáže Šavlík vydláždit vzniklý obrazec kosočtverci o straně 1 a jednom vnitřním úhlu 60°?

(b) Kuba dostal od Šavlíka pravidelný šestiúhelník o straně n. Půjčil si Šavlíkovy kosočtverce a celý šestiúhelník jimi vydláždil. Všiml si, že kosočtverce může rozdělit do tří skupin podle toho, jak jsou v šestiúhelníku natočené. Dokažte, že v každé skupině musí být stejný počet kosočtverců.

Uvedomme si, že kosoštvorce, ktorými dláždime, musia byť zarovnané do trojuholníkovej mriežky so stranou 1 (v ktorej sú zarovnané aj naše dláždené útvary).[4] Tým pádom jeden kosoštvorec pokryje vždy dva trojuholníky z tejto siete.

(a) Trojuholníčky pôvodného trojuholníka ofarbíme šachovnicovo, s čiernou farbou v rohu. V každom riadku je o jeden čierny trojuholníček viac, takže celkovo je čiernych viac o 47. Po odlupnutí troch rohových ich teda bude o 44 viac. Lenže každý kosoštvorec pokryje jeden biely a jeden čierny trojuholníček, takže ak by sa dal obrazec vydláždiť, muselo by ich byť rovnako. A to nie je pravda, takže Šavlík obrazec vydláždiť nedokáže.



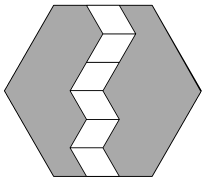
(b) **Riešenie podľa Miška:** Natočím si šesťuholník ako na obrázku a zameriam sa na jeden dielik jeho spodnej strany. Dokážem z neho jednoznačne viesť cestu po kosoštvorcoch tak, že sa

[4] To sa dá dokázať napr. indukciou. Náznak dôkazu: V každom kroku si vyberieme nejaký vrchol dláždeného mnohouholníka. Ten musí byť pokrytý nejakým kosoštvorcom ktorý prilieha k strane mnohouholníka. Musí byť teda zarovnaný do mriežky a po jeho odobratí dostaneme mnohouholník s menším obsahom, pre ktorý použijeme indukčný predpoklad.

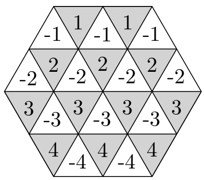
napojím vždy na hranu rovnobežnú s pôvodnou stranou. Nutne teda musím skončiť v jednom dieliku hornej strany.

Z každého dielika spodnej strany viem viesť práve jednu cestu a každý kosoštvorec, ktorý ma aspoň jednu hranu rovnobežnú s touto stranou, musí v nejakej ceste byť (ináč by som z neho mohol viesť cestu, ktorá nemá kde skončiť). Teda viem spočítať ich počet – je to dĺžka strany krát počet riadkov, čiže $n \times 2n = 2n^2$.

Takto som spočítal všetky kosoštvorce okrem tých orientovaných zvislo, ktorých musí byť zvyšný počet n^2. Zopakovaním postupu pre ostatné strany zistíme, že z každého typu musí byť kosoštvorcov rovnako.



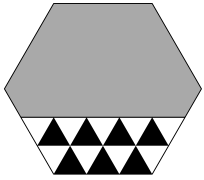
Riešenie podľa Mirka Olšáka: Ohodnoťme políčka šesťuholníka podľa obrázka, t.j. čierne trojuholníky v r-tom riadku budú mať číslo r a biele číslo $-r$. Keď teraz do mriežky umiestníme zvislo orientovaný kosoštvorec, zakryje políčka so súčtom 1 a kosoštvorce ostatných typov zakryjú súčet 0. Z toho vyplýva, že súčet čísel je počet zvislých kosoštvorcov. Otáčaním tohoto ohodnotenia však pomocou rovnakej úvahy zistíme, že aj kosoštvorcov ostatných typov musí byť ten istý počet.



Riešenie podľa Lukáše Zavřela: Všimnime si, že každý zvislý kosoštvorec pretína práve jednu vodorovnú čiaru a iné kosoštvorce vodorovné čiary nepretínajú. Pre m-tú čiaru od kraja ($m \leq n$) spočítame, koľko kosoštvorcov ju pretína. (Na obr. je $m = 2$.)

Ofarbime trojuholníčky ako na obrázku. V každom riadku je o jeden biely trojuholníček viac než čiernych, takže pod m-tou čiarou je ich o m viac. Každý kosoštvorec, ktorý nepretína m-tú čiaru pokryje jeden čierny a jeden biely trojuholníček, zatiaľ čo pretínajúci kosoštvorec pokryje len jeden biely.

Z toho vyplýva, že m-tú čiaru pretína práve m zvislých kosoštvorcov a ich celkový počet vieme zistiť súčtom cez všetky vodorovné čiary. Rovnaký počet musíme dostať aj pre ostatné typy keď úvahu prevedieme pre otočený šesťuholník.



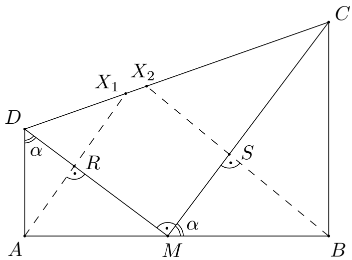
4. úloha

(a) Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $|\sphericalangle ABC| = 90°$) a uvnitř úsečky AB bod M takový, že $|\sphericalangle CMD| = 90°$. Ukažte, že kolmice na MD vedená bodem A, kolmice na MC vedená bodem B a přímka CD procházejí jedním bodem.

(b) Je dán trojúhelník ABC a uvnitř úsečky BC bod D. Kružnice k se středem K, jež má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou ABC, se dotýká úseček AD a BD postupně v bodech P a Q. Podobně kružnice l se středem L má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou a dotýká se úseček AD, DC postupně v bodech R a S. Ukažte, že přímky KL, PQ a RS všechny procházejí středem kružnice vepsané ABC.

(a) **Podle Davida Votavy:**

Označme R průsečík úsečky MD a kolmice na ni z bodu A a podobně označme S průsečík MC a kolmice z bodu B. Dále nechť tyto kolmice protnou úsečku CD postupně v bodech X_1, X_2. Ukážeme, že body X_1, X_2 dělí stranu CD ve stejném poměru, čímž bude tvrzení (a) dokázáno.



Označme $|\sphericalangle ADM| = \alpha$. Pak $|\sphericalangle DMA| = 90° - \alpha$, $|\sphericalangle BMC| = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ a $|\sphericalangle MCB| = 90° - \alpha$, takže trojúhelníky MAD a CBM jsou podobné. Výšky z odpovídajících si vrcholů podobných trojúhelníků dělí protější stranu ve stejném poměru, takže $|DR| : |RM| = |MS| : |SC|$.

Jelikož RX_1 je rovnoběžná s MC (obě jsou kolmé na DM), platí $|DX_1| : |X_1C| = |DR| : |RM|$. Obdobně ukážeme i rovnost $|DX_2| : |X_2C| = |MS| : |SC|$. Celkem tedy

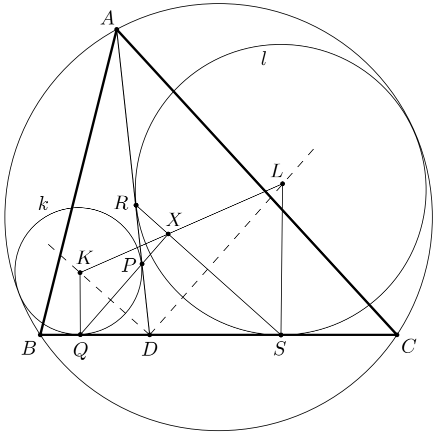
$$\frac{|DX_1|}{|X_1C|} = \frac{|DR|}{|RM|} = \frac{|MS|}{|SC|} = \frac{|DX_2|}{|X_2C|}$$

a jsme hotovi.

(b) **První část řešení – dílčí problémy, příprava.**

Nejdřív si uvědomíme, že jsme v části (a) ukázali, že přímky KL, PQ a RS procházejí jedním bodem. Stačí přejmenovat body Q, S, L, K, D na A, B, C, D, M. Čtyřúhelník $QSLK$ je totiž pravoúhlý lichoběžník, pro úhel KDL platí $|\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KDA| + |\sphericalangle ADL| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle BDA| +$

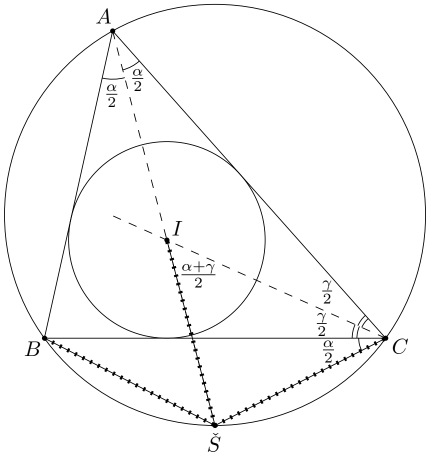
$+ |\sphericalangle ADC|) = 90^\circ$ a QP resp. SR jsou skutečně kolmé na DK resp. DL.



Zbývá tedy dokázat, že oním společným průsečíkem je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC (označme ho I). K tomu bude stačit, ukážeme-li, že I leží na přímce RS (shodnými argumenty bychom ukázali, že I leží i na PQ). Než se do toho dáme, připomeneme si dvě tvrzení:

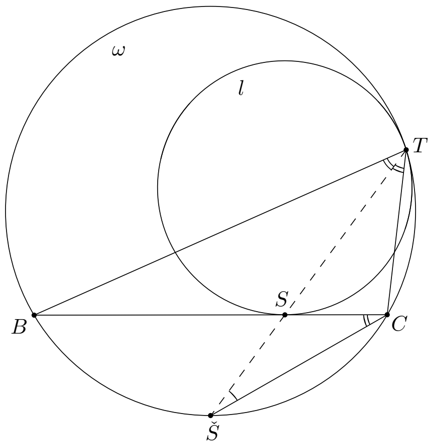
Tvrzení 1. *V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu α kružnici opsanou v bodě $\check{S}$. Označíme-li I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, pak platí $|\check{S}B| = |\check{S}C| = |\check{S}I|$.*

Důkaz. Obloukům $\check{S}B$, $\check{S}C$ přísluší stejně velké obvodové úhly $\frac{1}{2}\alpha$, takže jsou tyto oblouky stejně dlouhé, a tedy $|\check{S}B| = |\check{S}C|$. Vyjádřeme nyní velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku $\check{S}CI$. Platí $|\sphericalangle \check{S}IC| = |\sphericalangle \check{S}AC| + |\sphericalangle ACI| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ a $|\sphericalangle IC\check{S}| = |\sphericalangle ICB| + |\sphericalangle BC\check{S}| = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha$, takže trojúhelník $\check{S}IC$ je rovnoramenný a $|\check{S}C| = |\check{S}I|$.



Tvrzení 2. *Nechť kružnice l a ω mají vnitřní dotyk v bodě T. Na kružnici ω leží body B, C tak, že úsečka BC je tečnou kružnice l v bodě S. Pak přímka TS je osou úhlu BTC, a tedy protíná kružnici ω ve středu oblouku BC. Označíme-li tento střed oblouku písmenem $\check{S}$, pak navíc platí $|\check{S}S| \cdot |\check{S}T| = |\check{S}C|^2$.*

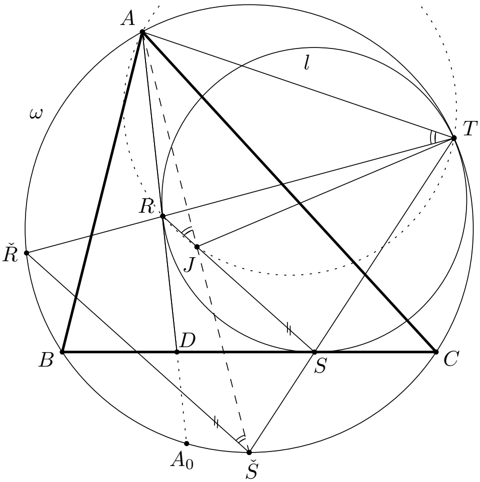
Důkaz. BÚNO buď úsečka BC vodorovná a kružnice l „nad“ ní. Uvažme stejnolehlost se středem T převádějící l na ω. V této stejnolehlosti se zobrazí „dolní bod“ kružnice l (tj. bod S) na „dolní bod“ kružnice ω. Tímto „dolním bodem“ kružnice ω je ale střed oblouku BC a první část tvrzení je dokázána.



Pro důkaz druhé části využijeme toho, že $|\sphericalangle BC\check{S}| = |\sphericalangle BT\check{S}| = |\sphericalangle \check{S}TC|$, takže trojúhelníky $\check{S}SC$ a $\check{S}CT$ se shodují ve dvou vnitřních úhlech, a jsou tedy podobné. Podobnost $|\check{S}S| : |\check{S}C| = |\check{S}C| : |\check{S}T|$ můžeme zapsat i jako rovnost součinů $|\check{S}S| \cdot |\check{S}T| = |\check{S}C|^2$.

Druhá část řešení – přeformulování na úlohu o rovnosti dvou úhlů.

Označme ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC, dále T bod dotyku kružnic l a ω, A_0 druhý průsečík přímky AD a kružnice ω a nakonec $\check{R}, \check{S}$ obrazy bodů R, S ve stejnolehlosti, která zobrazí l na ω. Díky *Tvrzení 2.* jsou body $\check{R}$ resp. $\check{S}$ středy oblouků AA_0 resp. BC a díky stejnolehlosti je $\check{R}\check{S}$ rovnoběžné s RS. Označme ještě písmenem J průsečík přímek $A\check{S}$ a RS. Pokud ukážeme, že J je ve skutečnosti I (tj. střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC), vyhrajeme.



Bod J určitě leží na ose úhlu α (to je přímka $A\check{S}$). Zbývá dokázat, že na této ose leží „správně daleko“. Podle *Tvrzení 1.* tak musíme ukázat shodu délek $|\check{S}J| = |\check{S}C|$. Jelikož platí $|\check{S}C|^2 = |\check{S}S| \cdot |\check{S}T|$, stačí ukázat $|\check{S}J|^2 = |\check{S}S| \cdot |\check{S}T|$.

Představme si v obrázku na okamžik kružnici opsanou trojúhelníku JST. Součin $|\check{S}S| \cdot |\check{S}T|$ vyjadřuje mocnost bodu $\check{S}$ k této kružnici. Rovnost v kýženém vztahu tedy nastane právě tehdy, bude-li přímka $\check{S}J$ tečnou této kružnice. Z *Věty o obvodovém a úsekovém úhlu* nám k tomu postačí, ukážeme-li, že $|\sphericalangle JTS| = |\sphericalangle \check{S}JS|$.[5]

Tím jsme těžkou úlohu zdárně převedli na tvrzení o shodnosti dvou úhlů.

Třetí část řešení – finální útok.

Úhel $\check{S}JS$ umíme po obrázku přenést na několik dalších míst. Z vrcholových úhlů, rovnoběžnosti a obvodových úhlů máme postupně

$$|\sphericalangle \check{S}JS| = |\sphericalangle AJR| = |\sphericalangle A\check{S}\check{R}| = |\sphericalangle AT\check{R}|.$$

Krom faktu, že úhel $\check{S}JS$ odpovídá na kružnici ω oblouku délky $\check{R}A$, si všimneme ještě toho, že úsečka RA je z bodů J a T vidět pod stejným úhlem. Čtyřúhelník $ARJT$ je tedy tětivový. Pomocí tohoto zjištění vyjádříme

$$|\sphericalangle JTS| = |\sphericalangle RT\check{S}| - |\sphericalangle RTJ| = |\sphericalangle \check{R}T\check{S}| - |\sphericalangle RAJ| = |\sphericalangle \check{R}A\check{S}| - |\sphericalangle A_0A\check{S}| = |\sphericalangle \check{R}AA_0|.$$

Jelikož bod $\check{R}$ je díky *Tvrzení 2.* střed oblouku AA_0, mají úhly $AT\check{R}$ a $\check{R}AA_0$ stejnou velikost, tedy i úhly $\check{S}JS$ a JST mají stejnou velikost, přímka $\check{S}J$ je skutečně tečnou kružnice opsané trojúhelníku JST, a jelikož $|\check{S}J|^2 = |\check{S}S| \cdot |\check{S}T| = |\check{S}C|^2 = |\check{S}I|^2$, plyne z toho, že bod J nejenže

[5] Alternativně si můžeme uvědomit, že pokud dokážeme rovnost $|\sphericalangle JTS| = |\sphericalangle \check{S}JS|$, pak budou trojúhelníky JTŠ a $SJ\check{S}$ podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti však již vztah $|\check{S}J|^2 = |\check{S}S| \cdot |\check{S}T|$ plyne bezprostředně.

leží (stejně jako I) na ose úhlu α, ale má od bodu $\check{S}$ i naprosto stejnou vzdálenost. Bod J je tedy středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, který tím pádem leží na přímce RS. Analogicky bychom ukázali, že I leží i na přímce PQ, a anžto z části (a) víme, že přímky KL, PQ a RS se protínají v jednom bodě, je tímto bodem už nutně bod I.

5. úloha

(a) Rozhodněte, zda lze obarvit mřížové body[6] roviny dvěma barvami tak, aby žádné dva body o vzdálenosti 5 neměly stejnou barvu.

(b) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze obarvit mřížové body roviny dvěma barvami tak, aby žádné dva body o vzdálenosti n neměly stejnou barvu.

(a) Dokážeme, že šachovnicové obarvení bodů má požadovanou vlastnost. Stačí uvážit, které mřížové body mají od nějakého bodu $[x, y]$ vzdálenost 5: jednak to jsou ty, které mají jednu souřadnici stejnou jako zadaný bod – $[x \pm 5, y]$ a $[x, y \pm 5]$, a pak ještě body se složitějším umístěním – $[x \pm 3, y \pm 4]$ a $[x \pm 4, y \pm 3]$. Snadno ověříme, že při šachovnicovém obarvení mají všechny tyto body jinou barvu než bod $[x, y]$.

(b) Nejprve ukážeme, že pro lichá n postačuje stejně jako v případu (a) šachovnicové obarvení. Zvolme si libovolně některý z mřížových bodů (dále ho budeme značit B) a BÚNO předpokládejme, že je obarvený bílou barvou. Body, mají jednu souřadnici stejnou jako B a jsou ve vzdálenosti n, jsou zřejmě černé. Podívejme se, jak je to s ostatními body – nechť nějaký další bod C leží ve vzdálenosti n od B, jeho vzdálenost od B ve vodorovném směru je x a ve svislém směru y ($x, y \in \mathbb{N}$). Podle Pythagorovy věty platí $x^2 + y^2 = n^2$. Jelikož je n liché, musí být jedno z čísel x, y liché a jedno sudé (v ostatních případech by bylo $x^2 + y^2 = n^2$ sudé, a tedy i n sudé).

Uvažujme nyní následovně: pokud bychom se chtěli „přesunout" z B do C pouze po mřížových bodech po co nejkratší cestě, potřebovali bychom na to $x + y$ kroků (krokem se myslí přesun na sousední mřížový bod). Při každém kroku se (díky šachovnicovému obarvení) změní barva bodu, na kterém se nacházíme. Je patrné, že po sudém počtu kroků se dostaneme vždy na bod se stejnou barvou, jako byl ten výchozí, oproti tomu po lichém počtu kroků se dostaneme na bod s jinou barvou. Protože je $x + y$ liché číslo, dostaneme se po $x + y$ krocích z B vždy do černého bodu, C tedy musí být černý bod. Všechny body o vzdálenosti n od bodu B jsou tedy černé, což se mělo dokázat.

Nyní se zaměříme na sudá n. Nejprve si dokážeme drobné pomocné tvrzení.

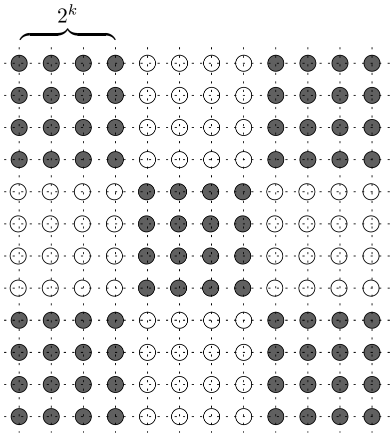
Lemma. *Nechť je přirozené číslo c dělitelné číslem 2^k ($k \in \mathbb{N}$) a existují taková přirozená čísla a, b, že platí $a^2 + b^2 = c^2$. Pak a i b jsou dělitelná 2^k.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle k. Pro $k = 1$ rozebereme možné případy. Pokud by bylo právě jedno z čísel a, b liché, bylo by $a^2 + b^2$ liché – spor. Pokud by byla obě čísla lichá, měl by součet $a^2 + b^2$ zbytek 2 po dělení 4 – spor s tím, že c^2 je dělitelné 4. Musí tedy být a i b sudé. Nyní předpokládejme, že lemma platí pro k a že $2^{k+1} \mid c$. Zavedeme $\tilde{a} = a/2$, $\tilde{b} = b/2$, $\tilde{c} = c/2$ (a, b, c sudá podle lemmatu pro $k = 1$). Tato čísla splňují $\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = \tilde{c}^2$ a jelikož je $2^k \mid \tilde{c}$, podle indukčního předpokladu platí také $2^k \mid \tilde{a}$ a $2^k \mid \tilde{b}$, takže $2^{k+1} \mid a$ a $2^{k+1} \mid b$, čímž jsme hotovi.

Toto lemma nám už napovídá, jak bude vypadat obarvení pro sudá n. Nechť je k největší přirozené číslo takové, že 2^k dělí n. Použijeme opět šachovnicové obarvení, ovšem tentokrát

[6] To jsou body s celočíselnými souřadnicemi.

nebudou jednobarevná „políčka“ odpovídat jednotlivým bodům, ale celým čtvercům $2^k \times 2^k$ bodů jako na obrázku:



Ověříme, že takovéto obarvení vyhovuje zadání. Zvolme si opět libovolný (bílý) bod B a uvažme nějaký bod C, jehož vzdálenost od B je n. Mají-li B a C jednu souřadnici stejnou, je věc jasná. Jinak nechť x, resp. y značí vzdálenost C od B ve vodorovném, resp. svislém směru. Platí $x^2 + y^2 = n^2$ a podle lemmatu také $2^k \mid x$, $2^k \mid y$. Označíme $\tilde{n} = n/2^k$, $\tilde{x} = x/2^k$, $\tilde{y} = y/2^k$. Protože je $\tilde{n}$ liché a $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \tilde{n}^2$, je jedno z čísel $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ liché a jedno sudé.

Zopakujeme argument s „přesouváním“ – tentokrát však bude jeden krok odpovídat posunu o délce 2^k ve svislém nebo vodorovném směru. Takovýmito kroky se můžeme dostat z B do C, protože x i y jsou násobky 2^k. Dále se při každém takovémto kroku změní barva bodu, ve kterém se aktuálně nacházíme, jelikož se přesuneme z jednoho čtverce $2^k \times 2^k$ do sousedního. Celkem takovýchto kroků budeme potřebovat $\tilde{x} + \tilde{y}$, což je liché číslo, bod C tedy musí být černý, což bylo dokázat.

6. úloha

(a) Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel (x, y), které jsou řešením rovnice

$$\frac{1}{x + 2009} + \frac{2010}{y + 2010} = 1.$$

(b) Pro reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_1 &= x_2 x_1^2, \\ x_3 - 2x_2 &= x_3 x_2^2, \\ &\vdots \\ x_1 - 2x_n &= x_1 x_n^2. \end{aligned}$$

(a) Rovnicu

$$\frac{1}{x+2009}+\frac{2010}{y+2010}=1$$

si prenásobíme menovateľmi a upravíme na tvar

$$y(x+2008)=2010.$$

Nakoľko $x, y \in \mathbb{N}$, jediné prípustné riešenie je $y=1$, z čoho dorátame $x=2$.

(b) Rovnice

$$x_{i+1}-2x_i=x_{i+1}x_i^2$$

si upravíme do tvaru

$$x_{i+1}(1-x_i^2)=2x_1.$$

Pre $x_i=\pm 1$ dostávame $0=\pm 2$, čo zjavne neplatí. V ostatných prípadoch teda môžeme rovnicu vydeliť $1-x_i^2$, čím prichádzame k analógii súčtového vzorca pre tangens:

$$x_{i+1}=\frac{2x_i}{1-x_i^2} \qquad \longrightarrow \qquad \operatorname{tg}(2y)=\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}.$$

Zvoľme teraz pevné x_1 a vyberme preň $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, aby bolo $x_1=\operatorname{tg} y$. Potom pre x_2 platí

$$x_2=\frac{2x_1}{1-x_1^2}=\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}=\operatorname{tg}(2y) \qquad \text{a ďalej analogicky} \qquad x_{i+1}=\operatorname{tg}(2^i y)$$

pre $i \in \{2,\ldots,n\}$, pričom značíme $x_{n+1}=x_1$. Dopracovali sme sa tým k vzťahu

$$\operatorname{tg} y=x_1=x_{n+1}=\operatorname{tg}(2^n y),$$

z ktorého vidíme nutnú podmienku

$$y+z\cdot\pi=2^n y,\ z \in \mathbb{Z}, \qquad \text{ktorú prepíšeme na} \qquad y=\frac{z\cdot\pi}{2^n-1},\ z \in \mathbb{Z}.$$

Ešte je potrebné zaručiť $x_i=\operatorname{tg}(2^{i-1}y)\neq \pm 1$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, čo ale s $y=\frac{z\cdot\pi}{2^n-1}$ platí vždy:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(2^{i-1}\frac{z\cdot\pi}{2^n-1}\right)\neq\pm 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 2^{i-1}\frac{z\cdot\pi}{2^n-1}\neq\frac{(2k+1)\pi}{4}\\ &\Longleftrightarrow \qquad 2^{i+1}z\neq(2^n-1)(2k+1).\end{aligned}$$

Pokiaľ je teda splnené

$$y=\frac{z\cdot\pi}{2^n-1} \qquad \text{pre nejaké} \quad z \in \mathbb{Z},$$

tak čísla $x_i=\operatorname{tg}(2^{i-1}y)$ vyhovujú sústave zo zadania (to plynie spätne zo zvoleného postupu) a sú hľadanými riešeniami.

7. úloha

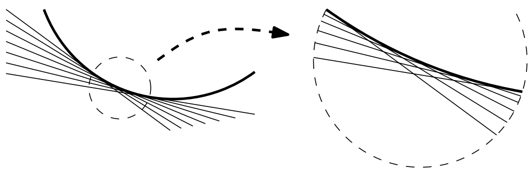
(a) Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé: kdykoliv je prostor rozřezán na jednotkové krychle, každá krychle sdílí celou svou stěnu s alespoň jednou jinou.

(b) Ukažte, že existuje 2010 konvexních mnohostěnů, které dokážeme rozmístit do prostoru tak, že se každé dva dotýkají, ale přitom žádné tři nemají společný bod.

(a) Ukážeme si protipríklad ktorým dokážeme, že tvrdenie neplatí. Najprv štandardne rozrežeme priestor identickými kockami s hranami dĺžky 1, teda každá kocka susedí s šiestimi kockami. Vyberieme si jednu ľubovolnú kocku K, ktorej stred bude stred súradníc. Z nej vychádzajú osi x, y, z, ktoré sú rovnobežné s hranami kociek. Všetky kocky, ktoré ležia v rovine xy, okrem tých, ktoré ležia na priamke x, posunieme o pol dĺžky v smere osi x. Potom tie, ktoré ležia v rovine yz, okrem tých, ktoré ležia na priamke y, posunieme o pol dĺžky v smere y a nakoniec tie, ktoré ležia v rovine zx, okrem tých ktoré ležia na priamke z, posunieme o pol dĺžky v smere z. Priestor ostane rozrezaný a pritom kocka K nemá celú spoločnú stenu zo žiadnou kockou.

(b) Úlohu vyřešíme pro konvexní mnohoúhelníky, které se budou každý s každým dotýkat v jednom bodě. Potřebné mnohostěny z nich poté vyrobíme přidáním vrcholu velmi blízko mnohoúhelníku a doplněním na jehlan. Pro přehlednost podáváme úlohu v několika krocích.

Konstrukce přímek: Nejprve zkonstruujeme pohled na mnohoúhelníky „shora“. Vezmeme kružnici a dotkneme se jí první přímkou. Poté se kružnice dotkneme o 0,001° otočenou druhou přímkou. Následně přilepíme třetí přímku, otočenou o další 0,001°. Takto postupně zkonstruujeme 2010 přímek, z nichž se každé dvě protínají, ale žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Pohleďte na obrázek.



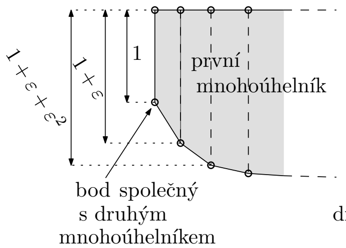
Následuje stvoření samotných mnohoúhelníků.

Transformace přímek do prostoru: Umístěme nyní vytvořenou kompozici přímek do prostoru tak, aby byly všechny vodorovně. Smažme kružnici a vyznačme ještě na každé přímce fixou průsečíky s ostatními přímkami. Uvažujme malé kladné ε. Přímky budeme teď posouvat i s vyznačenými polohami průsečíků. První přímku ponechme na místě. Druhou přímku posuňme vertikálně dolů o vzdálenost 1. Třetí přímku posuňme dolů o vzdálenost $1 + \varepsilon$. Čtvrtou o vzdálenost $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$, pátou o $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3$, atd. Po tomto posunu leží fixou vyznačné body po dvojicích nad sebou.

Mnohoúhelníky jako konvexní obaly (nejtěžší krok): Za n-tou rovinu od teď považujme svislou rovinu, která obsahuje n-tou přímku. n-tý mnohoúhelník zkonstruujeme jako konvexní obal těch fixou vyznačených bodů v n-té rovině, které jsou na a pod n-tou přímkou. Tento krok je důležitý, proto konkrétně a podrobněji: Za první mnohoúhelník tak vezmeme konvexní obal všech fixou vyznačených bodů ležících v 1. svislé rovině. Za druhý mnohoúhelník vezmeme obal všech omalovaných bodů ve vertikální rovině druhé přímky, kromě nejvýše položeného bodu, který leží nad ní.

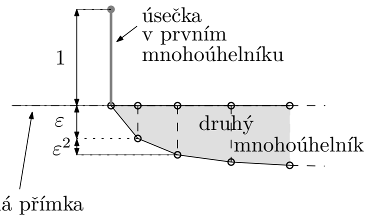
1. rovina

(svislá rovina obsahující první přímku)



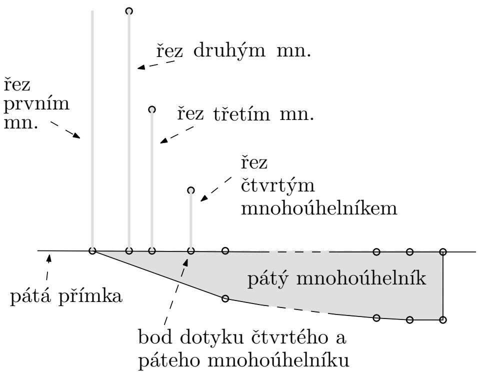
2. rovina

(svislá rovina obsahující druhou přímku)



Za pátý mnohoúhelník vezme body v rovině páté přímky, které nejsou výše, než tato přímka. Tedy všechny kromě čtyř bodů.

5. rovina



Ukázku dalších několika mnohoúhelníků už přeskočíme. 2009-tý mnohoúhelník bude trojúhelníkem – pod 2009-přímkou totiž leží pouze jediný fixou vyznačený bod. Z naší konstrukce by byl 2010-tý mnohoúhelník jen přímkou, tak si ho protáhneme dolů na obdélník (to můžeme, protože je pod ním už místo).

Zkonstruovali jsme 2010 mnohoúhelníků, teď je ještě potřeba ukázat, že mají potřebné vlastnosti.

Provedená konstrukce vyhovuje:

1. Každý mnohoúhelník je konvexní: Brali jsme konvexní obaly bodů.

2. Žádné tři mnohoúhelníky se nedotýkají v jednom bodě: Kdyby se tři mnohoúhelníky dotýkaly v jednom bodě, tak by se musely v jednom bodě protínat i jejich průměty při pohledu shora – naše na začátku zkonstruované přímky. Žádné tři přímky z prvotní kompozice přímek se však v jednom bodě neprotínají, takže se tři mnohoúhelníky nemohou dotýkat v jednom bodě.

3. Každé dva mnohoúhelníky mají společný alespoň jeden bod (bod dotyku): Vezměme k-tý a l-tý mnohoúhelník, $k < l$. Jestliže byl původní průsečík k-té a l-té přímky X, tak nechť X_k

a X_l jsou body, které jsme na přímkách nejprve vyznačili fixou jako průsečík X a pak rozpojili při vertikálním posunu přímek. l-tá přímka má vyšší pořadové číslo, je tedy níže a i bod X_l je níže. Bod X_l je jedním z bodů v l-té rovině, navíc na l-té přímce, takže je obsažen v l-tém mnohoúhelníku. Bod X_l leží ale i v k-té rovině, a to pod k-tou přímkou, je tedy obsažen i v k-tém mnohoúhelníku.

4. Každé dva mnohoúhelníky mají společný právě jeden bod – dotýkají se. Podle *Lemmatu* na konci řešení existuje pro každý z 2010 mnohoúhelníků číslo $\varepsilon > 0$ takové, že mnohoúhelník obsahuje na hranici všechny fixou vyznačené body, ze kterých byl vytvořen konvexním obalem. Bez ztráty kytičky předpokládejme, že jsme už na začátku zvolili to nejmenší ε ze všech vyhovujících ε od jednotlivých mnohoúhelníků. S tímto ε už pro každý mnohoúhelník leží body, ke kterým je konvexním obalem, na jeho hranici. Přejímaje značení a souvislosti k X_l z předchozího odstavce leží X_l nutně na spodní hranici k-tého mnohoúhelníku a na horní hranici l-tého mnohoúhelníku. Takže k-tý a l-tý mnohoúhelník nemohou mít žádný další společný bod.

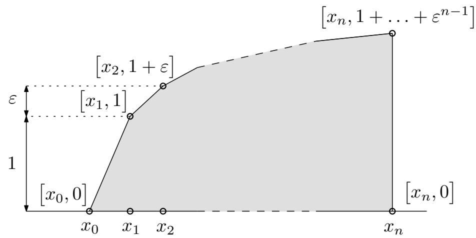
K dokončení řešení úlohy uděláme z mnohoúhelníků mnohostěny tak, že ke každému mnohoúhelníku umístíme velmi blízko vrchol a doplníme ho na jehlan s velmi malou výškou (takovou, aby nezasahoval do ostatních mnohoúhelníků).

Už následuje pouze použité *Lemma:*

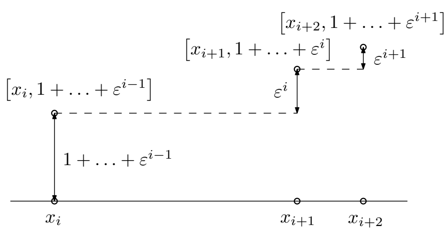
Lemma. *V rovině s kartézskými souřadnicemi ať jsou x_0, x_1, ..., x_n body na ose x (v tomto pořadí). Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že je mnohoúhelník tvořený body*

$$[x_0, 0], \quad [x_1, 1], \quad [x_2, 1+\varepsilon], \quad [x_3, 1+\varepsilon+\varepsilon^2], \quad \dots, \quad [x_n, 1+\dots+\varepsilon^{n-1}], \quad [x_n, 0]$$

konvexní, ať už byly vzdálenosti mezi body x_i jakékoli.



Důkaz. Shlédněme situaci tří po sobě jdoucích bodů.



Mnohoúhelník bude konvexní, právě když bude v každé po sobě jdoucí trojici prostřední bod nad spojnicí těch krajních. Pro konkrétní trojici x_i, x_{i+1}, x_{i+2} to platí, právě když je sklon spojnice prvních dvou bodů větší než sklon spojnice druhé dvojice (bráno zleva doprava). To je pravda, právě když

$$\frac{\varepsilon^i}{x_{i+1} - x_i} > \frac{\varepsilon^{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} > \varepsilon.$$

Poslední nerovnost je pro volbu

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{i \in \{0, n-2\}} \left\{ \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right\}$$

splněna pro každou trojici x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, mnohoúhelník je se zvoleným ε konvexní a lemma je dokázáno.