Povídání ke druhé podzimní sérii

Druhá série letošního ročníku je věnována dělitelnosti. Aby se Ti úlohy z tohoto překrásného odvětví teorie čísel řešily snáze, připravili jsme si pro Tebe kratičké povídání. Osvětlíme si v něm pár základních pojmů a uvedeme několik tvrzení, která můžeš ve svých řešeních bez důkazu používat. Číslem budeme vždy rozumět číslo přirozené. Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Zápis $a \mid b$ (čteme „á dělí bé“ resp. „á je dělitelem bé“) vyjadřuje fakt, že existuje číslo c takové, že $a \cdot c = b$.

Největším společným dělitelem čísel a, b označujeme to největší číslo d, pro které platí $d \mid a$ a zároveň $d \mid b$. Zapisujeme $\mathrm{NSD}(a, b) = d$. Pokud pro čísla a, b platí $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$, říkáme, že a a b jsou nesoudělná. V opačném případě (tj. pokud $\mathrm{NSD}(a, b) > 1$) řekneme, že a a b jsou soudělná.

Prvočíslo je číslo, které má právě dva různé dělitele.[1] Prvočísel je nekonečně mnoho.

Každé číslo větší než jedna se dá zapsat jako součin prvočísel. Tento zápis je navíc až na pořadí prvočísel jednoznačný.

Pokud prvočíslo p dělí součin $a \cdot b$, pak už nutně musí dělit alespoň jedno z čísel a, b. Pokud p není prvočíslo, takový závěr obecně platit nemusí – viz například $6 \mid 36 = 4 \cdot 9$, ale přitom šestka nedělí čtyřku ani devítku.

Pokud číslo c dělí obě čísla a, b, pak dělí i jejich součet $a + b$, rozdíl $a - b$ a řadu jiných podobných výrazů.

[1] Speciálně tedy jednička není prvočíslo.

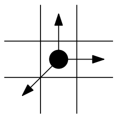
2. podzimní série

Téma: Dělitelnost

Datum odeslání: 8. listopadu 2010

1. úloha (3 body)

Mišo si vymyslel figurku delfína, která táhne pouze nahoru, vpravo nebo šikmo vlevo dolů (viz obrázek). Umístil ji na nekonečnou šachovnici a krátil si dlouhou chvíli tím, že delfínem pohyboval. Najednou ho zarazilo, že vždy, když se vrátil na výchozí pole, byl počet tahů, které do té doby udělal, dělitelný třemi. Mohlo tomu být vůbec někdy jinak?



2. úloha (3 body)

Řekneme, že přirozené číslo je *roztržité*, pokud je jeho zápis v desítkové soustavě tvořen neprázdnou posloupností dvojek následovanou neprázdnou posloupností trojek (takže například číslo 2222333 je *roztržité*). Nalezněte všechny hodnoty $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, takové, že všechna n-ciferná *roztržitá* čísla jsou prvočísla.

3. úloha (3 body)

Ukažte, že mezi každými deseti po sobě jdoucími přirozenými čísly[2] existuje alespoň jedno, které je nesoudělné se součinem zbylých devíti.

4. úloha (5 bodů)

Dokažte, že $3^k \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

5. úloha (5 bodů)

Najděte všechna přirozená čísla, která se rovnají druhé mocnině počtu svých dělitelů.[3]

6. úloha (5 bodů)

Dokažte, že neexistuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $89^2 \mid n^2 + n - 22$.

7. úloha (5 bodů)

Nalezněte všechny dvojice a, b přirozených čísel takové, že číslo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+b}$$

je rovněž přirozené.

[2] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

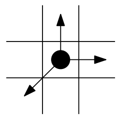
[3] Započítáváme všechny kladné dělitele, tedy i jedničku a číslo samotné.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že číslo n^4+1 má prvočíselného dělitele většího než $2n$.

Řešení 2. podzimní série

1. úloha
Mišo si vymyslel figurku delfína, která táhne pouze nahoru, vpravo nebo šikmo vlevo dolů (viz obrázek). Umístil ji na nekonečnou šachovnici a krátil si dlouhou chvíli tím, že delfínem pohyboval. Najednou ho zarazilo, že vždy, když se vrátil na výchozí pole, byl počet tahů, které do té doby udělal, dělitelný třemi. Mohlo tomu být vůbec někdy jinak?



(Miško Szabados)

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že se Mišova figurka pohybuje v souřadnicové síti a začíná na políčku $(0,0)$. Označme a, b, c po řadě počty pohybů nahoru, vpravo a vlevo dolů, které Mišova figurka vykonala při nějaké procházce po šachovnici. Libovolnou „okružní trasu“ po šachovnici z výchozího pole zpět lze popsat rovnicí

$$(0,0) + a \cdot (0,1) + b \cdot (1,0) + c \cdot (-1,-1) = (0,0).$$

Tuto rovnici rozdělíme po složkách na dvě:

$$0 + 0 \cdot a + b - c = 0 \qquad \text{a} \qquad 0 + a + 0 \cdot b - c = 0.$$

Odtud plyne, že $b = c$ a $a = c$.

Počet pohybů, které Mišova figurka při takové okružní jízdě vykonala, je $a + b + c = 3c$, což je určitě číslo dělitelné třemi.

2. úloha
Řekneme, že přirozené číslo je *roztržité*, pokud je jeho zápis v desítkové soustavě tvořen neprázdnou posloupností dvojek následovanou neprázdnou posloupností trojek (takže například číslo 2222333 je *roztržité*). Nalezněte všechny hodnoty $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, takové, že všechna n-ciferná *roztržitá* čísla jsou prvočísla. *(Pepa Tkadlec)*

Pre $n \geq 4$ existuje roztržité číslo tvaru $2223\ldots3$, ktoré je deliteľné 3 (pretože obsahuje 3 dvojky, teda jeho ciferný súčet je deliteľný tromi). Potom pre tieto n nie sú všetky n-ciferné roztržité čísla prvočíslami.

Zostávajú prípady $n = 2, 3$. Pre $n = 2$ je jediným roztržitým číslom 23, ktoré je prvočíslom. Pre $n = 3$ existujú dve roztržité čísla: 223 a 233. Obe sú prvočíslami.

Všetkými n, ktoré spĺňajú zadanie, sú teda 2 a 3.

3. úloha
Ukažte, že mezi každými deseti po sobě jdoucími přirozenými čísly[4] existuje alespoň jedno, které je nesoudělné se součinem zbylých devíti. *(Honzík Vaňhara)*

---

[4] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Každé z deseti po sobě jdoucích čísel můžeme zapsat jako součin prvočísel. Teď si všimneme, že jako společní dělitelé připadají v úvahu pouze prvočísla menší než 11, ta ostatní totiž mohou dělit nejvýše jedno z těchto deseti čísel.

Uvědomíme si, že mezi deseti po sobě jdoucími čísly je nejvýše jeden lichý násobek pětky i sedmičky a nejvýše dva liché násobky tří. Mezi pěticí lichých čísel je tak alespoň jedno, které není dělitelné čísly 3, 5 ani 7. Toto číslo pak vyhovuje podmínkám úlohy.

4. úloha

Dokažte, že $3^k \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. *(Honzík Vaňhara)*

K důkazu použijeme matematickou indukci. Pro $k = 1$ je splněno $3 \mid 111$. Nyní budeme předpokládat, že pro nějaké přirozené číslo k platí $3^k \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^k}$. Výraz $\underbrace{111\ldots1}_{3^{k+1}}$ můžeme upravit

$$\underbrace{111\ldots1}_{3^{k+1}} = \underbrace{111\ldots1}_{3^k} \cdot 10^{2\cdot3^k} + \underbrace{111\ldots1}_{3^k} \cdot 10^{3^k} + \underbrace{111\ldots1}_{3^k} = \underbrace{111\ldots1}_{3^k} \cdot \left(10^{2\cdot3^k} + 10^{3^k} + 1\right).$$

Číslo $10^{2\cdot3^k} + 10^{3^k} + 1$ má v desítkové soustavě ciferný součet 3, a je tedy dělitelné třemi. To společně s indukčním předpokladem $3^k \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^k}$ znamená, že $3^{k+1} \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^{k+1}}$. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $3^k \mid \underbrace{111\ldots1}_{3^k}$.

5. úloha

Najděte všechna přirozená čísla, která se rovnají druhé mocnině počtu svých dělitelů.[5] *(Franta Konopecký)*

Nejdříve si dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. *Buď n přirozené číslo větší než 1. Pak n můžeme zapsat až na pořadí činitelů jednoznačně ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Navíc počet dělitelů čísla n je roven $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.*

Důkaz. První část lemmatu (o jednoznačném prvočíselném rozkladu) budeme považovat za známou, dokážeme pouze tvrzení o počtu dělitelů. Mějme nějakého dělitele d čísla n. V jeho prvočíselném rozkladu se mohou vyskytovat pouze prvočísla obsažená v n, přitom každé v nejvýše takové mocnině, v jaké je v n. Každé prvočíslo p_i, $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ se tedy může vyskytovat nulakrát až α_i-krát, máme pro něj tedy $(\alpha_i + 1)$ možností. Celkově proto můžeme dělitele vybrat právě $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ způsoby.

Vyzbrojeni lemmatem se už můžeme pustit do samotné úlohy. Označme n hledané číslo. Nejdříve si uvědomíme, že při úvahách o rozkladu na prvočísla máme jeden speciální případ, a to $n = 1$. Zvlášť tedy ozkoušíme, že tato volba podmínkám úlohy vyhovuje, a budeme dále předpokládat, že $n \geq 2$.

Chceme, aby n bylo rovno druhé mocnině počtu svých dělitelů, tedy aby platilo

[5] Započítáváme všechny kladné dělitele, tedy i jedničku a číslo samotné.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \big((\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)\big)^2.$$

Všimneme si, že n musí být druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, tedy můžeme označit $\alpha_i = 2\beta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, a rovnici přepsat do tvaru

$$p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k} = (2\beta_1+1)^2 \cdot (2\beta_2+1)^2 \cdots (2\beta_k+1)^2.$$

Pracujeme pouze s kladnými čísly, můžeme tedy vztah ještě odmocnit a dostaneme

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = (2\beta_1+1) \cdot (2\beta_2+1) \cdots (2\beta_k+1).$$

Pravá strana je určitě rovna lichému číslu, tedy i levá strana rovnice musí být lichá. Z toho plyne, že všechna prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ musí být alespoň 3.

Nyní dokážeme, že pro námi uvažovaná p_i a β_i platí $p^\beta \geq 2\beta + 1$ (indexy i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, budeme pro přehlednost vynechávat), a zjistíme, kdy nastává rovnost. Zvolme pevně libovolné p. Pro $\beta = 1$ vychází $p \geq 3$, tedy nerovnost platí a rovnost nastane, pouze pokud je $p = 3$.

Nyní budeme pokračovat matematickou indukcí. Pokud β zvětšíme o jedna, pravá strana nerovnosti se zvětší o dva, zatímco levá p-krát, což je vzhledem k tomu, že $p \geq 3$ nejméně třikrát. Nerovnost tedy zůstane zachována a případná neostrá nerovnost se změní na ostrou.

Pokud nyní vynásobíme nerovnosti pro všechny p_i a β_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dostaneme

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \geq (2\beta_1+1) \cdot (2\beta_2+1) \cdots (2\beta_k+1).$$

My ale chceme rovnost a ta nastává pouze pro $p = 3$ a $\beta = 1$. Máme tedy jediné řešení, a to $n = 3^{2\cdot 1} = 9$.

Celkem má úloha řešení dvě – čísla jedna a devět.

6. úloha

Dokažte, že neexistuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $89^2 \mid n^2 + n - 22$. *(Pepa Tkadlec)*

Pro spor předpokládejme, že jsme našli n, pro které je podmínka splněna. Pak ale musí platit, že

$$89^2 \mid 4(n^2 + n - 22) = (2n+1)^2 - 89,$$

a tedy také $89 \mid (2n+1)^2 - 89$. To ovšem znamená, že $89 \mid (2n+1)^2$. Protože $(2n+1)^2$ je čtverec přirozeného čísla, musí se v jeho prvočíselném rozkladu vyskytovat všechna prvočísla v sudé mocnině, neboli musí nutně platit i $89^2 \mid (2n+1)^2$.

Pak ale 89^2 dělí dvě čísla lišící se o 89, kdežto samotné číslo 89 nedělí. To je hledaný spor.

Jiné řešení: Jestliže $89^2 \mid n^2 + n - 22$, lze číslo $n^2 + n - 22$ psát ve tvaru $89^2 k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Ukážeme, že kvadratická rovnice $n^2 + n - 22 - 89^2 k = 0$ nemá kladné celočíselné řešení pro žádné k. Jejím jediným kladným kořenem je

$$n = \frac{-1 + \sqrt{89(1+89k)}}{2},$$

pro který by po úpravě muselo platit

$$(2n+1)^2 = 89(1+89k).$$

Ke sporu dojdeme obdobně jako u předchozího řešení.

7. úloha
Nalezněte všechny dvojice a, b přirozených čísel takové, že číslo

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+b}$$

je rovněž přirozené. *(Pepa Tkadlec)*

Dokážeme, že žádná taková a, b neexistují. Pro spor předpokládejme, že existují $a, b, n \in \mathbb{N}$, pro něž platí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots+\frac{1}{a+b}=n,$$

a sledujme, jak vysoké mocniny dvojky dělí jednotlivé jmenovatele. Označme $A = \{a, a+1, \dots, a+b\}$. Klíčem je uvědomit si, že v množině A se nachází pouze jedno číslo, které je dělitelné nejvyšší mocninou dvojky. Kdyby totiž existovala dvě $s_1, s_2 \in A$ (búno $s_1 < s_2$) taková, že $s_1 = 2^k s_1'$, $s_2 = 2^k s_2'$, kde s_1', s_2' jsou lichá, pak by číslo $2^k(s_1'+1)$, které je rovněž v A, bylo dělitelné alespoň 2^{k+1}, protože $s_1'+1$ je sudé. To by byl spor s maximalitou k. Číslo dělitelné nejvyšší mocninou dvojky je tedy v A opravdu jen jedno.

Označme teď $N = \operatorname{nsn}(a, a+1, \dots, a+b)$ a $c_i = N/i$ pro $i \in A$. Po rozšíření zlomků dostaneme

$$\frac{c_a}{N}+\frac{c_{a+1}}{N}+\cdots+\frac{c_{a+b}}{N}=n.$$

Označme s to číslo z množiny A, které je dělitelné nejvyšší mocninou dvojky 2^k. Zřejmě $k \geq 1$, protože A obsahuje alespoň dvě čísla. Potom $N = 2^k N'$, kde N' je liché, takže všechna čísla c_i, $i \in A \setminus \{s\}$, jsou sudá (protože 2^k je pouze v prvočíselném rozkladu čísla s), zatímco c_s je liché. Tím ale dostáváme, že n je podíl lichého a sudého čísla, což je spor.

8. úloha
Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že číslo n^4+1 má prvočíselného dělitele většího než $2n$. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Prvé riešenie (elementárne, voľne podľa *Anh Dung Le***):** Najprv si dokážeme, že množina prvočísel p, ktoré majú násobok tvaru n^4+1 (označme ju P), má nekonečnú veľkosť. Predpokladajme pre spor, že ich je len konečný počet a nech sú to $p_1, \dots, p_k$. Potom ale číslo $(p_1 \cdots p_k)^4+1$ nie je deliteľné žiadnym z nich, musí mať teda iného prvočíselného deliteľa, čo je spor.

V nasledujúcom texte budeme uvažovať iba nepárne prvočísla.

Môžeme si všimnúť, že ak $p \mid m^4+1$ a $m \equiv z \pmod{p}$, $0 < z < p$, potom pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\begin{aligned}0 &\equiv m^4+1 \equiv (kp+z)^4+1\\ &\equiv p\left(k^4p^3+4k^3p^2z+6k^2pz^2+4kz^3\right)+z^4+1\\ &\equiv z^4+1 \pmod{p},\end{aligned}$$

a teda $p \mid z^4+1$. Zo vzťahu $z^4 \equiv (p-z)^4 \pmod{p}$ dostávame aj $p \mid (p-z)^4+1$.

Zjavne platí $0 < z < \frac{p}{2}$ alebo $0 < p-z < \frac{p}{2}$. Za n zvoľme z alebo $p-z$ podľa toho, ktoré z nich spĺňa obe nerovnosti. Takto sme k danému $p \in P$ našli $n \in \mathbb{N}$, že $p \mid n^4+1$ a zároveň $p > 2n$.

Nakoniec ešte ukážeme, že takto nájdeme nekonečne veľa rôznych hodnôt n. Opäť predpokladajme, že existuje maximálne takéto n_1. Zvoľme $p \in P$, $p > n_1^4 + 1$ (čo môžeme vďaka nekonečnosti P). K nemu existuje n_2 také, že $p \mid n_2^4 + 1$ a $p > 2n_2$. Dostávame nerovnosť $n_1^4 + 1 < p \leq n_2^4 + 1$, teda $n_1 < n_2$, čo je spor s voľbou n_1.

Druhé riešenie (nebojácne, voľne podľa *Chi Hang Wanga* **a** *Tomáša Zemana***):** Buď p prvočíslom tvaru $p = 8k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) a r primitívnym koreňom[6] modulo p. Potom z malej Fermatovej vety platí

$$1 \equiv r^{p-1} \equiv r^{8k} \equiv \left(r^{4k}\right)^2 \pmod{p},$$

čo je ekvivalentné

$$\left(r^{4k} + 1\right)\left(r^{4k} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pretože p je prvočíslo, delí práve jednu zo zátvoriek. Z definície primitívneho koreňa ale vieme, že $p \nmid r^{4k} - 1$. Substitúciou $r^k = n$ teda dostávame, že $n^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ má vždy riešenie pre $p = 8k + 1$. Podobne ako pri prvom postupe zvolíme za n hodnotu z množiny $\{1, \ldots, p-1\}$. Taktiež vieme, že $p \mid n^4 + 1 \iff p \mid (p-n)^4 + 1$, opäť teda existuje riešenie $n < \frac{p}{2}$.

Zostáva ukázať nekonečnosť množiny tých n, ktoré takto dostaneme. Použijeme znovu dôkaz sporom, nech teda n_1 je najväčšie číslo splňujúce podmienky. Podľa Dirichletovej vety[7] existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $8k + 1$, určite teda nájdeme aj také, že $p > n_1$. Potom p nedelí $n^4 + 1$ pre žiadne z už nájdených n, z dokázaného ale existuje n_2, že $p \mid n_2^4 + 1$ a $p > 2n_2$ ($n_2 > n_1$, viď vyššie), čím dostávame spor s maximalitou n_1.

[6] Primitívny koreň modulo p je také číslo r, že ku každému $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ existuje $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, pre ktoré $r^i \equiv a \pmod{p}$.

[7] *Dirichletova veta* hovorí, že pre každú dvojicu nesúdeliteľných čísel a, d existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $a + k \cdot d$ ($k \in \mathbb{N}_0$).