

Teorie her

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. PROSINCE 2012

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu¹ všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.


ÚLOHA 2. (5 BODŮ)


V řadě za sebou je napsáno n jedniček ($n > 1$) a mezi každými dvěma sousedními jedničkami je otazník. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích – hráč, který je na tahu, přepíše libovolný z otazníků na znaménko $+$, nebo \times . Na konci hry, kdy už je všech $n - 1$ otazníků změněno na jedno ze znamének, se celý výraz vyhodnotí (klasicky – násobení má přednost před sčítáním). Je-li výsledné číslo sudé, vyhrává první hráč, je-li liché, tak druhý hráč.

V závislosti na n určete, který z hráčů má vyhrávající strategii.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Martina a Olin střídavě (Olin začíná) vybarvují políčka tabulky 5×5 . Olin ve svém tahu vždy vybarví jeden čtvereček, Martina libovolně natočené triomino. Jednou vybarvené políčko již nelze vybarvit znovu. Pokud Martina už nemůže táhnout, dovybarví Olin zbytek. Vyhrává ten, kdo vybarvil více políček. Který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud Martina smí vybarvovat

(i) pouze triomina typu I:  ?

(ii) pouze triomina typu L:  ?

¹Ořechy nelze jíst po částech. Např. zbývá-li 11 ořechů, sní hráč 1, 2 nebo 3 kusy.

Teorie her

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

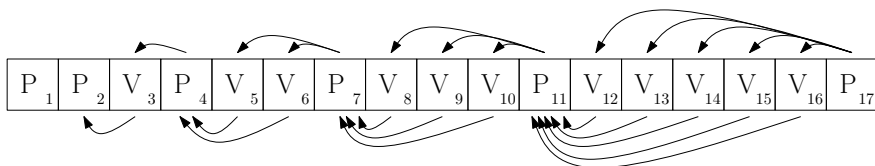
(92; 91; 4,88; 5,0)

V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu² všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

(Alča Skálová)

ŘEŠENÍ:

Úlohu budeme řešit podobně jako v seriálu. Nakresleme si možné pozice (počty ořechů), viz obrázek. Postupně určíme, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající.



Již ze zadání víme, že pozice s jedním a dvěma ořechy jsou prohrávající, neboť pokud bychom z nich chtěli táhnout, mohli bychom sníst maximálně $\frac{1}{3}$ resp. $\frac{2}{3}$ ořechu, ale protože můžeme jíst pouze celé ořechy, nemůžeme nic sníst, a tedy nemáme tah a prohráli jsme. Pozice 3 je vyhrávající, protože se z ní umíme dostat do pozice 2, která je prohrávající. Pozice 4 je prohrávající, protože se z ní umíme dostat jen do vyhrávající pozice 3, a ze stejného důvodu jsou prohrávající pozice 7, 11 a 17, viz odpovídající tahy na obrázku. Vyhrávající strategii má druhý hráč, tedy Filip, a to držet Míšu vždy na prohrávajících pozicích.³

POZNÁMKY:

Poznámky k došlým řešením: Vzhledem k tomu, že úloha nedělala vůbec nikomu potíže, rozdělovali se řešitelé s pěti body na dvě skupiny, jedna mírně dominující, která předpokládala, že pokud na stole je jeden ořech, hráč na tahu ho může sníst. Toto ale zadání vysloveně zakazovalo, neboť stanovovalo, že žádný hráč nemůže sníst více jak $\frac{1}{3}$ celkového počtu ořechů. Za tuto chybu jsem nakonec body nestrhával, neboť se kromě situace u jednoho ořechu tabulka vůbec nezměnila, ale doufám, že to bude pro všechny poučení, že je potřeba číst pořádně zadání.

Malá poznámka nakonec, Míša je naše šikovná mladá organizátorka a je to opravdu TA Míša :-)

(Lukáš Zavřel)

²Ořechy nelze jíst po částech. Např. zbývá-li 11 ořechů, sní hráč 1, 2 nebo 3 kusy.

³Jak ale někteří řešitelé správně poznamenali, pokud bude chtít Filip vyhrát, tak Míša bude alespoň moct sníst 11 ořechů, a tak ji prohra nebude tolik mrzet.

Úloha 2.

(89; 84; 4,67; 5,0)

V řadě za sebou je napsáno n jedniček ($n > 1$) a mezi každými dvěma sousedními jedničkami je otazník. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích – hráč, který je na tahu, přepíše libovolný z otazníků na znaménko $+$, nebo \times . Na konci hry, kdy už je všech $n - 1$ otazníků změněno na jedno ze znamének, se celý výraz vyhodnotí (klasicky – násobení má přednost před sčítáním). Je-li výsledné číslo sudé, vyhrává první hráč, je-li liché, tak druhý hráč.

V závislosti na n určete, který z hráčů má vyhrávající strategii. (Alča Skálová)

ŘEŠENÍ:

Uvažme koncový stav hry, kdy jsou všechny otazníky nahrazeny znaménky plus či krát. Protože násobení má při vyhodnocování výrazu vyšší prioritu než sčítání a vždy násobíme mezi sebou pouze jedničky, je výsledek každého součinu obsaženého ve výrazu roven jedné. Proto označíme-li k počet znamének plus, je hodnota výrazu na konci hry $k + 1$. O paritě⁴ znamének plus vždy může rozhodnout hráč, který provádí poslední tah.

Je-li n sudé, poslední znaménko volí první hráč. Vybere ho tak, aby počet znamének plus byl lichý, tedy výsledek výrazu byl sudý. Naopak je-li n liché, poslední znaménko vybírá druhý hráč. Volí ho tak, aby počet znamének plus byl sudý, tedy výsledek výrazu byl lichý.

Proto pro sudé n má vyhrávající strategii první hráč, kdežto pro liché n druhý hráč.

POZNÁMKY:


Někteří řešitelé se snažili určovat průběžnou hodnotu výrazu a diskutovat, jak ji ovlivní doplnění dalšího znaménka některým z hráčů. Bohužel ale nevysvětlili, čemu se rovná výsledek výrazu, který obsahuje otazníky! Úlohu samozřejmě lze řešit tak, že nejprve všechny otazníky nahradíme například znaménkem plus a pak se zabýváme tím, jak se výsledek výrazu změní při přepsání některého z plusů na krát, ale je třeba prvotní nahrazení otazníků některým ze znamének v řešení zmínit!


(Míša Hubatová)

Úloha 3.

(69; 57; 3,07; 2,0)

Martina a Olin střídavě (Olin začíná) vybarvují políčka tabulky 5×5 . Olin ve svém tahu vždy vybarví jeden čtvereček, Martina libovolně natočené triomino. Jednou vybarvené políčko již nelze vybarvit znovu. Pokud Martina už nemůže táhnout, dovybarví Olin zbytek. Vyhrává ten, kdo vybarvil více políček. Který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud Martina smí vybarvovat

(i) pouze triomina typu I:  ?

(ii) pouze triomina typu L:  ?

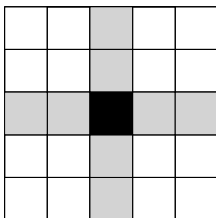
(Alča Skálová)

ŘEŠENÍ:

Aby Martina vyhrála, musí obarvit alespoň 5 triomin. Naopak dostane-li se na tahu jen čtyřikrát, vyhraje Olin.

(i) Vyhrávající strategii má Olin – v prvních tahu zahraje doprostřed čtverce (viz obrázek) a v dalších čtyřech tazích bude hrát na libovolné volné šedé pole.

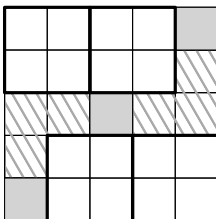
⁴Parita je vlastnost čísla být sudým či lichým.



Jelikož po Olinově prvním tahu každé triomino typu I pokryje právě jedno šedé pole, budou po pěti tazích Olina a čtyřech tazích Martiny všechna šedá pole zabraná – Martina v každém svém tahu jedno z nich zabere, ať chce nebo nechce, a Olin je zabírá záměrně. Tím pádem po Olinově pátém tahu již nikde není místo na položení dalšího triomina, tedy Olin vyhrál.

b

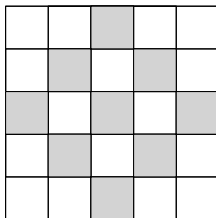
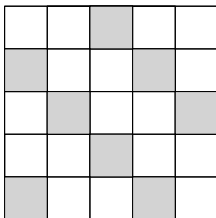
(ii) Tentokrát má vyhrávající strategii Martina. Rozdělí si celý hrací plán na čtyři pomyslné čtverce 2×2 , dvě vyšrafované oblasti a 3 „zbylá“ šedá pole (viz obrázek).



Pokud Olin zahraje do jednoho z menších čtverců, zahraje Martina do téhož čtverce (triomino typu L přesně doplní Olinův tah). Pokud Olin zahraje do jedné z vyšrafovaných oblastí, Martina obarví tu druhou. A pokud Olin zahraje na šedé pole (či v pozdější fázi hry podruhé do vyšrafované oblasti), zahraje Martina do libovolného prázdného čtverce nebo vyšrafované oblasti. Každopádně se Martině podaří obarvit vždy nejméně pět triomin, tedy vyhrála.

POZNÁMKY:

Popsané vyhrávající strategie nejsou jediné možné. Například v části (i) Olinovi stejně dobře poslouží jedno z následujících obarvení.



Obarvení použité ve vzorovém řešení se ovšem vyskytovalo nejčastěji. Asi nejlépe je z něj patrná klíčová myšlenka „do každého řádku a do každého sloupce se vejde nejvýše jedno I triomino“.

Jelikož první část úlohy byla o něco lehčí, udělovala jsem za ni 2 body a za druhou část 3 body. Většina z vás si s úlohou poradila dobře (alespoň s první částí). V druhé části se však nemalé množství řešení pustilo do rozebírání Martinových možností podle Olinova prvního (a někdy i druhého, třetího, ...) tahu. Vězte, že úlohy se snažíme zadávat tak, aby podobné „rozebírání případů“ nebylo nutné. Proto buďte podezíraví a hledejte v úlohách nějaké „pěkné“ řešení. (-:

Malá poznámka na konec: Olin je náš šikovný dlouholetý organizátor a je to opravdu TEN Olin. (-: (Alča Skálová)