Povídání ke čtvrté sérii

Dostává se Ti do rukou série, jejímž obsahem jsou funkcionální rovnice – téma, které je na středních školách často opomíjeno. Tento text by Ti měl pomoci pochopit zadání úloh a přiblížit metody řešení funkcionálních rovnic.

Specialitou této série je také skutečnost, že její zadání je v anglickém jazyce. Navazuje tak na ideu cizojazyčných sérií, které probíhaly až do 29. ročníku MKS. Její princip je v zásadě podobný. Úlohy jsou zadány pouze v anglickém jazyce, stejně tak **přijímáme řešení sepsaná jen v angličtině**. Řešení napsaná česky nebo slovensky nebudou obodována. Možná Ti překlad a vlastní sepisování zabere více času než obyčejně, avšak věz, že angličtina je jazyk, ve kterém se „dělá“ většina matematiky, a cizojazyčná série je tak příležitost, jak jí jít vstříc.

Funkce

Funkci nebo též zobrazení z množiny X do množiny Y většinou chápeme jako nějaký předpis, který prvkům z X přiřadí právě jeden prvek z Y. Funkce zpravidla značíme písmeny f, g, h. Zápis $f\colon X \to Y$ znamená, že funkce f je definována na celém X s hodnotami v Y. Neznamená to však, že f nabývá všech hodnot z Y, tedy obor hodnot nemusí být celé Y.

Pojem funkcionální rovnice

Nyní si uvedeme několik zadání, a aniž bychom úlohy řešili, ozřejmíme si, co přesně se po nás chce a jak úlohy chápat.

Příklad 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Především si všimněme základní odlišnosti od běžných rovnic: cílem není hledat hodnoty x a y, které rovnici vyhovují, ale hledáme takové funkce, které rovnici splňují pro každé přípustné dosazení hodnot za x a y. Všimněme si, že kupříkladu funkce $f(x) = 2x$ rovnici splňuje, neboť

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y),$$

ale například funkce $f(x) = x + 1$ rovnici nevyhovuje, jelikož

$$f(x+y) = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y).$$

Ke správnému vyřešení úlohy navíc musíme najít všechny takové funkce neboli ukázat, že žádné jiné funkce než ty, které jsme našli, rovnici nesplňují. Dále si všimněme, že úkolem je hledat funkce definované v $\mathbb{Q}$, což úlohu podstatně zjednodušuje a odlišuje například od úlohy následující.

Příklad 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Rovnice má v tomto případě stejný tvar, ale funkce f musí být definována na celém $\mathbb{R}$ a může nabývat i libovolných reálných hodnot. Oproti předchozí úloze máme navíc zadanou další podmínku na funkci f, a to aby f byla rostoucí, tj. aby pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platilo $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Řešení rovnice

Základní myšlenkou řešení bude následující úvaha: Předpokládáme, že funkce f splňuje zadání, a zkoumáme, jaké musí mít vlastnosti. Získáváme tak informaci, že pokud nějaké řešení rovnice existuje, tak musí něco splňovat. Mějme tedy na paměti, že obecně nepostupujeme ekvivalentními úpravami. Nejlépe je to vidět na příkladu.

Příklad 3. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + y.$$

Řešení. Předpokládejme, že již máme funkci f splňující rovnici pro každou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Pro tuto funkci si označme $c = f(0)$. Protože je rovnice splněna pro každou dvojici $[x, y]$, speciálně musí být splněna i pro jednu konkrétní dvojici $[0, y]$. Musí tedy platit

$$f(0+y) = f(0) + y$$

neboli $f(y) = y + c$. Dosazením do rovnice ověříme, že

$$f(x+y) = x + y + c = x + c + y = f(x) + y,$$

čili funkce $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$ je řešením úlohy pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Proč jsme si však v řešení mohli říci, že $f(0)$ je konstanta? Předpokládali jsme totiž, že máme funkci f, která rovnici splňuje. Hodnota $f(0)$ je tak již konkrétní dosazení do konkrétní funkce, a tedy se dále nemění.

Uvědomme si však, že obrácená implikace, tj.„když má funkce f následující vlastnosti, tak řeší rovnici“, obecně platit nemusí. Na konci tedy nezapomínej provádět zkoušku.

Substituce v rovnicích

Tento princip je elementární a zcela zásadní pro řešení funkcionálních rovnic. Téměř v každé úloze provedeme alespoň jednou nějaké dosazení nebo substituci. Klíčová pro nás bude následující formulace: „Pokud funkce f splňuje zadanou rovnici pro všechna $[x, y]$ z definičního oboru, pak tuto rovnici splňuje i pro nějaký speciální případ“. Přesně tuto úvahu jsme provedli v příkladu 3. Podle tohoto schématu tedy můžeme snadno dosazovat konstanty z definičního oboru funkce f.

Zobecněním této úvahy okamžitě vidíme, že můžeme provádět i složitější substituce, jako například $[-x, 0]$ nebo $[x^3 - x, y/2]$ nebo ještě komplikovaněji, jako třeba $[x - y, x + y]$ či $[y, f(x)]$. Musíme však dbát jediné podmínky, a to aby výsledná substituce měla vždy smysl, tj. aby každé dosazení x a y bylo v definičním oboru funkce f.

Příklad 4. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

Řešení. Nechť f splňuje zadanou rovnici pro všechna x, y. Pak rovnice musí platit i pro hodnoty $[x/2, x/2]$ neboli

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4}.$$

Odtud vidíme, že f musí být tvaru $f(x) = x^2/4 + c$, $x \in \mathbb{R}$, kde c je reálná konstanta. Zkouška ukáže, že tato funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Při substitucích však zároveň musíme dbát na to, abychom si definiční obor příliš nezúžili. Může se totiž stát, že po substituci obdržíme rovnici, která platí jen na nějaké části definičního oboru funkce f. Tento problém ilustruje následující příklad.

Příklad 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Řešení. Buď f funkce splňující zadání pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \geq 0$ dosaďme $[x, \sqrt{x}]$ a obdržíme

$$f\big(x - (\sqrt{x})^2\big) = f(x) - (\sqrt{x})^2,$$

což po úpravě dává $f(x) = x + f(0)$ pro $x \geq 0$. Pro $x < 0$ dosaďme $[0, \sqrt{-x}]$ a ihned dostáváme

$$f\big(-(\sqrt{-x})^2\big) = f(0) - (\sqrt{-x})^2$$

neboli $f(x) = x + f(0)$, kde $x < 0$. Pro $x \geq 0$ a $x < 0$ je tvar řešení stejný, lze tedy psát $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že taková f vyhovuje pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$.

Vidíme, že již po první substituci nás úloha láká provést zkoušku a prohlásit f za řešení. Uvědomme si však, že tato substituce nám zajistila tvar f pouze pro nezáporná x. Skutečnost, že se tato f dala rozšířit na celé $\mathbb{R}$ se zachováním platnosti zadané rovnice, je pouze příjemnou náhodou. Nemůžeme tak beztrestně úlohu prohlásit za vyřešenou, neboť by mohla existovat jiná funkce, která by se na záporných číslech od f lišila.

Co bychom neměli nikdy provést, budeme demonstrovat na následujícím příkladu.

Příklad 6. (Varovný) Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

V prvním kroku každého asi napadne vyzkoušet dosadit $[0, y]$, dostaneme tak, že $f\big(f(y)\big) = f^2(y) + f(0)$. Nyní je $f(y) \in \mathbb{R}$, tedy označme $x = f(y)$ a obdržíme, že $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, o čemž se přesvědčíme zkouškou.

Kde nastala chyba? První dosazení je zcela jistě správné, vztah $f\big(f(y)\big) = f^2(y) + f(0)$ platí pro každé $y \in \mathbb{R}$. Problém je v dosazení $x = f(y)$, nejde totiž o substituci, pouze jsme si jinak označili symbol $f(y)$. Vztah $f(x) = x^2 + c$ tedy platí pouze pro x z oboru hodnot f, o kterém však doposud nebyla žádná řeč a nic o něm nevíme. Zřejmě funkce $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ splňuje zadanou rovnici, její obor hodnot je však jednobodový a platí pro něj jistě rovnice $f(x) = x^2 + c$ pro $c = 0$.

Zde tedy vidíme, že funkce není dána pouze předpisem, ale i oborem, na kterém je definována. Nezapomínej na tuto skutečnost ve svých řešeních.

Vlastnosti funkcí

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je

(1) *sudá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $f(x) = f(-x)$,
(2) *lichá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $f(x) = -f(-x)$,
(3) *prostá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
(4) *na*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$, že $f(x) = y$,
(5) *bijekce*, pokud je prostá a na.

Definice vlastně říká, že sudé jsou právě ty funkce, které jsou osově souměrné podle osy $\mathcal{O}y$, liché jsou ty středově symetrické podle počátku. Prostá funkce nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, funkce, která je na, pak každé hodnoty nabývá alespoň jednou, tj. „vyčerpá" celé Y. Bijekce je pak spojení obou, tedy každé hodnoty z Y se nabude právě jednou. Tomuto zobrazení někdy říkáme *vzájemně jednoznačné* a výstižněji tak říká, že f určuje jednoznačné dvojice mezi X a Y.

Metody řešení

Obecně je pro danou úlohu velmi těžké říci, která metoda povede k cíli. Pro vyřešení obtížnějších úloh je často třeba kombinovat několik přístupů, s náročností úloh jejich počet roste. Přesto se pokusíme na tomto místě uvést několik metod používaných pro řešení funkcionálních rovnic, seřazených zhruba podle frekvence výskytu v úlohách.

- Dosazování hodnot do rovnice. Nejčastěji dosazujeme konstanty, později takové výrazy, abychom dostali některé části výrazů konstantní. Například vyskytuje-li se ve výrazu $f(x+y)$ a známe hodnotu $f(0)$, volíme substituci $[x, -x]$ atp. S obtížnějšími příklady jsou substituce méně zřejmé a vyžadují jistou zkušenost a cvik.
- Symetrické výrazy a vytvoření soustavy rovnic. Některé rovnice mohou mít buď rovnou, nebo po jednoduché úpravě jednu stranu symetrickou, tj. výraz na jedné straně se po záměně x a y nezmění. Totéž tedy musí platit i na straně druhé, odkud můžeme obdržet nový vztah. Vhodným dosazováním rovněž můžeme vytvořit soustavu rovnic a tu pak vyřešit.
- Použití matematické indukce. Nejprve nalezneme hodnoty pro $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, závislé pouze na $f(1)$. Posléze najdeme hodnoty $f(1/n)$ a $f(q)$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Tato metoda je vhodná pro funkce definované na $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Q}$ nebo reálné funkce s omezující podmínkou.
- Vyšetření, zda je funkce prostá, případně na. V mnoha případech není obtížné tyto vlastnosti dokázat, avšak užitek z nich je velký.
- Uhodnout řešení. Podle známého řešení se snáze volí substituce a můžeme tušit, které vlastnosti půjdou dokázat.
- Nikdy nezapomenout na zkoušku!

Functional equations

4TH AUTUMN SERIES — DATE DUE: 9TH JANUARY 2012

PROBLEM 1. (3 POINTS)
Find a function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ different from $f(x) = x$ which satisfies $f(x^2) = x^2$ for every real number x.

PROBLEM 2. (3 POINTS)
Consider an even function $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy + 1$$

for every pair of integers x, y. Determine $f(3)$.

PROBLEM 3. (3 POINTS)
Find at least three functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for every real x

$$\bigl(f(x)\bigr)^2 = xf(x).$$

PROBLEM 4. (5 POINTS)
Let $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a function satisfying $f(n) = n - 3$ for $n \geq 2011$ and $f(n) = f\bigl(f(n+5)\bigr)$ for $1 \leq n < 2011$. Find $f(89)$.

PROBLEM 5. (5 POINTS)
Find all functions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every pair of positive integers m, n, $m > n$

$$f(m+n) + f(m-n) = 2\bigl(f(m) + f(n)\bigr).$$

PROBLEM 6. (5 POINTS)
Find all functions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(x) = f(x^2 + x + 1)$$

for every integer x given that f is

(a) even,
(b) odd.

PROBLEM 7. (5 POINTS)
Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x + y^2 + z) = f\bigl(f(x)\bigr) + yf(y) + f(z)$$

for every triple of real numbers x, y, z.

PROBLEM 8. (5 POINTS)
Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for every real $x \neq 3$

$$f\bigl(f(x)\bigr) = \frac{1}{|x-3|}.$$

Functional equations

4^{TH} AUTUMN SERIES VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Problem 1.

(70; 65; 2,74; 3,0)

Find a function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ different from $f(x) = x$ which satisfies $f(x^2) = x^2$ for every real number x.

(Michal „Kenny“ Rolínek)

ŘEŠENÍ:

Uvažujme libovolnou funkci f, která splňuje $f(x) = x$ pro všechna nezáporná x. Protože pro každé reálné x platí $x^2 \geq 0$, tak zajisté platí $f(x^2) = x^2$. Ovšem na záporných číslech se může f chovat jakkoli, tedy zadání splňuje například $f(x) = |x|$ nebo

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

POZNÁMKY:

Úloha byla pro naprostou většinu řešitelů pochoutkou, čemuž odpovídají i body. Prakticky každý přišel na řešení s absolutní hodnotou, někteří dokonce tvrdili, že je jediné možné, což je trochu odvážné tvrzení … Velice ale oceňuji ty, kteří i přesto, že to byla málo povídací série a ještě k tomu v angličtině, napsali více než jen „Taková funkce je např. absolutní hodnota …“

(Lukáš Zavřel)

Problem 2.

(63; 55; 2,68; 3,0)

Consider an even function $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 6xy + 1$$

for every pair of integers x, y. Determine $f(3)$. *(Alča Skálová)*

ŘEŠENÍ:

Zadaný vztah platí pro všechny dvojice celých čísel, speciálně tedy pro $(x, y) = (0, 0)$. Dozvídáme se

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 0 + 1,$$
$$f(0) = -1.$$

Nyní položme $(x, y) = (3, -3)$ a znovu dosaďme do rovnice:

$$f(3 - 3) = f(3) + f(-3) - 54 + 1.$$

Hledaná funkce musí být sudá, takže musí platit $f(3) = f(-3)$, a tedy

$$f(0) = f(3) + f(3) - 53,$$
$$-1 = 2f(3) - 53,$$
$$f(3) = 26.$$

Každá funkce, která splňuje zadanou funkcionální rovnici, má funkční hodnotu v trojce rovnu 26.

Poznámky:
Mnoho došlých řešení bylo správně. Někteří postupovali tak, že se snažili najít funkce, které rovnici splňují, a určit jejich funkční hodnotu v bodě 3. V takovém případě bylo řešení podstatně těžší. Aby bylo kompletně správně, museli byste totiž najít všechny funkce splňující zadanou rovnici, ukázat, že jiné funkce ji nesplňují, a potom určit hodnoty všech vhodných funkcí v bodě 3. To, že zadané rovnici odpovídá pouze jedna funkce, je vlastně náhoda. Pokud by ji splňovalo více funkcí, mohla by jejich funkční hodnota v bodě 3 být různá. Dále nejde jen tak bez komentáře předpokládat, že hledané funkce musí být kvadratické. *(Kája Rezková)*

Problem 3.

(63; 41; 2,21; 3,0)

Find at least three functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for every real x

$$\big(f(x)\big)^2 = xf(x).$$

(Michal „Kenny" Rolínek)

Řešení:
Zadanou rovnost ekvivalentně upravíme do tvaru $(f(x) - x)f(x) = 0$. To znamená, že každá vyhovující funkce f musí pro každé jednotlivé reálné x splňovat $f(x) = x$ nebo[1] $f(x) = 0$. Na druhou stranu všechny takové funkce podmínkám úlohy vyhovují. Jako příklady proto poslouží

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ f(x) &= 0, \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x \ne 42, \\ 42 & \text{pro } x = 42. \end{cases} \end{aligned}$$

Poznámky:
Téměř všichni, kdo úlohu vyřešili, nalezli funkce $f(x) = x$ a $f(x) = 0$. Ve třetí funkci už se řešení značně lišila. Nejpopulárnější funkce byly ty, které jsou uvedené i ve vzorovém řešení.

Poměrně hodně řešitelů se i přes důrazné zadání, že mají najít alespoň tři funkce, pokoušelo dokázat neexistenci více než dvou takových funkcí. *(Filip Hlásek)*

Problem 4.

(67; 57; 3,93; 5,0)

Let $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a function satisfying $f(n) = n - 3$ for $n \ge 2011$ and $f(n) = f\big(f(n+5)\big)$ for $1 \le n < 2011$. Find $f(89)$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Podle zadání můžeme rozepsat

$$f(89) = f(f(94)) = f(f(f(99))) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{385\times}(2009))\ldots)).$$

Přitom snadno spočteme, že

$$\begin{aligned} &f(2009) = f(f(2014)) = f(2011) = 2008 \qquad \text{a} \\ &f(2008) = f(f(2013)) = f(2010) = f(f(2015)) = f(2012) = 2009, \end{aligned}$$

[1] Pro některá x ovšem může být splněna první podmínka, zatímco pro zbylé ta druhá.

takže

$$f(f(2009)) = f(2008) = 2009.$$

První objevený vztah lze proto postupně upravit až do podoby

$$f(89) = \underbrace{f(f(\dots(f}_{385\times}(2009))\dots)) = \underbrace{f(f(\dots(f}_{383\times}(2009))\dots)) = \dots = f(2009) = 2008.$$

Poznámky:
Mnoho z vás si řeklo, že když má $f(n) = f(f(n+5))$, může z toho vyvodit závěr $n = f(n+5)$. Toto je ale možné pouze pro funkci, která je prostá. Například v této úloze platí $f(2009) = f(2011)$, ale $2009 \neq 2011$, tedy funkce f prostá není. Nebo pro $g(x) = x^2$ platí $g(-x) = g(x)$. Takže odstraňovat „efka“ je třeba s rozmyslem!

Způsoby řešení jste našli v zásadě dva. Buď jste objevili, že $f(2k) = 2009$ a $f(2k+1) = 2008$ a dokázali to matematickou indukcí, nebo jste přišli na to, kolik „efek“ bude v rovnici, než zase začnou ubývat, a našli jste cyklus, kde „efka“ opravdu ubyla (např. $f(f(f(f(f(2014))))) = f(f(2014)))$. Takto jste dostali $f(89) = f(f(2014))$, což už lze snadno spočítat. Mírnou obměnou této druhé varianty bylo to, že jste si uvědomili, že $f(2009) = 2008$ a $f(2008) = 2009$, a postupovali, jak je popsáno ve vzoráku. *(Monča Pospíšilová)*

Problem 5.

(48; 37; 3,10; 3,5)

Find all functions $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every pair of positive integers m, n, $m > n$

$$f(m+n) + f(m-n) = 2\big(f(m) + f(n)\big).$$

(Vejtek Musil)

Řešení:
Předpokládejme, že taková funkce f existuje.

Dosadíme-li za (m, n) postupně $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ a $(4, 1)$, dostaneme

$$f(3) + f(1) = 2f(2) + 2f(1),$$
$$f(4) + f(2) = 2f(3) + 2f(1),$$
$$f(5) + f(1) = 2f(3) + 2f(2),$$
$$f(5) + f(3) = 2f(4) + 2f(1).$$

Vezmeme-li čtvrtou rovnici, odečteme třetí, přičteme dvojnásobek druhé a jednou přičteme první, získáme

$$2f(2) + 2f(3) + 2f(4) = 2f(4) + 2f(3) + 8f(1),$$
$$f(2) = 4f(1).$$

Nyní už matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $f(n) = f(1) \cdot n^2$.

(i) Pro $n = 1$ a $n = 2$ tvrzení platí.

(ii) Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $k \leq n$. Dosazením $(n, 1)$ obdržíme

$$f(n+1) + f(n-1) = 2f(n) + 2f(1).$$

Podle indukčního předpokladu je ale $f(n) = f(1) \cdot n^2$ a $f(n-1) = f(1) \cdot (n-1)^2$, takže platí

$$f(n+1) = f(1)(2n^2 - (n-1)^2 + 2) = f(1)(n+1)^2$$

a jsme s indukcí hotovi.

Na druhou stranu položíme-li $f(1) = c$, pak funkce $f(n) = c \cdot n^2$ je pro libovolné přirozené c skutečně řešením, neboť pro všechna přípustná m, n platí

$$f(m+n) + f(m-n) = f(1)(m+n)^2 + c(m-n)^2 = 2cm^2 + 2cn^2 = 2(f(m) + f(n)).$$

Poznámky:

Lidé zběhlejší v řešení funkcionálních rovnic si s úlohou hravě poradili. Jak to tak bývá, dost z vás zapomnělo provést zkoušku a někteří si změnili definiční obor bez toho, aby dokázali, že mohou (obecně určitě nemohou). Za to jsem strhával bod. Obecně jsem uděloval tři body za důkaz, že rovnice jiné řešení nemá, a po jednom bodu za správné určení této funkce a její zkoušku.

Rád bych pochválil *Janu Sotákovou* za znalost teorie rekurentních rovnic a *Marka Karpilovského* za pěkně sepsané řešení, stejné jako ve vzoráku, za které si vysloužil jediné i-čko.

(Michael „Majkl“ Bílý)

Problem 6.

(47; 41; 3,83; 5,0)

Find all functions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(x) = f(x^2 + x + 1) \tag{1}$$

for every integer x given that f is

(a) *even,*
(b) *odd.*

(Alča Skálová)

Řešení:

Předpokládejme, že existuje funkce f, která má požadované vlastnosti. Pak pro každé celé x platí

$$\underline{f(x-1)} = f\big((x-1)^2 + (x-1) + 1\big) = f\big(x^2 - x + 1\big) = f\big((-x)^2 + (-x) + 1\big) = \underline{f(-x)}. \tag{2}$$

část (a). Označme $f(0) = c$, $c \in \mathbb{Z}$. Funkce f je sudá, což spolu s (2) dává

$$f(x) = f(-x) = f(x-1).$$

Odtud již matematickou indukcí snadno ukážeme, že $f(x) = c$.

Jedinými kandidáty na řešení jsou tedy konstantní funkce $f(x) = c$ pro $c \in \mathbb{Z}$. Všechny takové funkce jsou jednak sudé, jednak splňují rovnost (1), a tedy jsou vskutku řešením.

část (b). Díky lichosti funkce f a (2) platí pro každé celé x rovnost

$$f(x) = -f(-x) = -f(x-1),$$

tedy speciálně

$$f(x) = -f(x-1) = -(-f(x-2)) = f(x-2).$$

Odtud opět pomocí matematické indukce plyne, že funkce f je konstantní na celých číslech se stejnou paritou[2].

Jelikož funkce f je lichá, musí platit $f(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ do (1) dostáváme $f(0) = f(1)$, což spolu s výše uvedeným dává jedinou možnost pro funkci f, a tou je $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{Z}$.

Zbývá ověřit, že funkce $f(x) = 0$ je lichá a splňuje (1). Obojí je pravda.

Poznámky:

Na hlavní trik „dosaď $x - 1$“ přišla většina z vás. Pokud v řešení něco chybělo, bylo to většinou ověření, že nalezené funkce skutečně zadání vyhovují. Nejspíš se něco podobného dočtete i v jiných poznámkách, ale pokud řešíte nějakou funkcionální rovnici výše uvedeným způsobem (tedy postupným zjišťováním, co určitě musí funkce splňovat, aby vůbec mohla být řešením), je nezbytně nutné ještě ověřit, že všechny takové „kandidující“ funkce zadání skutečně vyhovují.

Na závěr bych chtěla pochválit všechny řešitele, že se nezalekli angličtiny a úspěšně se s ní utkali.

(Alča Skálová)

[2] Dvě celá čísla mají stejnou paritu, jsou-li obě sudá, nebo obě lichá.

Problem 7.

(36; 21; 2,58; 2,0)

Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x + y^2 + z) = f\big(f(x)\big) + yf(y) + f(z)$$

for every triple of real numbers x, y, z. *(Viktor Szabados)*

Řešení:
Předpokládejme, že f je libovolná z hledaných funkcí. Nejprve provedeme několik dosazení za (x, y, z) do rovnice ze zadání.

$$\begin{aligned}
(0,0,0)&\colon f(0) = f\big(f(0)\big) + f(0) \Rightarrow f\big(f(0)\big) = 0,\\
(0,1,0)&\colon f(1) = f\big(f(0)\big) + f(1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,\\
(x,0,0)&\colon f(x) = f\big(f(x)\big) + f(0) = f\big(f(x)\big),\\
(x,0,z)&\colon f(x+z) = f\big(f(x)\big) + f(z) = f(x) + f(z),\\
(0,y,0)&\colon f\big(y^2\big) = f\big(f(0)\big) + yf(y) + f(0) = yf(y).
\end{aligned}$$

Nechť x je libovolné reálné číslo. Použitím posledních dvou rovností vyjádříme dvěma způsoby výraz $f((x+1)^2)$. Jednak máme

$$f\big((x+1)^2\big) = (x+1)f(x+1) = (x+1)\big(f(x) + f(1)\big) = xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1),$$

jednak platí

$$f\big((x+1)^2\big) = f\big(x^2 + 2x + 1\big) = f\big(x^2\big) + f(x) + f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1).$$

Porovnáním pravých stran obou rovností dostáváme $xf(1) = f(x)$. Volbou $x = f(1)$ získáváme $f(1)^2 = f\big(f(1)\big) = f(1)$, proto musí platit $f(1) = 0$ nebo $f(1) = 1$. Dosazením do rovnice ze zadání snadno ověříme, že obě funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = x$ vyhovují předpokladům naší úlohy (a jsou tedy jejími jedinými řešeními).

Poznámky:
Plným počtem bodů jsem ohodnotila přibližně 40% došlých řešení. Žádné z těchto řešení se výrazným způsobem nelišilo od toho vzorového, vyjádření funkční hodnoty druhé mocniny vhodného součtu (ve vzorovém řešení šlo o součet $x + 1$) dvěma způsoby se ukázalo být stěžejním krokem, bez něhož se neobešel žádný z úspěšných řešitelů.

Mnozí z těch méně úspěšných ukončili své řešení předčasně ve chvíli, kdy dokázali, že každá funkce vyhovující zadání musí splňovat Cauchyovu funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Došli totiž k mylnému závěru, že všechna řešení takovéto rovnice musí být tvaru $f(x) = ax$ pro nějakou reálnou konstantu a. To ovšem není pravda, existují i další funkce řešící Cauchyovu funkcionální rovnici. Takové funkce jsou ovšem již dosti divoké (například jsou neomezené na každém otevřeném intervalu). I přes tuto "divokost" ale není vůbec zřejmé, že by takováto funkce nemohla řešit naši původní rovnici, proto jsem řešení obsahující výše popsanou chybu hodnotila nejvýše dvěma body.

(Lenka Slavíková)

Problem 8.

(6; 6; 3,83; 4,0)

Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for every real $x \neq 3$

$$f\big(f(x)\big) = \frac{1}{|x-3|}.$$

(Vejtek Musil)

Řešení:
V celém řešení budeme symbolem $f^n(x)$ značit funkci f složenou n-krát, tj. funkci

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n\times}(x)\dots)).$$

Předpokládejme, že funkce f vyhovující zadání existuje. Sporu dosáhneme zkoumáním počtů pevných bodů funkcí f^2, f^4 a f^8. Úloha se skládá ze dvou částí.

1. část – pevné body a cykly obecně. Zaměřme se na cykly funkce f; n-*cyklem* funkce f přitom rozumíme takovou n-prvkovou množinu reálných čísel, jejíž prvky lze označit $x_1, \dots, x_n$ tak, že

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad \dots, \quad f(x_n) = x_1.$$

Souvislost n-cyklů s pevnými body je nasnadě. Číslo x je pevným bodem funkce f^n právě tehdy, je-li prvkem d-cyklu pro nějakého dělitele d čísla n.

Označíme-li proto písmeny A, B, C, D postupně počty 1-cyklů (tedy pevných bodů funkce f), 2-cyklů, 4-cyklů a 8-cyklů, jsou počty pevných bodů funkcí f^2, f^4 a f^8 po řadě rovny[3] $A + 2B$, $A + 2B + 4C$ a $A + 2B + 4C + 8D$. Z toho speciálně plyne, že rozdíl počtů pevných bodů funkcí f^4 a f^2 musí být dělitelný čtyřmi a rozdíl počtů pevných bodů funkcí f^8 a f^4 musí být dělitelný osmi.

2. část – pevné body pravé strany. Nyní využijeme toho, že funkci f^2 téměř známe. Ze zadání víme, že pro $x \neq 3$ platí

$$f^2(x) = \frac{1}{|x-3|}.$$

Hodnotu v bodě 3 označíme c a v závislosti na c určíme počty pevných bodů funkcí f^2 a $f^4 = (f^2)^2$. Řešíme tedy rovnici

$$x = \begin{cases} c, & \text{pokud } x = 3, \\ \frac{1}{|x-3|}, & \text{jinak} \end{cases}$$

a následně rovnici

$$x = \begin{cases} c, & \text{pokud } x = c = 3 \text{ nebo } \frac{1}{|x-3|} = 3, \\ \frac{1}{|c-3|}, & \text{pokud } x = 3,\ c \neq 3, \\ \frac{1}{\left|\frac{1}{|x-3|} - 3\right|} & \text{jinak.} \end{cases}$$

To jsou po úpravě všechno nejvýše kvadratické rovnice s absolutní hodnotou, které v závislosti na intervalech určených příslušnými absolutními hodnotami snadno vyřešíme. Zjistíme, že

(i) Pro $c = 3$ má f^2 čtyři pevné body a f^4 šest.
(ii) Pro $c = 3 \pm 1/3$ má f^2 pouze tři pevné body, f^4 dokonce sedm.
(iii) Jinak má f^2 tři pevné body a f^4 jich má pět.

Jelikož rozdíl počtů pevných bodů funkcí f^2 a f^4 musí být dělitelný čtyřmi, v úvahu připadá pouze možnost (ii), v níž $c = 8/3$ nebo $c = 10/3$.

Pro tyto dvě hodnoty c spočítáme ještě počet pevných bodů funkce $f^8 = (f^2)^4$. Vyřešením příslušné (opět kvadratické) rovnice na 16 intervalech zjistíme, že f^8 má v obou případech 19 pevných bodů. Rozdíl počtu pevných bodů funkcí f^8 a f^4 tak činí 12, což není dělitelné osmi, a spor je dosažen.

Žádná taková funkce f neexistuje. *(Pepa Tkadlec)*

[3] Zde by se slušelo ošetřit případy, kdy je cyklů některého typu nekonečně mnoho, ale jak se ukáže později, to stejně není náš případ.

Poznámky:
Tato úloha s sebou nese poněkud netradiční příběh. Když jsem úlohu vymýšlel, mělo jít o snadnou variaci na problém pevných bodů, jenž rychle podlehne standardní metodě řešení. Při zadání úlohy nikdo netušil, že onen „výjimečný“ bod $x = 3$ dokáže způsobit takové rozčarování. Poprvé jsem znervózněl onehdy, když se do zadání vloudila chyba. Po jejím odstranění jsem si úlohu znovu rozmyslel a přesvědčil se, že je stále „dobře“ řešitelná.

Ve všech došlých řešeních pisatelé v boji tasili standardní nástroje, totiž označili pravou stranu zadané rovnice jako g a hledali pevné body jak g, tak $g \circ g$. Problém, který však zmařil šanci na výhru, vyvstal ve formulce

$$fg(x) = fff(x) = gf(x),$$

jež v tomto případě obecně neplatí. První rovnost ještě odolá, neboť platí pro všechna $x \neq 3$, naděje však uhasíná v případě druhé rovnosti, jelikož ta zůstane v platnosti pouze pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která je $f(x) \neq 3$, a o tomto oboru víme pramálo. Správný postup zvolil pouze *Anh Dung Le*, kterýžto se jal definovati $g(x) = ff(x)$, čímž zajistil platnost výše zmíněného vztahu. I on se však nevyvaroval omylu, jenž přišel záhy při určování fixpunktů. Zapomněl totiž vzít do úvahy hodnotu $g(3)$, která se v řešení ukázala býti klíčovou.

Tyto drobné nuance, které úlohu destandardizovaly, jsem si postupně uvědomoval, až když jsem si došlá řešení pročítal. Původní argument, totiž že rozdíl počtu pevných bodů funkcí g a $g \circ g$ není dělitelný čtyřmi, přestal fungovat pro případ, kdy $g(3) = 1 \pm 1/3$. Zjistil jsem, že úlohu v této fázi neumím vyřešit a jal jsem se tedy metodu pevných bodů zobecnit. Během práce jsem bojoval se strachem, že existenci řešení nepůjde vyvrátit elementárními nástroji, nebo hůře, že se mi to nepodaří vůbec. Nakonec, i díky Alexandru „Olinovi“ Slávikovi, kterýžto mi byl nápomocen, se nám podařilo úlohu zkrotit. Dík patří i Josefu Tkadlecovi, který naše řešení zjednodušil a napsal přehledný vzorák.

Udělit body v plné výši nebylo možné, avšak jelikož se úloha stala neúmyslně obtížnější, byl jsem benevolentní a snížil jsem bodové hodnocení o jeden stupeň.

Tato veskrze pozoruhodná úloha se tímto stala tak trochu rozmazanou tečkou za podzimní částí našeho semináře. *(Vít „Vejtek“ Musil)*