Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. KVĚTNA 2013

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Mohou být v konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ všechny úhly

$$\sphericalangle EAC,\ \sphericalangle ABD,\ \sphericalangle BCE,\ \sphericalangle CDA,\ \sphericalangle DEB$$

zároveň tupé? (2 BODY)

(b) Ukažte, že v konvexním pětiúhelníku, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly různě velké, spolu sousedí[1] nejmenší a největší úhel. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Součet kladných reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$ je alespoň n. Dokažte, že pro každé $k = 1, \ldots, n$ lze vybrat některých k z nich, která mají součet alespoň k. (2 BODY)

(b) *Silou* n-tice navzájem různých reálných čísel rozumíme počet jejích možných uspořádání $(a_1, \ldots, a_n)$ takových, že pro každé $k = 1, \ldots, n$ platí $a_1 + \cdots + a_k > 0$. Jakou nejmenší sílu (v závislosti na n) může mít n-tice navzájem různých reálných čísel s kladným součtem?

(3 BODY)

ÚLOHA 3.

Je možné rozdělit množinu všech přirozených čísel na

(a) konečně mnoho (2 BODY)

(b) nekonečně mnoho (3 BODY)

nekonečných množin tak, aby uvnitř každé množiny byla čísla navzájem nesoudělná?

ÚLOHA 4.

(a) Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že přímka AP je kolmá na přímku BC. (2 BODY)

(b) Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí

$$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PCA| = \frac{1}{3}(|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA|).$$

Ukažte, že

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC| + |PB|}{|AB| + |PC|}.$$

(3 BODY)

[1] Dva úhly spolu v mnohoúhelníku sousedí, pokud jedna ze stran mnohoúhelníku je zároveň ramenem obou úhlů.

Úloha 5.

(a) Nalezněte všechna celá čísla z taková, že obě čísla $z-1$ a z^3+z^2+z+1 jsou druhou mocninou nějakého celého čísla. (2 body)

(b) Nalezněte všechny trojice kladných celých čísel a, b, c tak, aby každá z následujících kvadratických rovnic měla pouze celočíselná řešení:

$$x^2-2ax+b=0,$$
$$y^2-2by+c=0,$$
$$z^2-2cz+a=0.$$

(3 body)

Úloha 6.

Deltoid je konvexní čtyřúhelník, který je osově souměrný podle alespoň jedné své úhlopříčky.

(a) Dokažte, že každý trojúhelník lze rozdělit na 3 deltoidy. (2 body)

(b) Dokažte, že každý konvexní čtyřúhelník lze rozdělit na 7 deltoidů. (3 body)

Úloha 7.

(a) Šavlík kdysi do jisté tabulky 8×8 vepsal čísla 1 až 64 (každé právě jednou). Dokažte, že ať už to udělal jakkoliv, existují v tabulce alespoň čtyři čtverce 2×2 takové, že součet čísel v každém z nich je alespoň 106. (2 body)

(b) V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o n zákonech (poslanec může být buď *pro* schválení zákona, nebo *proti* jeho schválení, nebo se může *zdržet* hlasování). Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom z nich hlasoval pro a v jednom proti. Označme z_i počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o i-tém zákonu. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \le 2^{200}.$$

(3 body)

Finální myšmaš

4. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(25; 16; 2,40; 2,0)

(a) *Mohou být v konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ všechny úhly*

$$\sphericalangle EAC,\ \sphericalangle ABD,\ \sphericalangle BCE,\ \sphericalangle CDA,\ \sphericalangle DEB$$

zároveň tupé? *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Ukažte, že v konvexním pětiúhelníku, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly různě velké, spolu sousedí[2] nejmenší a největší úhel.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

(a) Nemohou. Pro spor předpokládejme, že by všechny tyto úhly tupé byly. Pak BÚNO[3] je BD nejdelší úhlopříčka (případně jedna z nejdelších). V trojúhelníku ABD je (ostře) nejdelší strana naproti největšímu tupému úhlu ABD, proto $|AD| > |BD|$. Tedy AD je ostře větší úhlopříčka, což je spor s předpokladem.

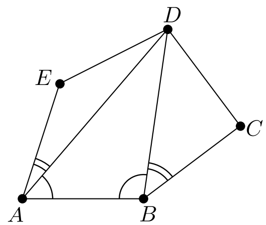
(b) Označme pětiúhelník $ABCDE$, největší úhel je BÚNO u vrcholu E. Speciálně je tedy $|\sphericalangle AED| > |\sphericalangle BCD|$. Trojúhelníky AED a BCD jsou rovnoramenné, přičemž $|AE| = |BC|$, odkud plyne $|AD| > |BD|$. Dále z těchto trojúhelníků dopočteme

$$|\sphericalangle CBD| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle BCD|}{2} > \frac{180^\circ - |\sphericalangle AED|}{2} = |\sphericalangle EAD|.$$

V trojúhelníku ABD je větší úhel naproti větší straně, proto $|\sphericalangle ABD| > |\sphericalangle BAD|$. Sečtením dostáváme

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle CBD| > |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BAE|,$$

čili úhel u vrcholu B není nejmenší (vzhledem k tomu, že je větší než úhel u vrcholu A). Analogicky můžeme ukázat, že úhel u vrcholu C není nejmenší, a zřejmě ani úhel u vrcholu E není nejmenší. Nejmenší úhel je tedy u jednoho z vrcholů A, D, což jsme chtěli ukázat.



[2] Dva úhly spolu v mnohoúhelníku sousedí, pokud jedna ze stran mnohoúhelníku je zároveň ramenem obou úhlů.

[3] Oblíbená matematická zkratka „bez újmy na obecnosti“ říká, že můžeme zadání přeznačit, aby platilo námi požadované, a přitom naše úprava neměla žádný vliv na zbytek úlohy.

Poznámky:
Jakkoli nebyla úloha příliš obtížná, mnoho řešení se nesešlo. V části (a) si někteří špatně přečetli zadání a mysleli si, že vypsané úhly jsou vnitřní úhly pětiúhelníku. Ostatní úlohu většinou víceméně vzorově vyřešili. Část (b) byla složitější, vedle vzorového postupu se často vyskytovala kosinová věta – ta je popravdě i ve vzorovém řešení na místě pro zdůvodnění $|AD| > |DB|$. Největší práci mi ale dal jeden „ostřílený" řešitel, který se jal úlohu „uhýbat".

(Mirek Olšák)

Úloha 2.

(43; 39; 2,26; 2,0)

(a) *Součet kladných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$ je alespoň n. Dokažte, že pro každé $k = 1, \dots, n$ lze vybrat některých k z nich, která mají součet alespoň k.* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Silou n-tice navzájem různých reálných čísel rozumíme počet jejích možných uspořádání $(a_1, \dots, a_n)$ takových, že pro každé $k = 1, \dots, n$ platí $a_1 + \dots + a_k > 0$. Jakou nejmenší sílu (v závislosti na n) může mít n-tice navzájem různých reálných čísel s kladným součtem?*

(Pepa Tkadlec)

Řešení:
(a) Pro pohodlí dodefinujme $a_{n+1} = 0$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n > a_{n+1} = 0$. Označme i takový index, aby $a_i \ge 1 > a_{i+1}$. Tvrdíme, že pro každé k poslouží k-tice $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Skutečně, pro $k \le i$ je

$$a_1 + \dots + a_k \ge \underbrace{1 + \dots + 1}_{k\times} = k$$

a pro $k > i$ je

$$a_{k+1} + \dots + a_n < \underbrace{1 + \dots + 1}_{(n-k)\times} = n - k,$$

takže $a_1 + \dots + a_k > n - (n - k) = k$.

Jiné řešení:
Pro libovolné $k \le n$ si představme čísla $a_1, \dots, a_n$ napsaná v kruhu a uvažme následujících n součtů k-tic vzniklých „rotací" k-tice $\{a_1, \dots, a_k\}$:

$$s_1 = a_1 + \dots + a_k, \quad s_2 = a_2 + \dots + a_{k+1}, \quad \dots, \quad s_n = a_n + a_1 + \dots + a_{k-1}.$$

Každé číslo se vyskytuje v přesně k různých součtech, takže

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = k(a_1 + \dots + a_n) \ge k \cdot n.$$

To ale znamená, že alespoň jeden z těchto n součtů je roven alespoň k, což jsme chtěli dokázat.

(b) Řekneme, že uspořádání $(a_1, \dots, a_n)$ dané n-tice čísel je *silné*, pokud pro každé $k \le n$ platí $a_1 + \dots + a_k \ge 0$.

Čísla $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{2^{n-1}}, +1\right\}$ se dají silně uspořádat přesně $(n-1)!$ způsoby. První číslo totiž musí být jednička a na pořadí zbylých čísel nezáleží.

Dále dokážeme, že pro libovolnou neuspořádanou n-tici čísel s nezáporným součtem je silné alespoň jedno z jejích n navzájem „zrotovaných" uspořádání

$$(a_1, \dots, a_n), (a_2, \dots, a_n, a_1), \dots, (a_n, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

To bude znamenat, že jsou jednotlivá uspořádání rozdělena do n-členných skupinek, ve kterých je vždy alespoň jedno uspořádání silné. Proto bude silných uspořádání alespoň $\frac{1}{n} \cdot n! = (n-1)!$ a my budeme hotovi.

Uvažme takový index i, že součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ je nejmenší možný. Všimněme si, že pak pro každé $k \geq i+1$ platí $a_{i+1} + \cdots + a_k \geq 0$, a naopak pro každé $k \leq i$ platí $a_k + \cdots + a_i \leq 0$. Dokážeme, že uspořádání $(a_{i+1}, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_i)$ je silné.

Pro $k = i$ je to jasné a pro $k \geq i+1$ jsme si už všimli, že $a_{i+1} + \cdots + a_k$ je nezáporné. Zbývá tedy spočítat, že pro $k < i$ je

$$a_{i+1} + \cdots + a_n + a_1 + \cdots + a_k = (a_1 + \cdots + a_n) - (a_{k+1} + \cdots + a_i) \geq a_1 + \cdots + a_n \geq 0,$$

a jsme hotovi.

Poznámky:
S první částí nebyly téměř žádné problémy. Kromě dvou výše popsaných postupů se ještě vyskytlo několik řešení využívajících indukci a celá řada řešení vycházejících z toho, že když je průměr n čísel roven alespoň jedné, tak je průměr těch k největších z nich také roven alespoň jedné.

S druhou částí to bylo o poznání horší. Z nemnoha úspěšných řešitelů bych chtěl vyzdvihnout *Martina Raszyka*, který to, že alespoň jedna z rotací je silná, ukazoval velmi pěkně sporem. Ve zkratce: předpokládal, že pro každou rotaci existuje sled se záporným součtem, a postupným navazováním záporných sledů jednoho za druhým se zacyklil, čímž dostal spor s nezáporností celkového součtu.

Na závěr všem, kdo nevyřešili část (b), doporučuji rozmyslet si za doma následující úlohu: V n benzinových stanicích rozestavených kolem závodního okruhu je dohromady přesně tolik benzinu, kolik spotřebuje auto na objetí jednoho kola. Dokažte, že auto s prázdnou nádrží může začít u jedné benzinky a objet celý okruh (u každé benzinky může natankovat).[4]

(Pepa Tkadlec)

Úloha 3.

(49; 42; 2,69; 2,0)

Je možné rozdělit množinu všech přirozených čísel na
(a) *konečně mnoho*
(b) *nekonečně mnoho*
nekonečných množin tak, aby uvnitř každé množiny byla čísla navzájem nesoudělná?

(Mirek Olšák)

Řešení:
(a) Všimněme si, že sudá přirozená čísla jsou po dvou soudělná. Kdykoliv tedy rozdělíme množinu všech přirozených čísel na množiny s nesoudělnými prvky, může být v každé této rozkladové množině nejvýše jedno sudé číslo. Protože je však sudých čísel nekonečně mnoho, musí takový rozklad nutně sestávat z nekonečně mnoha množin. Rozklad ze zadání tedy neexistuje.

(b) Dokážeme, že bez omezení na počet množin již popsaný rozklad můžeme najít. Ukážeme si několik konstrukcí.

Řešení postupným umísťováním a budováním množin:
Přirozená čísla budeme postupně umísťovat do množin $M_1, M_2, \ldots,$ které jsou na začátku prázdné. V n-tém kroku vždy umístíme číslo n následovně: najdeme nejmenší $i \in \mathbb{N}$ takové, že všechna čísla v M_i jsou s n nesoudělná (takové i jistě existuje – protože jsme zatím umístili jen $n-1$ čísel, je možným kandidátem např. $i = n$, neboť M_n je zatím prázdná) a umístíme n do M_i. Tento krok provedeme pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Po provedení výše uvedené konstrukce obsahuje každá z vytvořených množin pouze nesoudělná čísla, protože jsme do nich přidávali pouze čísla nesoudělná s těmi již umístěnými. Zbývá

[4] *www.cut-the-knot.org/proofs/GasStations.shtml*

ověřit, že všechny množiny jsou vskutku nekonečné. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není, a uvažme nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že množina M_k je konečná. Nechť p je nějaké prvočíslo větší než všechny prvky M_k. Pak $p, p^2, \dots, p^k$ je k po dvou soudělných čísel, musí tedy být umístěna v k různých množinách – jedno z nich proto musí být umístěno v množině M_m pro nějaké $m > k$ (v M_k žádné být nemůže a do $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$ se „nevejdou"). To je však spor, neboť toto číslo je nesoudělné se všemi čísly v M_k, a tak se v příslušném kroku muselo umístit do M_k.

Řešení postupným umísťováním s tvorbou hotových množin:
Opět budeme umísťovat čísla postupně, nyní bude ovšem n-tý krok probíhat následovně: vezmeme si nejmenší přirozené číslo, které jsme ještě do žádné množiny neumístili (označme ho k), to umístíme do množiny M_n a spolu s ním tam přidáme n-té mocniny všech prvočísel větších než k. Vzniklé množiny M_i, $i \in \mathbb{N}$, jsou jistě nekonečné a čísla uvnitř nich jsou navzájem nesoudělná. Protože jsme v každém kroku umísťovali pouze ještě neumístěná čísla, jsou tyto množiny disjunktní, navíc je jejich sjednocením množina všech přirozených čísel, protože každé číslo n bylo umístěno nejpozději v n-tém kroku do nějaké množiny.

Řešení přímým popisem množin (podle Martina Raszyka):
Nastíníme ještě jedno řešení, které dává asi nejpřesnější popis toho, jak bude výsledný rozklad vypadat. Z praktických důvodů budeme rozdělovat množinu přirozených čísel bez jedničky – označme ji $\mathbb{M}$; jednička je se všemi čísly nesoudělná, a tak ji nakonec můžeme přidat do kterékoliv množiny.

Pro $x \in \mathbb{M}$ definujme jeho *následníka* x^+ předpisem $x^+ = x(x-1)+1$. Naopak číslo $x^\circ \in \mathbb{M}$ takové, že $(x^\circ)^+ = x$, nazveme *předchůdcem* x. Snadno nahlédneme, že pro všechna $x \in \mathbb{M}$ platí $x^+ > x$, a pokud má nějaké číslo předchůdce, pak je tento určen jednoznačně. Označme B množinu všech čísel z $\mathbb{M}$, která nemají předchůdce, a pro každé $b \in B$ definujme množinu $M_b = \{b, b^+, b^{++}, \dots\}$. Pak z jednoznačnosti následníka a předchůdce jsou tyto množiny po dvou disjunktní a každé číslo z $\mathbb{M}$ bude v jedné takové množině (opakováním operace předchůdce dostatečně mnohokrát musíme dojít k číslu, které předchůdce nemá).

Zbývá dokázat, že čísla uvnitř jedné takové množiny jsou nesoudělná. Za tímto účelem uvažme dvě libovolná $m, n \in M_b$, $m < n$. Pak m můžeme dostat z n opakováním operace předchůdce, takže

$$n = n^\circ(n^\circ - 1) + 1 = n^\circ n^{\circ\circ}(n^{\circ\circ} - 1) + 1 = \cdots = n^\circ n^{\circ\circ} n^{\circ\circ\circ} \cdots m(m-1) + 1,$$

tedy n dává po dělení m zbytek 1, a tato dvě čísla jsou tak nesoudělná.

Ještě poznamenejme, že čísel bez předchůdce je nekonečně mnoho, jinak bychom dostali spor s tvrzením (a).

Poznámky:
Když jsem se pouštěl do opravování této úlohy, měl jsem obavy, že si v řešeních přečtu spoustu „mlhy" o nekonečnu. Naštěstí jste mě příjemně překvapili a mnohá řešení bylo vysloveně radost kontrolovat. Část (a) měl dobře téměř každý, kdo správně pochopil zadání, a část (b) se také ukázala být nepříliš obtížnou. Velmi se mi líbilo, jak se v béčku vyskytlo docela dost různých řešení – kromě těch zmíněných ve vzorovém výše a variací na ně ještě bylo oblíbenou metodou rozdělit čísla podle „sady exponentů v prvočíselném rozkladu", tedy na prvočísla, jejich mocniny, součiny po sobě jdoucích atd. Tuto techniku však korektně popsal pouze *Rado Švarc*, ostatní řešitelé jen zběžně nastínili konstrukci množin čísel s dvěma různými prvočíselnými děliteli a prohlásili, že pro vyšší počty se to provede obdobně, za což jsem udílel pouze dva body.

(Alexander „Olin" Slávik)

Úloha 4. (47; 44; 2,89; 2,0)

(a) *Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30^\circ$, $|\sphericalangle PBC| = 40^\circ$, $|\sphericalangle BCP| = 20^\circ$ a $|\sphericalangle PCA| = 30^\circ$. Ukažte, že přímka AP je kolmá na přímku BC.*

(Pepa Tkadlec)

(b) *Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí*

$$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PCA| = \frac{1}{3}(|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA|).$$

Ukažte, že

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC| + |PB|}{|AB| + |PC|}.$$

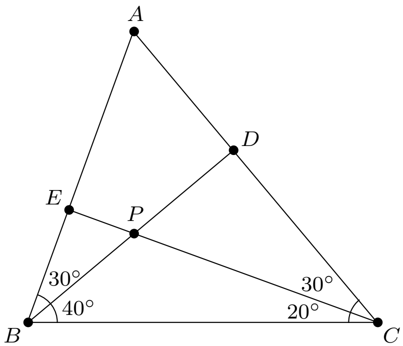
(Pepa Tkadlec)

Řešení:

(a) Buď D průsečík přímek BP a AC, E průsečík přímek CP a AB. V trojúhelníku BCD známe dva úhly a snadno dopočítáme třetí:

$$|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Stejně tak v trojúhelníku BCE dopočteme, že úhel CEB je pravý. Úsečky CE a BD jsou tedy výšky trojúhelníka ABC a P je jeho ortocentrem. Přímka AP tedy obsahuje výšku z bodu A, a je tedy kolmá na přímku BC.



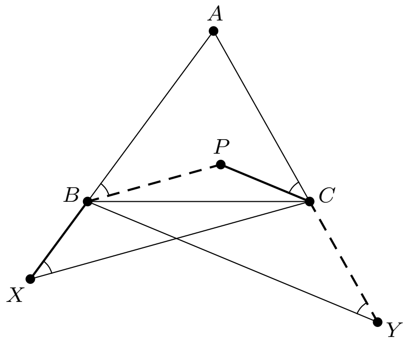
(b) Buď X bod na polopřímce AB takový, že $|AX| = |AB| + |PC|$. Symbol ω značí úhel ABP.

Ze zadání víme, že $3\omega = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA|$. Součet úhlů CBP a BCP tedy spočítáme jako

$$|\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| - 2\omega = \omega.$$

To znamená, že úhel BPC má velikost $180^\circ - \omega$ stejně jako úhel PBX. Čtyřúhelník $PBXC$ je tedy (rovnoramenný) lichoběžník, a proto je $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle ABP| = \omega$.

Označme podobně Y bod na polopřímce AC takový, že $|AY| = |AC| + |PB|$. Stejně jako v předchozím případě máme $|\sphericalangle AYB| = \omega$.



Trojúhelníky ABY a ACX jsou proto podobné podle věty uu. Dostáváme tedy

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AY|}{|AX|} = \frac{|AC| + |PB|}{|AB| + |PC|},$$

což bylo dokázati.

Poznámky:
Většina těch, kteří poslali první část, za nějaký čas více či méně přímo vyúhlila správné řešení a dostala dva body. Imaginární bod jsem strhl za použití nechutně silných nástrojů v podobě Cèvovy věty.

Na těžší části úlohy mi řešitelé ukázali několik moc pěkných řešení využívajících podobnost a mocnost, za která dostali zasloužená $+i$-čka. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Úloha 5.

(43; 32; 2,72; 2,0)

(a) *Nalezněte všechna celá čísla z taková, že obě čísla $z-1$ a z^3+z^2+z+1 jsou druhou mocninou nějakého celého čísla.* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Nalezněte všechny trojice kladných celých čísel a, b, c tak, aby každá z následujících kvadratických rovnic měla pouze celočíselná řešení:*

$$x^2 - 2ax + b = 0,$$
$$y^2 - 2by + c = 0,$$
$$z^2 - 2cz + a = 0.$$

(Míša Hubatová)

Řešení:
(a) Nechť z je celé číslo vyhovující podmínkám ze zadání. Pak platí $z-1 = a^2$ a $z^3+z^2+z+1 = b^2$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$, a tudíž také $(z-1)(z^3+z^2+z+1) = z^4-1 = a^2b^2$. Tedy z^4 a a^2b^2 jsou dva čtverce[5], které se liší o jedna. Jedinou takovou dvojicí jsou čísla 0 a 1, což nám dává $z^4 = 1$, neboli $z \in \{-1, 1\}$. Ovšem $z = -1$ nevyhovuje, neboť $z-1$ není v tomto případě čtverec. Pro $z = 1$ je $a = 0$ a $b = 2$, tedy 1 je jediným řešením úlohy.

[5] Čtvercem rozumíme druhou mocninu celého čísla, tj. číslo tvaru k^2 pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Přičtením výrazu a^2-b k oběma stranám první rovnice dostaneme $(x-a)^2 = a^2-b$. Jelikož a, b jsou celá čísla, bude mít rovnice pouze celočíselná řešení právě tehdy, když a^2-b bude čtverec nebo $a^2 - b < 0$. Platí $a^2 - b < a^2$, neboť b je kladné. Tedy v obou případech $a^2 - b \le (a-1)^2$, ekvivalentně $2a - 1 \le b$. Analogickým postupem získáme z druhé a třetí rovnice podmínky $2b - 1 \le c$ a $2c - 1 \le a$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $2(a+b+c) - 3 \le a+b+c$, což nám po úpravě dá nerovnost $a+b+c \le 3$. Protože $a \ge 1$, $b \ge 1$, $c \ge 1$, vyhovuje pouze $a = b = c = 1$. V tomto případě má každá z rovnic dvojnásobný kořen 1.

Poznámky:

Část (a) dělala kupodivu větší problémy než část (b). Mnozí řešitelé tvrdili, že pokud platí $k^2 = xy$, $k, x, y \in \mathbb{Z}$, musí být buď $x = y$, nebo musí být obě tato čísla čtverci. To samozřejmě není pravda, neboť je-li například $k = pq$, kde p, q jsou různá prvočísla, pak k^2 lze napsat jako $p \cdot pq^2$, přičemž $p \neq pq^2$ a ani jedno z těchto čísel není čtverec.

Část (b) byla bohužel zadaná trochu nešťastně. Ze slov „rovnice má pouze celočíselná řešení“ totiž nebylo jasné, zda rovnice, která nemá žádné reálné kořeny, podmínku splňuje, nebo ne. První (tj. složitější) variantou se zabýval pouze jediný řešitel. Plný počet bodů jsem nakonec udělila i všem těm, kteří správně vyřešili druhou variantu.

K části (b) mám ještě jedno konstatování. Před několika lety jsme v semináři začali upřednostňovat „celá kladná čísla“ před „přirozenými čísly“, abychom nemuseli stále zdůrazňovat, že nulu za přirozené číslo nepovažujeme. Říkala jsem si tehdy, jak je to fajn, že se tím vše vyřeší. Ale jaká je realita? Hned několik řešitelů váhá, zda nula není kladné číslo …

(Martina Vaváčková)

Úloha 6.

(53; 52; 3,74; 4,0)

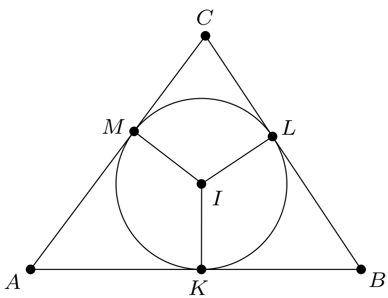
Deltoid je konvexní čtyřúhelník, který je osově souměrný podle alespoň jedné své úhlopříčky.

(a) *Dokažte, že každý trojúhelník lze rozdělit na 3 deltoidy.*

(b) *Dokažte, že každý konvexní čtyřúhelník lze rozdělit na 7 deltoidů.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

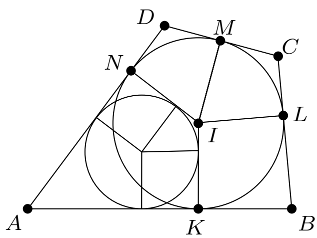
(a) Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a K, L, M postupně body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CA. Ze symetrie tečen ke kružnici vepsané máme $|AK| = |AM|$ a dále platí $|IK| = |IM|$, protože jde o poloměr kružnice vepsané. To znamená, že $AKIM$ je deltoid. Obdobně ukážeme, že i $BLIK$ a $CMIL$ jsou deltoidy, a tedy trojúhelník lze rozdělit na tři deltoidy.

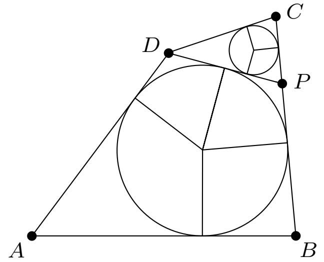


(b) Nejprve ukážeme, že tečnový čtyřúhelník $ABCD$ umíme rozdělit na čtyři deltoidy. Označme I střed kružnice vepsané a K, L, M, N její body dotyku postupně se stranami AB, BC, CD, DA. Podobně jako v části (a) odůvodníme, že $AKIN$, $BLIK$, $CMIL$ a $DNIM$ jsou deltoidy.

Nyní rozebereme dva případy.

Pokud je čtyřúhelník $ABCD$ tečnový, nejprve jej rozdělíme na čtyři deltoidy. Všechny deltoidy jsou tečnové čtyřúhelníky, protože součty protějších stran se rovnají, a tedy můžeme jeden ze čtyř deltoidů rozdělit na čtyři menší deltoidy. Takto získáme celkem sedm deltoidů.





Pokud čtyřúhelník $ABCD$ není tečnový, nalezneme kružnici, která se dotýká stran AB, AD a jedné ze zbylých dvou stran čtyřúhelníku, a navíc celá leží uvnitř čtyřúhelníku. Taková kružnice určitě existuje, protože při postupném zvětšování malé kružnice dotýkající se AB a AD musíme „narazit" na jednu ze stran BC nebo CD. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že třetí stranou je BC.

Protože $ABCD$ není tečnový, protne tečna k této kružnici z bodu D stranu BC ve vnitřním bodě P. Čtyřúhelník $ABPD$ je tečnový, a tedy ho můžeme rozdělit na čtyři deltoidy. Trojúhelník PCD umíme podle části (a) rozdělit na tři deltoidy. Celkem rozdělíme čtyřúhelník $ABCD$ i v tomto případě na sedm deltoidů.

Poznámky:

Tato úloha patřila k těm lehčím, což se potvrdilo velkým počtem správných řešení. V části (b) jsem se setkal s mnoha různými přístupy, které ale vždy vyžadovaly rozlišení alespoň dvou případů. Právě za opomenutí nějakého speciálního případu jsem nejčastěji strhával body. Kromě vzorového řešení byly oblíbené ještě dva přístupy, které spočívaly ve vyrobení jednoho deltoidu a následném rozdělení „okrajových" trojúhelníků na zbylých šest deltoidů. K vytvoření deltoidu uvnitř čtyřúhelníku bylo většinou potřeba rozebrat čtyři případy. O něco elegantnější bylo vyrábění deltoidu z trojúhelníku, kdy se musel jen ošetřit případ s rovnostranným trojúhelníkem. *(Martin Töpfer)*

Úloha 7. (28; 16; 1,46; 2,0)

(a) *Šavlík kdysi do jisté tabulky 8×8 vepsal čísla 1 až 64 (každé právě jednou). Dokažte, že ať už to udělal jakkoliv, existují v tabulce alespoň čtyři čtverce 2×2 takové, že součet čísel v každém z nich je alespoň 106.* *(Tomáš „Šavlík" Pavlík)*

(b) *V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o n zákonech (poslanec může být buď pro schválení zákona, nebo proti jeho schválení, nebo se může zdržet hlasování). Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom z nich hlasoval pro a v jednom proti. Označme z_i počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o i-tém zákonu. Dokažte, že*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \le 2^{200}.$$

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

(a) Budeme uvažovat pouze čtverce vzniklé rozdělením tabulky na 16 nepřekrývajících se čtverců 2×2 (všech čtverců 2×2 je celkem 49). Odmyslíme-li si tři čtverce s nejvyššími součty, v ostatních zbyde v součtu alespoň $1+2+\ldots+52=\frac{53\cdot 52}{2}=1378$. Kdyby měl každý ze zbylých třinácti čtverců součet nejvýše 105, dohromady by měly součet nejvýše $13\cdot 105=1365$, což není možné. Tedy mezi nimi existuje čtverec, který má součet alespoň 106.

(b) Spočtěme si, kolika způsoby by mohli hlasovat nehlasující poslanci (například v nějakém dodatečném hlasování) – pokud se zdrželo z_i poslanců, mohli hlasovat celkem 2^{z_i} způsoby. A protože pro každé dva různé zákony existuje poslanec, který o jednom hlasoval pro a o jednom proti, nemohou být žádná dvě hlasování ani po přidání všech kombinací nehlasujících poslanců shodná. Dostáváme tedy $\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i}$ různých způsobů hlasování, přičemž všech možných způsobů hlasování je 2^{200}. Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \leq 2^{200}.$$

Poznámky:

(a) Klíčem bylo všimnout si, že není třeba pracovat se všemi 49 čtverci, ale stačí vzít 16 „hlavních“ čtverců. Mnozí to opomněli zmínit, za což jsem strhával body. Za nejkratší správné řešení chci pochválit *Mira Stankoviče* – shoduje se se vzorovým. Mnoho dalších řešitelů využilo postupného snižování odhadu pro součet jednoho, dvou, tří a čtyř čtverců, což bylo též správně.

(b) Došla tři správná řešení, za něž chválím *Martina Horu*, *Anh Dung „Tondu“ Le* a *Rada Švarce*. Většina ostatních se snažila maximalizovat počet nehlasujících poslanců. Cílem však bylo ukázat platnost horního odhadu pro $\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i}$. *(Jakub „Roman“ Klemsa)*