

Rokové se opět sešli a triatřicátý ročník semináře je u konce. Chtěli bychom proto poblahopřát letošnímu vítězi, kterým se stal *František Couf*. Sláva mu! V těsném závěsu za Františkem se umístili *Pavel Turek* a *Filip Bialas*. Ještě dodáme, že všichni tři medailisté jsou v prvním ročníku, což nemá v historii MKS obdoby.

Abychom nevyzdvihovali jen úspěchy mladé generace – zasloužilý řešitel „Tonda“ *Le Anh Dung* nashromáždil 1064 historických bodů, čímž překonal rok starý rekord *Pepy Svobody* (shoda jména s autorem tohoto úvodníku *není* čistě náhodná). I Tondovi tedy patří naše blahopřání.

Pokud jsi nebyl tak úspěšný jako zmínění borci, nezoufej. Ceny dostane padesát nejúspěšnějších řešitelů – všichni se mohou těšit na PraSečí tričko, někteří z lépe umístěných i na batoh. Prvních pět navíc vyhraje hodnotnou matematickou literaturu podle vlastního výběru.

Přejeme Ti pěkný závěr školního roku a pestré prázdniny. Těšíme se na Tebe v dalším ročníku.

Za organizátory

Helča a Pepa Svobodovi, Kuba Krásenský

### Obsah závěrečných komentářů

- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Povídání k 2. podzimní sérii 34. ročníku
- Dovětek k seriálu
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 34. ročníku

### Anketa a volba seriálu

Ohlašujeme, že na stránce [mks.mff.cuni.cz/anketa](http://mks.mff.cuni.cz/anketa) můžeš vyplnit anketu o tom, co se Ti v PraSeti líbí, a co bys naopak dělal jinak. Zpětná vazba je pro nás důležitá, abychom mohli být stále lepší. V anketě můžeš hlasovat také o tématu seriálu na příští rok.

### Jarní soustředění

Na závěr zmiňme soustředění, které proběhlo 10.–18. května na planetě DL-27H, jejíž prostředí připomínalo rozkošnými rybníčky a dlouhými lány řepky okolí Uhelné Příbrami. Kromě seznamování s kulturou místních obyvatel a zachraňování Země jsme si užili týden plný přednášek, soutěží a jiných zážitků. Těšíme se na příště!



## Náboj

V pátek 11. dubna proběhl jubilejní desátý ročník týmové soutěže Náboj ([www.naboj.org](http://www.naboj.org)), tentokrát v ještě mezinárodnější podobě než kdy dřív – zúčastnily se týmy z České republiky, Finska, Německa, Polska, Rakouska a Slovenska. Skvělého úspěchu dosáhl juniorský tým z Gymnázia Opatov (ve složení *Filip Bialas, Anna Suchánková, Zuzana Johanovská, Petr Jaroschy, Jan Hečko*), když jednak s přehledem zvítězil v mezinárodní juniorské kategorii, jednak v absolutním měřítku spočetl více úloh než kterýkoliv tým seniorský. Blahopřání putuje samozřejmě i k vítězi české seniorské kategorie, kterým se stal tým z Gymnázia Mikulášské náměstí, jakož i ke všem ostatním týmům, které se klání účastnily.

## Jarní výlet

Tradiční jarní výlet letos proběhl v sobotu 22. března. Tentokrát nás zavedl na východ od Prahy. Za takřka letního počasí jsme absolvovali strastiplnou trasu z Říčán až do Úval, kde jsme zdolali nejvyšší kopec s rozhlednou na vrcholu. Děkujeme všem zúčastněným!

# Nabídka seriálů pro 34. ročník

O tématu seriálu můžete hlasovat v anketě na stránce [mks.mff.cuni.cz/anketa/](http://mks.mff.cuni.cz/anketa/)!

## Do nekonečna a ještě dál.

Máte rádi úvahy o nekonečnu a rádi byste se v něm lépe orientovali? Zajímá vás, jak to, že mohou být některá nekonečna větší než jiná? Proč je racionálních čísel stejně jako přirozených, ale méně než reálných? A jak to, že je i přesto možné projít všechna reálná čísla „po jednom“? A kolik těch různých velkých nekonečen vlastně je? Je jich nekonečno? A které? Teorie nekonečna (které se často také říká TeMno) je elementární, leč silná a překvapivá. Vítejte v úžasně nekonečném světě nekonečen. Jak pravil jistý slavný matematik: „Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.“

## Letem grafovým světem

Máte rádi matematiku, ale neradi počítáte s velkými čísly nebo složitými výrazy? Máte rádi matematiku, ale neradi kreslíte nepřehledné obrázky, ve kterých máte hledat shodné úhly? Máte rádi matematiku, ale máte dojem, že geometrie, algebra a teorie čísel se na vás valí ze všech stran? Zkuste změnu a zanořte se s námi do teorie grafů. V první části si povíme, co to vlastně grafy jsou a jaké základní vlastnosti mají. V dalších dvou dílech seriálu se pak společně vydáme na cestu nejzajímavějšími partiemi teorie grafů, jakými jsou například průnikové grafy či systémy různých reprezentantů a jejich možné aplikace. Absolvování našeho seriálu vám navíc pomůže nejen v matematické olympiádě, ale i při studiu matematiky na vysoké škole.

## Geometrie trojúhelníka

Stále vás nepřestává fascinovat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě? Nejste sami. A co takhle, že onen průsečík výšek, těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce? Nebo že se osa strany protíná s osou protějšího úhlu na kružnici opsané? Geometrie trojúhelníka zná podobně zajímavých a pěkných tvrzení nepřeberné množství a tento seriál nabízí jejich výběr i vám. Pojďme společně prozkoumat kousek světa syntetické geometrie, jehož vývoj započal už ve starém Řecku. Většina technik, které si při tomto výletu osvojíme, se vám navíc bude hodit při řešení Matematické olympiády i jiných soutěží. Můžete se těšit na spoustu obrázků a hlavně, nikdy už se nezaleknete nápisu *αγεωμετρητις μηδεις εισιτω.*

## Algoritmická geometrie

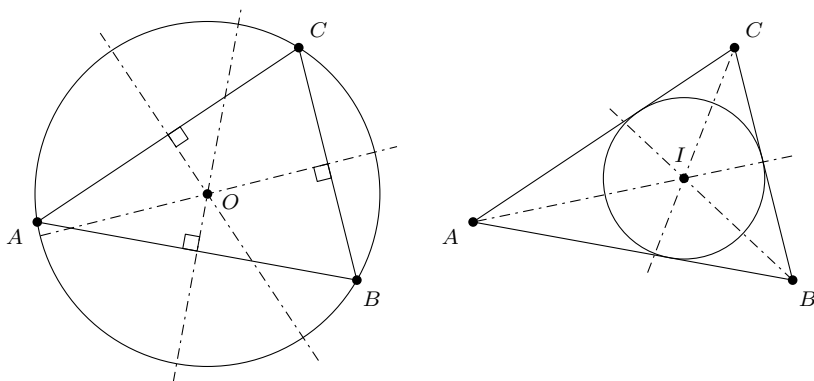
Ne každý sice řešil problém, jak oplotit stromy na zahrádce, zato ten, jak se dostat na nejbližší záchod, určitě ano. Geometrie skrývající se za tímto problémem nikoho rozhodně nezaráží. Ale co třeba míchání roztoků nebo řízení obrazu na displeji počítače. Čekali byste geometrii zde? Jak už název napovídá, jedná se o geometrii algoritmickou, tedy žádné obvodové úhly, tětíkové čtyřúhelníky či Švrčkovy body, zato se tam ale vyskytne trocha kombinatoriky a teorie grafů. Jde v podstatě o hledání elegantních postupů, jak může počítač řešit geometrické úlohy. Nebudeme vám lhát, že se tu neobjeví (většinou nenáviděná) analytická geometrie. Můžete to brát jako šanci zjistit, že není jen nástrojem, jak hezké olympiádní geometrie zabít hafem rovnic, nýbrž že je občas hezká i sama o sobě.

## Povídání ke 2. podzimní sérii

Druhá série je věnována kružnicím. Každý ví, jak taková kružnice vypadá – je to množina bodů roviny se stejnou vzdáleností  $r$  od nějakého středu  $S$ . Kružnice však mají i další vlastnosti, které už zdaleka tak zřejmé být nemusí. Všechny dále uvedené věty smíš v řešeních používat bez důkazu.

**Věta.** (Kružnice trojúhelníku opsaná) Střed kružnice trojúhelníku opsané (budeme ho značit  $O$ ) leží v průsečíku os jeho stran. Pro poloměr této kružnice platí  $R = \frac{abc}{4S}$ , kde  $S$  je obsah trojúhelníka a  $a, b, c$  délky jeho stran.

**Věta.** (Kružnice trojúhelníku vepsaná) Střed kružnice trojúhelníku vepsané leží v průsečíku os vnitřních úhlů při jeho vrcholech a budeme ho značit  $I$ . Pro poloměr této kružnice platí  $r = \frac{2S}{a+b+c}$ .



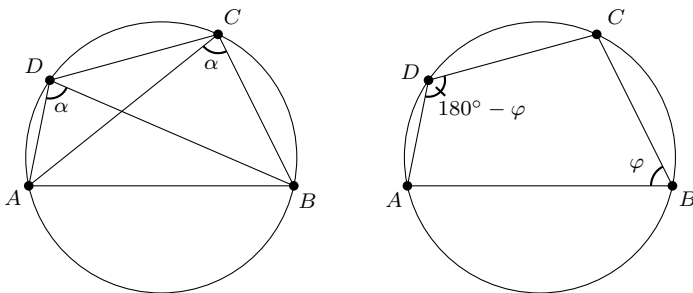
**Definice.** (Tětivový a tečnový čtyřúhelník) Čtyřúhelník nazýváme

- (i) *tětivový*, lze-li mu opsat kružnici (tedy všechny jeho vrcholy leží na jedné kružnici),
- (ii) *tečnový*, lze-li mu vepsat kružnici.

Takové čtyřúhelníky mají mnoho zajímavých vlastností, z nichž alespoň některé zformulujeme:

**Věta.** Čtyřúhelník  $ABCD$  je tětivový právě tehdy, když

- (i) úhel svíraný jednou stranou a úhlopříčkou je rovný úhlu svíranému protilehlou stranou a druhou úhlopříčkou, nebo
- (ii) součet vnitřních úhlů při protilehlých vrcholech je 180 stupňů.



Pomocí tvrzení o tětíkových čtyřúhelnících tak umíme dobře „úhlově“ popsat to, že čtyři body leží na kružnici. Zároveň je mnohdy užitečné tětíkový čtyřúhelník v úloze najít – jeho objevením se naše informace o velikostech úhlů v obrázku podstatně rozšíří.

**Věta.** Čtyřúhelník  $ABCD$  je tečnový právě tehdy, když  $a + c = b + d$ , kde  $a, b, c, d$  jsou po řadě délky stran  $AB, BC, CD, AD$ .

# Stručný dovětek k seriálu

Rádi bychom poděkovali řešitelům, kteří trpělivě pročeti všechny tři díly letošního seriálu. Snažili jsme se pokrýt témata, která nám přišla zajímavá, ale kvůli omezenému rozsahu jsme jich spoustu nestihli zahrnout. Pro ty, které tato témata zaujala, uvádíme zdroje, ze kterých jsme čerpali. Jde v nich najít inspiraci pro další studium teorie čísel a pro přípravu na olympiádu.

- (1) Titu Andreescu, *104 Number Theory Problems* (povinná četba každého olympionika obsahující 104 příkladů s řešeními)
- (2) Titu Andreescu, *Number Theory*
- (3) Tom Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory* (zde najdeš vše z třetího dílu seriálu a mnoho dalších zajímavých věcí)
- (4) Hua Loo Keng, *Introduction to Number Theory* (všechno, co jsi chtěl vědět o teorii čísel, ale bál ses zeptat)
- (5) PraSečí seriál z let 2008/2009, <http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php> (zde najdeš Diofantické rovnice a RSA, témata, kterým jsme se vyhnuli)
- (6) Třetí díl PraSečího seriálu o komplexních číslech z let 2010/2011 (Gaussova a Eisensteinova čísla)

Přejeme Ti hodně zdarů při dalším studiu.

Pepa Svoboda a Štěpán Šimsa

# Iracionální čísla

2. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(74; 72; 2,92; 3,0)

Do každého políčka tabulky  $2 \times 3$  napište iracionální číslo tak, aby součet v každém řádku i sloupci byl racionální.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Jak zvolit iracionální čísla tak, aby jejich součet byl racionální? Nabízí se hledat nulové součty a do sloupců umístit opačná čísla. Jedním z vyhovujících příkladů je následující tabulka:

$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

Víme, že násobíme-li iracionální číslo racionálním, výsledek bude iracionální. Proto  $-\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$  i  $-2\sqrt{2}$  jsou iracionální čísla. Součty v řádcích i sloupcích jsou nulové a do všech políček jsme umístili iracionální čísla, úloha je tedy vyřešena.

POZNÁMKY:

Správně vyplněnou tabulku poslali téměř všichni řešitelé. Někteří nepřipsali ani slovo, naštěstí převládala více či méně podrobně okomentovaná řešení. Mnoho řešitelů si trochu přidělávalo práci, když k iracionálnímu číslu přičítali ještě nějaké přirozené, aby dostali nenulový součet. Jako by se snad báli nuly! Raději proto připomenu, že i nula je racionální číslo, vždyť ačkoli nelze dělit nulou, nulu můžeme podělit jakýmkoli jiným číslem.

(Bára Kociánová)

## Úloha 2.

(65; 47; 2,22; 3,0)

Rozhodněte, zda existují tři iracionální čísla taková, že součet každých dvou z nich je racionální, a své tvrzení dokažte.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že nějaká taková tři iracionální čísla existují, říkejme jim  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Čísla  $a + b$ ,  $b + c$ ,  $a + c$  jsou z předpokladu racionální, tedy i jejich součet  $2(a + b + c)$  je racionální číslo.

Na druhou stranu, součet racionálního čísla  $a + b$  s iracionálním číslem  $c$  je číslo iracionální. Součin racionálního čísla 2 s iracionálním číslem  $a + b + c$  je rovněž iracionální. A to je spor, neboť číslo  $2(a + b + c)$  nemůže být zároveň racionální a iracionální.

Žádná tři taková čísla tudíž neexistují.

POZNÁMKY:

Většina z vás si s úlohou hravě poradila. Ovšem našli se i tací, kteří se v úloze zamotali – nejčastěji při pokusu rozložit číslo na „racionální“ a „iracionální“ složku. Každé iracionální číslo

samozřejmě lze napsat jako součet racionálního a iracionálního – například

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} + \sqrt[3]{5} &= 0 + \left( \sqrt[3]{5} + \frac{2}{7} \right) \\ &= \frac{3}{7} + \left( \sqrt[3]{5} - \frac{1}{7} \right) \\ &= -\frac{5}{7} + \left( \sqrt[3]{5} + 1 \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Takový zápis však není jednoznačný, což byl kámen úrazu ve všech řešeních, jež se touto cestou pustila. (Alča Skálová)

### Úloha 3.

(56; 48; 2,57; 3,0)

Šavlík si nějakou dobu hrál s kladnými čísly a pak tvrdil, že se mu podařilo najít takové číslo  $x$ , že pro každé přirozené číslo  $n$  dávalo číslo<sup>1</sup>  $\lfloor x \cdot 10^n \rfloor$  po dělení 10 stejný zbytek jako  $n$ . Je možné, že Šavlíkovo číslo bylo iracionální? (Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

ŘEŠENÍ:

Bud'  $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots}$ , kde  $\overline{a_1 a_2 \dots}$  je desetinný rozvoj čísla  $x$ . Podmínka ze zadání říká, že  $a_i \equiv i \pmod{10}$ . Pro libovolné  $i$  tak platí

$$a_i \equiv i \equiv i + 10 \equiv a_{i+10} \pmod{10}.$$

Jelikož jsou  $a_i$  a  $a_{i+10}$  cifry, musejí se rovnat. Proto je rozvoj čísla  $x$  periodický s periodou 10, a číslo  $x$  tak nemůže být iracionální.

POZNÁMKY:

Tato úloha byla celkem jednoduchá, šlo hlavně o to uvědomit si, co vlastně říká na první pohled trochu nehezky vypadající podmínka v zadání. To většina řešitelů dříve či později udělala a zasloužila si plný počet bodů. Většina ukázala racionalitu tím, že přesně určila desetinný rozvoj, který by mohl být  $\overline{1234567890}$ . To ovšem platí, pouze pokud  $x$  je kladné, což bylo našťastí uvedeno v zadání. Můžete si rozmyslet, jak by rozvoj vypadal pro záporná  $x$ . Body jsem strhával hlavně za to, že jste nedostatečně zdůvodnili, proč musí desetinný rozvoj vypadat přesně takhle. Vždycky je lepší své řešení o jednu větu prodloužit a vše pečlivě zdůvodnit než zbytečně přicházet o body. Bohužel se našli i takoví, kteří správně našli desetinný rozvoj čísla  $x$ , poté však tvrdili, že toto číslo je iracionální. Těm bych doporučil, aby si znova pečlivě přečetli úvodní text k sérii.

(Martin Čech)

### Úloha 4.

(40; 35; 4,15; 5,0)

*E.T.* má konečnou množinu reálných čísel takovou, že součet všech jejích prvků je racionální. Dokažte, že počet jejích neprázdných podmnožin, které mají iracionální součet všech prvků, je sudý. (Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si ukažme, že součet racionálního čísla s iracionálním je iracionální. Postupujme sporem a předpokládejme, že  $a, c \in \mathbb{Q}$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  a  $a + b = c$ . Pak ale  $b = c - a$ , kde na levé straně je iracionální číslo a na pravé rozdíl dvou racionálních čísel, který je racionální. A to je spor, kterého jsme chtěli dosáhnout.

<sup>1</sup>Číslo  $\lfloor x \rfloor$  značí dolní celou část čísla  $x$ , tj. největší celé číslo, které není větší než  $x$ .



Nyní si označme E.T.-ho množinu  $M$  a uvědomme si, že nás zajímají jen neprázdné podmnožiny (dle zadání), které se navíc nerovnají množině  $M$  (protože ta má racionální součet prvků). V dalším textu pak budeme tyto podmnožiny označovat pojmem *zajímavá podmnožina*.<sup>2</sup>

Nyní uvažme libovolnou zajímavou podmnožinu množiny  $M$  s iracionálním součtem prvků a označme ji  $A$ . Pak s přihlédnutím k prvnímu odstavci a faktu, že součet všech prvků v  $M$  je racionální, musí být součet prvků v množině<sup>3</sup>  $M \setminus A$  iracionální. Dále víme, že doplňkem zajímavé podmnožiny je opět zajímavá podmnožina. Navíc platí  $M \setminus (M \setminus A) = A$  a  $A \neq M \setminus A$ , takže můžeme všechny zajímavé podmnožiny s iracionálním součtem prvků popárovat tak, že každé přiřadíme její doplněk, a proto je jich sudý počet.

POZNÁMKY:

Toto řešení je zapsáno velmi podrobně. Například poznámku o tom, že „doplňk doplňku je původní podmnožina“, není potřeba v řešeních uvádět, protože párování „doplňků“ je známé, a není třeba dokazovat, že to opravdu je párování. Pokud ale obecně někdy párujete, je dobré ověřit si, že žádnému prvku nedáte do dvojice ten samý prvek, nebo pokud jednomu přiřadíte druhý, tak že druhému přiřadíte zase ten první.

Úlohu jsem ale opravoval mírně, takže si většina řešení vysloužila plné bodové ohodnocení. Body jsem nejčastěji strhával za chybné tvrzení, že iracionálních čísel musí být v dané množině sudý počet, aby se po dvou vykrátily. Jednoduchým protipříkladem je například množina  $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\}$ . (Martin „E.T.“ Sýkora)

## Úloha 5.

(50; 45; 3,96; 5,0)

David dostal k narozeninám dvě kladná reálná čísla  $a, b$ , jejichž součin je 100 a jejichž součet je celé číslo, které dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Dokažte, že  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  musí být iracionální.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Nechť  $a, b$  jsou kladná reálná čísla vyhovující podmínkám zadání. Existuje tedy nezáporné celé číslo  $k$  takové, že  $a + b = 4k + 2$ . Dále budeme upravovat zadaný výraz tak, abychom ho mohli zredukovat za pomoci zadaných podmínek:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{4k + 2 + 2\sqrt{100}} = \sqrt{4k + 22}.$$

Zkoumané číslo je tedy druhou odmocninou z kladného celého čísla  $4k + 22$ , které je dělitelné dvěma, ale není dělitelné čtyřmi. To znamená, že toto celé číslo není druhou mocninou celého čísla a jeho druhá odmocnina je podle textu k této sérii číslo iracionální. Tím je tvrzení dokázáno.

POZNÁMKY:

Tvrzení se podobně dalo dokázat sporem, jenom si někteří řešitelé nedali pozor na to, že musí pro spor uvažovat obecné racionální číslo  $\frac{p}{q}$ . Tím se postup trochu komplikoval, a proto jsem v autorském řešení zvolil raději druhou variantu. Při opravování jsem narazil na zajímavý problém, zda zkoumaný součet může být celočíselný, pokud bychom druhou podmínku oslabili na  $a + b = 2k$ . Můžete si to vyzkoušet rozřešit jako cvičení. (Filip Hlásek)

<sup>2</sup>Podmnožiny, které se nerovnají původní množině, se běžně označují jako vlastní podmnožiny. Pojmem „zajímavá“ (který ustálený rozhodně není) tedy myslíme zkratku za „vlastní neprázdná“.

<sup>3</sup>Symbolem  $M \setminus A$  značíme doplněk množiny  $A$  vzhledem k množině  $M$ , což je množina, která obsahuje ty prvky z  $M$ , které neobsahuje  $A$  (a žádné jiné).

**Úloha 6.**

(34; 27; 3,94; 5,0)

Pepa se jednou nudil a řekl si, že napíše iracionální číslo, za jehož desetinnou čárkou budou pouze nuly, jedničky a dvojky. Kopii hotového čísla dal Olinovi a Filipovi. Olin všechny svoje nuly přepsal na jedničky, Filip všechny jedničky své kopie změnil na dvojky. Mohlo se stát, že Olin i Filip měli po přepsání racionální čísla?  
(Pepa Tkadlec)

PRVNÍ ŘEŠENÍ:

Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že Olinovo číslo  $O$  aj Filipovo číslo  $F$  sú racionálne, kým Pepovo číslo  $P$  je iracionálne. Ak má byť  $O$  (resp.  $F$ ) racionálne, tak má byť ukončený desiatinný rozvoj, alebo je periodické.

Žiadne z čísel nemôže mať ukončený desiatinný rozvoj, pretože ani Olin, ani Filip neprepisujú žiadne cifry na nuly, a teda od istého desiatinného miesta by muselo mať  $P$  už iba nuly a bolo by racionálne.

Druhá možnosť je, že sú obe čísla  $O$  a  $F$  periodické. Všimnime si, že  $O$  má dvojky na tých istých miestach ako  $P$ . Keďže  $O$  je periodické, tak od istého miesta sa v ňom zoskupenia dvojok opakujú periodicky, a teda sa musia opakovať aj v  $P$ . Označme dĺžku tejto periódy  $r$ . Podobne  $F$  má nuly na tých istých miestach ako  $P$ . Číslo  $F$  je periodické, preto od istého miesta sa v ňom zoskupenia nul opakujú periodicky, musia sa teda aj v  $P$  opakovať. Dĺžku tejto periódy označíme  $t$ . Potom ale od istého miesta (po skončení dlhšej z predperiód čísel  $O$  a  $F$ ) sa v Pepovom čísle budú nuly aj dvojky opakovať s periódou  $rt$ . Na zvyšných miestach môžu byť už iba jednotky, a teda aj tie sa budú opakovať s periódou  $rt$ . Pepovo číslo je teda periodické, preto nemôže byť iracionálne a dostávame spor.

DRUHÉ ŘEŠENÍ:

Označme  $x_0$  číslo, ktoré má za desiatinnou čiarou jednotky iba na tých miestach, kde má Pepovo číslo nuly, a na ostatných miestach bude mať nuly. Podobne  $x_1$  je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má  $P$  jednotky, a inde má nuly, a  $x_2$  je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má  $P$  dvojky, a inde má nuly. Potom, keď si odmyslíme celé časti čísel, pretože tie aj tak nič nemenia na racionálnosti, platí

$$\begin{aligned} P &= x_1 + 2x_2, \\ O &= x_0 + x_1 + 2x_2, \\ F &= 2x_1 + 2x_2, \\ \frac{1}{9} &= x_0 + x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Ďalej postupujeme sporom. Predpokladáme, že  $O$  aj  $F$  sú racionálne a  $P$  je iracionálne. Keďže  $O$  je racionálne, tak aj  $O - 1/9 = x_2$  je racionálne. Číslo  $F$  je racionálne, a preto aj  $(F - 2x_2)/2 = x_1$  je racionálne. Konečne súčet racionálnych čísel  $x_1 + 2x_2 = P$  je racionálny a dostávame spor.

POZNÁMKY:

Prevažná väčšina riešení bola správna, či už postupovala jedným alebo druhým spôsobom. Občas niekto zabudol zmieniť predperiódy, alebo čo sa deje s číslom pred desiatinnou čiarou, ale za takéto chybičky krásy sme body nestrhávali.  
(Marta Kossaczka)

**Úloha 7.**

(17; 9; 2,65; 2,0)

Mějme tři kladná iracionální čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  taková, že  $a + b + c = 1$ . Je-li některé z těchto tří čísel větší než  $\frac{1}{2}$ , každé z nich vynásobíme dvěma a následně největší číslo o jedna zmenšíme. Takto pokračujeme, dokud nejsou všechna tři čísla menší než  $\frac{1}{2}$ . Může se nám při nějaké volbě  $a$ ,  $b$ ,  $c$  stát, že nikdy neskončíme a budeme pokračovat do nekonečna?  
(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

ŘEŠENÍ:

Najdeme  $a, b, c$  taková, že budeme moci udělat nekonečně mnoho kroků. Taková vhodná čísla, zapsaná v binární číselné soustavě, jsou například tato:

$$\begin{aligned} a &= 0,101001000100001 \dots, \\ b &= 0,0101001000100001 \dots, \\ c &= 0,0000100110011100 \dots \end{aligned}$$

Číslo  $a$  vzniklo postupným zvyšováním počtu nul mezi jednotlivými jedničkami,  $b$  je stejné, ale posunuté o jednu cifru doprava, tedy  $b = a/2$ . Číslo  $c$  je takové, že má jedničku přesně tam, kde ji nemá  $a$  ani  $b$ , tedy  $c = 1 - a - b$ .

Číslo  $a$  má neperiodický binární rozvoj, tedy je iracionální. Stejně tak je iracionální číslo  $b = a/2$  (součin racionálního a iracionálního) a číslo  $c = 1 - 3a/2$  (rozdíl racionálního a iracionálního). Nyní stačí sledovat, co se s čísly stane při jednom kroku. Při vynásobení čísla dvojkou se v binárním zápise jen posune dvojková čárka<sup>4</sup> o jednu pozici doprava. Následným odečtením jedničky pouze smažeme onu jednu jedničku před dvojkovou čárkou. Nyní už je jasné, že v každém kroku bude právě jedno číslo větší než  $1/2$ , a tedy se nikdy nezastavíme.

POZNÁMKY:

Opět bylo dokázáno, že nekonečno dělá problémy. Hodně z vás tvrdilo, že taková čísla neexistují, protože by byla jen součtem nějakých racionálních čísel. To sice ano, ale pokud je součet nekonečný, pak se i z racionálních čísel může stát číslo iracionální. Důkazem toho může být například  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot 10^{-i}$ , kde  $p_i$  je  $i$ -tá číslice v desetinném zápise čísla  $\pi$ . Tento součet je roven  $\pi$ , tedy je iracionální, ale všechny členy součtu jsou racionální. (Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

## Úloha 8.

(7; 4; 2,71; 3,0)

Najděte všechny polynomy  $P(x)$  s reálnými koeficienty takové, že pro každé iracionální číslo  $i$  je  $P(i)$  také iracionální. (Alexander „Olin“ Slávik)

ŘEŠENÍ:

Je-li polynom  $P(x)$  konstantní, pak nutně  $P(x) = i$  pro nějaké iracionální číslo  $i$ . Takovýto polynom zřejmě splňuje podmínku ze zadání.

Předpokládejme dále, že polynom  $P(x)$  ze zadání existuje, má stupeň  $n \geq 1$  a platí

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde  $a_n \neq 0$ . Naším prvním cílem bude ukázat, že čísla  $a_0, a_1, \dots, a_n$  jsou všechna racionální.

Podmínku ze zadání budeme dále využívat také v její obměně: je-li  $P(q)$  racionální, je i  $q$  racionální. Je známým faktem, že svými hodnotami v  $n + 1$  bodech je polynom stupně  $n$  již jednoznačně určen. Zvolme proto  $n + 1$  různých racionálních čísel  $r_0, r_1, \dots, r_n$  z oboru hodnot  $P(x)$  jakožto funkce; pro ta existují (nutně různá) racionální čísla  $q_0, q_1, \dots, q_n$  taková, že  $P(q_j) = r_j$  pro  $0 \leq j \leq n$ . Na tuto sadu rovností můžeme pohlížet jako na soustavu  $n + 1$  lineárních rovnic o  $n + 1$  neznámých  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Tato soustava má vzhledem k výše uvedeným skutečnostem (polynom  $P(x)$  existuje a je těmito rovnicemi jednoznačně popsán) právě jedno řešení. Řešíme-li takovouto soustavu rovnic, dospějeme k výsledku jen pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních celých čísel, proto jsou i čísla  $a_0, a_1, \dots, a_n$  vskutku racionální.

V případě  $n = 1$  je patrné, že racionalita koeficientů již stačí pro splnění podmínky ze zadání, protože pro libovolná racionální čísla  $a_0, a_1$  ( $a_1 \neq 0$ ) a iracionální číslo  $i$  je  $a_1 i + a_0$  iracionální. Pro  $n \geq 2$  však žádný polynom nevyhovuje, jak dále dokážeme.

<sup>4</sup>Jde o analogii desetinné čárky v desítkovém zápise.

Předně poznamenejme, že polynom  $P(x)$  vyhovuje zadání právě tehdy, když vyhovuje polynom  $rP(x)$ , kde  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r \neq 0$ . Díky tomu můžeme předpokládat, že čísla  $a_0, a_1, \dots, a_n$  jsou dokonce celá (kdyby nebyla, tak polynom vynásobíme součinem jejich jmenovatelů). Nechť  $p$  je prvočíslo, které nedělí  $a_n$ , a  $d$  celé číslo nedělitelné  $p$ , pro které je  $d/p$  v oboru hodnot  $P(x)$ . Máme  $P(q) = d/p$  pro nějaké racionální číslo  $q$ , které si zapíšeme jako  $u/v$ , kde  $u, v$  jsou nesoudělná celá čísla. Rovnost si rozepíšeme a upravíme:

$$\begin{aligned} a_n \left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \frac{u}{v} + a_0 &= \frac{d}{p}, \\ p \cdot (a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} v + \dots + a_1 u v^{n-1} + a_0 v^n) &= d v^n. \end{aligned}$$

Jelikož je levá strana poslední rovnosti dělitelná  $p$  a  $p \nmid d$ , je  $p \mid v$ . Pravá strana je tedy dělitelná  $p^n$ , což spolu s  $n > 1$  implikuje

$$p \mid a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} v + \dots + a_1 u v^{n-1} + a_0 v^n.$$

Všechny sčítance s  $v$  jsou také dělitelné  $p$ , takže  $p \mid a_n u^n$  a vzhledem k volbě  $p$  je  $p \mid u$ . To je ale ve sporu s nesoudělností čísel  $u, v$ , číslo  $d/p$  tedy nemůže mít racionální vzor a polynom  $P(x)$  nemůže splňovat podmínku ze zadání.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení stejně jako výše uvedené nejprve ukazovala, že nekonstantní polynom vyhovující zadání musí mít racionální koeficienty, a posléze nějak argumentovala skrze dělitelnost. Prezentovaný vzorový postup mi přišel jako vhodný kompromis mezi stručností a srozumitelností; povšimněte si, že v podstatě jde jen o variaci na důkaz iracionality  $\sqrt{2}$  (neboli faktu, že 2 nemá racionální vzor v polynomu  $x^2$ ), který byl uveden v úvodním textu!

(Alexander „Olin“ Slávik)

# Stereometrie

3. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

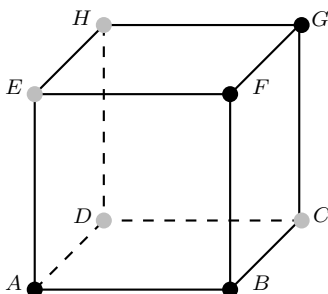
(56; 46; 2,36; 3,0)

Obarvěte každý z osmi vrcholů krychle jednou ze dvou barev, a to tak, aby každá rovina procházející alespoň třemi body jedné barvy procházela i nějakým bodem druhé barvy.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Označme a obarvěme vrcholy krychle tak jako na obrázku. Roviny, které procházejí třemi body modré barvy, jsou celkem čtyři, a sice  $ABF$ ,  $ABG$ ,  $AFG$  a  $BFG$ . V těchto rovinách přitom leží po řadě červené body  $E$ ,  $H$ ,  $D$  a  $C$ . Ze symetrie obarvení podle spojnice středů čtverců  $ABCD$  a  $EFGH$  plyne, že i všechny roviny procházející třemi červenými vrcholy obsahují alespoň jeden vrchol jiné barvy. Naše obarvení tak vyhovuje zadání.



POZNÁMKY:

S úlohou si většina řešitelů hravě poradila. Bohužel se ale našlo i poměrně velké množství lidí, kteří zapoměli na roviny procházející právě třemi vrcholy krychle. Někteří dokonce prohlášovali za zjevné, že takové neexistují, ale rovina  $ACF$  dokládá, že se mýlili.

Na závěr bych chtěl všem doporučit, aby si pečlivě četli zadání. Například v této sérii jsme jasně upozornili, že řešení neobsahující jakékoliv zdůvodnění nebudou hodnocena plným počtem bodů. I přesto několik řešitelů poslalo jen obrázek, což je zbytečně připravilo o jeden bod.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

## Úloha 2.

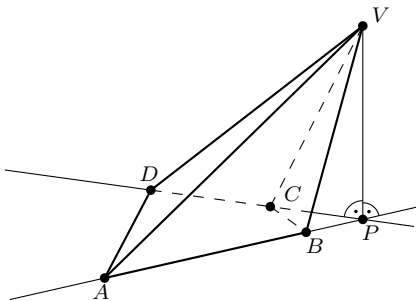
(55; 46; 2,36; 3,0)

Najděte čtyřboký jehlan,<sup>5</sup> jehož dvě protější stěny jsou obě kolmé na podstavu.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Čtyřboký jehlan vyhovující zadání můžeme sestavit následujícím způsobem. Za podstavu zvolíme libovolný čtyřúhelník  $ABCD$  takový, že strany  $AB$  a  $CD$  jsou různoběžné. Průsečík přímk  $AB$  a  $CD$  označíme  $P$  a na kolmici k rovině  $ABCD$  z bodu  $P$  zvolíme bod  $V$  různý od  $P$ . Roviny stěn  $ABV$  a  $CDV$  pak obsahují přímk  $PV$ , takže jsou kolmé na podstavu, a jehlan  $ABCDV$  tedy splňuje zadanou podmínku.



POZNÁMKY:

Většina řešení měla správnou myšlenku, ale řada z nich byla neúplná. Někteří z vás se například omezili na pozorování, že podstava nesmí být rovnoběžník, nebo poslali jen nedostatečně okomentovaný obrázek. Taková řešení nedostala plný počet bodů, protože z nich nebylo jasné, jak jehlan vyhovující zadání skutečně najít.

(Ondra Cífk)

## Úloha 3.

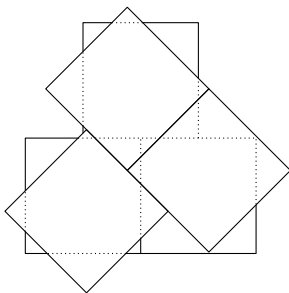
(43; 33; 2,49; 3,0)

Rozmístěte do prostoru šest krychlí tak, aby se žádné dvě neprotínaly a aby se každé dvě dotýkaly nějakou plochou.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Krychle si rozdělíme na dvě trojice. Každou z těchto trojic uspořádáme tak, aby se v ní každá krychle dotýkala každé a spodní stěny byly vyrovnané v jedné rovině. Tyto dvě trojice na sebe poté položíme, horní posuneme a pootočíme tak, abychom dostali pozici podobnou na obrázku níže.



<sup>5</sup> Jehlan ( $n$ -boký) je těleso určené *podstavou*, což je ne nutně pravidelný  $n$ -úhelník, a *hlavním vrcholem*, což je bod mimo rovinu podstavu.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů poslala správné řešení, našlo se však i pár takových, kteří si neuvědomili, že krychle není pouze plášť, ale celé trojrozměrné těleso. Proto se šest krychlí, které jsou do sebe navzájem vnořené, protíná a neřeší naši úlohu. (Martin Čech)

#### Úloha 4.

(27; 20; 3,63; 5,0)

Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn, jehož tělesové výšky mají délky 1, 2, 3 a 6 cm.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Objem jehlanu je  $V = \frac{1}{3}v_a S_a$ , kde  $S_a$  je obsah jedné stěny jehlanu a  $v_a$  jí odpovídající výška. Podle zadání mají být výšky v poměru 1 : 2 : 3 : 6, což znamená, že obsahy stěn musejí být v poměru 6 : 3 : 2 : 1. Z toho plyne, že obsah největší stěny je roven součtu obsahů zbylých stěn. V prostoru platí obdoba trojúhelníkové nerovnosti, která říká, že obsah jedné stěny musí být menší než součet obsahů zbylých stěn. To znamená, že zadaný čtyřstěn existovat nemůže.

POZNÁMKY:

Sešlo se relativně málo řešení, protože bez převedení poměru délek výšek na poměr obsahů stěn nešlo úlohu rozumně řešit. Na druhou stranu, kdo na tento trik přišel, získal většinou plný počet bodů. (Martin Töpfer)

#### Úloha 5.

(22; 20; 4,59; 5,0)

Mějme čtyřstěn  $s$  opsanou a vepsanou koulí. Označme  $R$  poloměr koule opsané,  $r$  poloměr koule vepsané,  $a$  délku nejdelší hrany čtyřstěnu a  $h$  délku jeho nejkratší tělesové výšky. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}.$$

(Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:

Dokážeme dvě nerovnosti: (a)  $a \leq 2R$ , (b)  $2r < h$ .

- (a) Libovolná úsečka spojující dva body na povrchu koule o poloměru  $R$  má délku nejvýše rovnou průměru koule, tj.  $2R$ . Tedy i pro nejdelší hranu  $a$  čtyřstěnu  $s$  opsanou koulí poloměru  $R$  platí  $a \leq 2R$ .
- (b) Označme vrcholy čtyřstěnu  $A, B, C, D$ . Nechť  $D$  je vrchol, z něhož je spuštěna výška délky  $h$ . Pak koule vepsaná čtyřstěnu  $ABCD$  leží celá mezi rovinou  $ABC$  a rovinou  $s$  ní rovnoběžnou procházející bodem  $D$ . Vzdálenost těchto rovin je  $h$ , proto  $2r < h$ . Nerovnost je ostrá, neboť vepsaná koule neprochází bodem  $D$ .

Délky  $a, h, r, R$  jsou nezáporné, tudíž můžeme dokázané nerovnosti vynásobit. Dostáváme  $2ar < 2Rh$ ; z toho ihned plyne  $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$ , což jsme měli dokázat.

POZNÁMKY:

Drtivá většina řešitelů, kteří úlohu poslali, ji měla správně. Dokazovaná nerovnost není silná a nebylo potřeba znát o čtyřstěnu žádné vzorečky, přesto se někteří rozhodli použít hlubších znalostí. Například, že pro povrch čtyřstěnu  $S$  a objem  $V$  platí  $Sr = 3V$ ,  $V = \frac{1}{3}hs$ , kde  $s$  je obsah stěny příslušné výšce délky  $h$ . A protože součet obsahů tří stěn čtyřstěnu je větší než obsah čtvrté stěny, platí  $2sr < Sr = hs$ , což nám opět dává nerovnost (b). Také tímto řešením jsem samozřejmě udělila plný počet bodů. (Míša Hubatová)

## Úloha 6.

(25; 11; 2,04; 1,0)

David vlastní pozemek ve městě, kde stojí několik výškových budov.<sup>6</sup> Řekneme, že jedna budova stíní jinou, pokud spojnice jejich horních konců svírá s rovinou města úhel větší než  $45^\circ$ . Dokažte, že pokud ve městě žádná budova nestíní jinou, může David na svém pozemku postavit budovu vysokou tak, že to bude platit i nadále.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

V bodě  $D$  Davidova pozemku vztýčíme kolmici k podstavné rovině a vyznačíme na ní následující intervaly: Pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  vyznačíme interval  $I_i = \langle h_i - d_i, h_i + d_i \rangle$ , kde  $h_i$  je výška  $i$ -tého domu a  $d_i$  je půdorysná vzdálenost  $i$ -tého domu od bodu  $D$ . Všimneme si, že interval  $I_i$  určuje dovolenou výšku Davidova domu vzhledem k  $i$ -tému domu.

Označme nejvyšší hodnotu ze všech dolních mezi těchto intervalů jako  $a$  a nejnižší ze všech horních mezi jako  $b$ . Pokud  $a \leq b$ , může David postavit budovu s libovolnou výškou z intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Zbývá ukázat, že možnost  $a > b$  nemohla nastat. Pro důkaz sporem proto předpokládejme, že nastala.

Nechť  $a$  je dolní mez intervalu  $I_p$  a  $b$  horní mez intervalu  $I_q$  ( $z a > b$  plyne  $p \neq q$ ). Tedy

$$\begin{aligned} h_p - d_p &> h_q + d_q, \\ h_p - h_q &> d_p + d_q \geq d_{pq}, \end{aligned}$$

kde  $d_{pq}$  značí vzdálenost  $p$ -té a  $q$ -té budovy. Rozdíl výšek  $p$ -té a  $q$ -té budovy převyšuje jejich vzdálenost, čili budova  $p$  stíní budovu  $q$ , což je spor se zadáním.

POZNÁMKY:

V této úloze bylo zvlášť důležité hlídat ostré a neostré nerovnosti, dále pak využít trojúhelníkové nerovnosti. Bohužel jsem neobdržel žádné odůvodnění, že v případě prázdného průniku systému intervalů existují dva disjunktní. I proto jsem za to nestrhával body.

Našel se i jiný postup vedoucí k cíli, a sice konstrukcí „zakázaných“ kuželů. Bylo však nutné vše správně a srozumitelně okomentovat, aby byl tento způsob korektní.

(Jakub „Roman“ Klemsa)

## Úloha 7.

(6; 4; 3,33; 5,0)

Koule vepsaná čtyřstěnu  $ABCD$  se dotýká stěny  $ABC$  v bodě  $E$ . Koule jemu připsaná<sup>7</sup> vzhledem k vrcholu  $D$  se stěny  $ABC$  dotýká v bodě  $F$ . Dokažte, že  $|\angle ABE| = |\angle CBF|$ .

(Pepa Tkadlec)

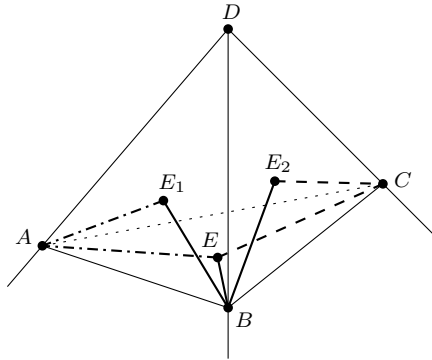
ŘEŠENÍ:

Označme body dotyku gule vpísanej s rovinami  $ABD$  a  $BDC$  postupne  $E_1$  a  $E_2$ . Podobne, body dotyku gule pripísanej s rovinami  $ABD$  a  $BDC$  postupne  $F_1$  a  $F_2$ . Priamky  $BE$ ,  $BE_1$ ,  $BE_2$  sú dotyčnice z toho istého bodu k tej istej guli, preto  $|BE| = |BE_1| = |BE_2|$ . Podobne z dotyčníc z bodov  $A$  a  $C$  máme  $|AE| = |AE_1|$ ,  $|CE| = |CE_2|$  a analogicky pre guľu pripísanú  $|BF| = |BF_1| = |BF_2|$ ,  $|AF| = |AF_1|$  a  $|CF| = |CF_2|$ . Guľa vpísaná je rovnohlá s guľou pripísanou podľa bodu  $D$ , a preto platí  $|E_1F_1| = |E_2F_2|$ .

<sup>6</sup>Předpokládejme, že město je vodorovná rovina, výškové budovy jsou svislé úsečky se spodními konci v této rovině a pozemek je bod v této rovině.

<sup>7</sup>Koule dotýkáající se rovin  $ABD$ ,  $BDC$  a  $ACD$  mimo čtyřstěn a roviny  $ABC$  uvnitř příslušné stěny čtyřstěnu.





Máme teda veľa dvojíc zhodných trojuholníkov:

$$\begin{aligned} \triangle ABE &\cong \triangle ABE_1, & \triangle ABF &\cong \triangle ABF_1, \\ \triangle CBE &\cong \triangle CBE_2, & \triangle CBF &\cong \triangle CBF_2, & \triangle E_1BF_1 &\cong \triangle E_2BF_2. \end{aligned}$$

Preto platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABE| &= |\sphericalangle ABE_1|, & |\sphericalangle ABF| &= |\sphericalangle ABF_1|, \\ |\sphericalangle CBE| &= |\sphericalangle CBE_2|, & |\sphericalangle CBF| &= |\sphericalangle CBF_2|, & |\sphericalangle E_1BF_1| &= |\sphericalangle E_2BF_2|. \end{aligned}$$

A keďže

$$|\sphericalangle ABE_1| + |\sphericalangle ABF_1| = |\sphericalangle E_1BF_1| = |\sphericalangle E_2BF_2| = |\sphericalangle CBE_2| + |\sphericalangle CBF_2|,$$

dostávame:

$$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|.$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že  $|\sphericalangle ABE| \leq |\sphericalangle ABF|$ , a teda aj  $|\sphericalangle CBE| \geq |\sphericalangle CBF|$ , potom

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| &= |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|, \\ 2|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle EBF| &= |\sphericalangle EBF| + 2|\sphericalangle CBF| \end{aligned}$$

a konečne  $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$ .

POZNÁMKY:

Riešeni bolo málo, ale zato v dvoch tretinách prípadov boli správne. Tým dvom, čo neuspeli, odkazujem, nech nezúfajú. A pre ostatných sa aspoň nájde skrytá slovná úloha: Koľko bolo riešení? (Marta Kossaczká)

### Úloha 8.

(6; 0; 0,00; 0,0)

Máme jehlan<sup>5</sup> s podstavou  $A_1A_2 \dots A_n$  ( $n \geq 4$ ) a hlavním vrcholem  $V$ . Necht' rovina  $\rho$  protíná hrany  $VA_1, VA_2, \dots, VA_n$  v bodech  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Dokažte, že pokud jsou mnohoúhelníky  $A_1A_2 \dots A_n$  a  $B_1B_2 \dots B_n$  podobné (vrcholy si odpovídají v tomto pořadí), pak je  $\rho$  rovnoběžná s podstavou. (Alexander „Olin“ Slávik)

ŘEŠENÍ:

Symbolem  $S_{X_1X_2 \dots X_k}$  budeme dále značit obsah mnohoúhelníku  $X_1X_2 \dots X_k$  a symbolem  $V_{X_1X_2 \dots X_k}$  objem jehlanu  $VX_1 \dots X_k$ . Označme

$$t = \frac{V_{A_1 \dots A_n}}{V_{B_1 \dots B_n}}.$$

Pokud nazveme  $v_a, v_b$  postupně vzdálenosti vrcholu  $V$  od roviny podstavy a roviny  $\rho$ , můžeme spočítat objemy

$$V_{A_1A_3A_4} = \frac{v_a}{3} S_{A_1A_3A_4}, \quad V_{B_1B_3B_4} = \frac{v_b}{3} S_{B_1B_3B_4},$$

$$V_{A_1 \dots A_n} = \frac{v_a}{3} S_{A_1 \dots A_n}, \quad V_{B_1 \dots B_n} = \frac{v_b}{3} S_{B_1 \dots B_n}.$$

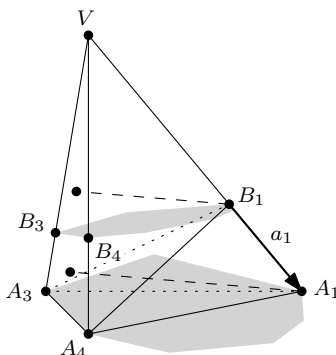
Podobnost podstav  $A_1 \dots A_n$  a  $B_1 \dots B_n$  dává shodnost poměrů

$$\frac{S_{A_1A_3A_4}}{S_{B_1B_3B_4}} = \frac{S_{A_1 \dots A_n}}{S_{B_1 \dots B_n}},$$

a proto i

$$\frac{V_{A_1A_3A_4}}{V_{B_1B_3B_4}} = \frac{V_{A_1 \dots A_n}}{V_{B_1 \dots B_n}} = t.$$

Nyní spočteme poměr objemů jehlanů  $V_{A_1A_3A_4}$  a  $V_{B_1B_3B_4}$  jiným způsobem. Označme  $a_i = |VA_i| : |VB_i|$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Počítejme objem jehlanu  $V_{A_1A_3A_4}$  jako podstava  $V_{A_3A_4}$  krát výška z bodu  $A_1$  děleno třemi. Bod  $A_1$  je od roviny  $V_{A_3A_4}$  přesně  $a_1$ -krát dál než bod  $B_1$ . Proto  $V_{A_1A_3A_4} = a_1 V_{B_1A_3A_4}$ .



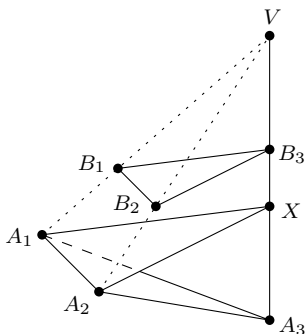
Opakováním úvahy dostáváme

$$V_{A_1A_3A_4} = a_1 V_{B_1A_3A_4} = a_1 a_3 V_{B_1B_3A_4} = a_1 a_3 a_4 V_{B_1B_3B_4},$$

takže  $a_1 a_3 a_4 = t$ . Obdobným způsobem bychom dostali i  $a_2 a_3 a_4 = t$ , a tak nutně  $a_1 = a_2$ . Cyklickou záměnou značení nakonec zjistíme, že všechna  $a_i$  jsou si rovna. To znamená, že mnohoúhelník  $A_1 \dots A_n$  vznikne z  $B_1B_2 \dots B_n$  stejnolehlostí se středem  $V$  a koeficientem  $a_1$ , takže jsou tyto mnohoúhelníky rovnoběžné.

POZNÁMKY:

Jakkoli se to z řešení zcela nezdá, úloha se ukázala být velmi těžkou a žádný řešitel s ní nepohnul (počítat objemy byl zkrátka megatrik). Došlo sice několik pokusů přesvědčit mě důkazem opačné implikace či tvrzením „když jsou podstavy podobné, tak musí být stejnohlelé“, ale přesto jsem za celé opravování nerozdal ani bod. Kamenem úrazu, se kterým (zdá se) žádný z těchto pokusů o řešení nepočítal, je skutečnost, že pokud bychom v úloze povolili  $n = 3$ , tvrzení již neplatí.



Uvažme v prostoru dva shodné trojúhelníky  $A_1A_2A_3$  a  $A_1A_2X$ , které neleží ve stejné rovině. Dále volme vrchol  $V$  na přímce  $XA_3$ . Kdykoli zvolíme rovinu  $\rho$  rovnoběžnou s trojúhelníkem  $A_1A_2X$ , bude ze stejnohlosti výsledný trojúhelník  $B_1B_2B_3$  podobný trojúhelníku  $A_1A_2X$ , a tedy i s ním shodnému  $A_1A_2A_3$ , avšak rovina  $\rho$  bude rovnoběžná s rovinou  $A_1A_2X$ , a nikoli s podstavou  $A_1A_2A_3$ . (Mirek Olšák)



# Teorie čísel

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(25; 24; 4,56; 5,0)

Dokažte, že

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

(Josef Svoboda)

ŘEŠENÍ:

Nejprve se podívejme, jaká je hodnota levé a pravé strany, pokud je  $n$  bezčtvercové. Na pravé straně máme  $\mu(n)^2 = (\pm 1)^2 = 1$ . Součet na levé straně obsahuje jediný člen, a to  $\mu(1) = 1$ , neboť  $d^2 = 1$  je jediný čtverec, který dělí bezčtvercové  $n$ . Rovnost je tedy splněna.

Nyní se zabýváme případem, kdy  $n$  je čtvercové. Pravá strana je rovna nule, proto je třeba ověřit, zda je i součet na levé straně nulový. Pro  $d$  čtvercová jsou příslušné členy v součtu nulové, stačí proto sčítat přes bezčtvercová  $d$ . Zároveň musí každé takové  $d$  dělit číslo  $n$  ve druhé mocnině, takže může mít ve svém prvočíselném rozkladu jen ta prvočísla, která také dělí  $n$  alespoň ve druhé mocnině. Pokud označíme  $k$  součin všech takovýchto prvočísel ( $k > 1$ , neboť  $n$  je čtvercové), dostaneme rovnost

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d|k} \mu(d).$$

Pravá strana je rovna nule, neboť sumární funkce  $\mu$  je rovna nule pro všechna  $k$  větší než jedna.

POZNÁMKY:

Většina příchozích řešení byla správně. Občas byl problém s formulací myšlenek týkajících se přechodu od původní sumy k sumě, která se dá dobře sečíst. Vyzdvihl bych přístup Ondřeje Bínovského, jenž chytře použil multiplikativitu obou stran rovnosti a dokázal obecnější tvrzení (můžete se také zamyslet, jak vypadá rovnost, když místo dvojky v exponentu dáme obecné  $k$ ).

(Josef Svoboda)

## Úloha 2.

(15; 13; 4,40; 5,0)

Víme, že platí známý vztah

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2.$$

Dokažte, že pokud je  $\tau(n)$  počet dělitelů čísla  $n$ , pak také

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left( \sum_{d|n} \tau(d) \right)^2.$$

(Josef Svoboda)

ŘEŠENÍ:

Jelikož součin i konvoluce zachovávají multiplikativitu a funkce  $\tau$  je multiplikativní, jsou multiplikativní i funkce na obou stranách rovnosti. Stačí tedy dokázat rovnost pro  $n = p^k$ . Ale dělitelé čísla  $p^k$  jsou  $p^0, \dots, p^k$  a  $\tau(p^a) = a + 1$ . S využitím rovnosti ze zadání platí:

$$\sum_{d|p^k} \tau(d)^3 = \sum_{a=0}^k \tau(p^a)^3 = \sum_{a=0}^k (a+1)^3 = \sum_{a=1}^{k+1} a^3 = \left( \sum_{a=1}^{k+1} a \right)^2 = \left( \sum_{d|p^k} \tau(d) \right)^2.$$

POZNÁMKY:

Bohužel ne příliš mnoho řešitelů využilo toho, že obě strany jsou multiplikativní, a tak obvykle rozkládali  $n$  na prvočísla a postupovali indukcí. Naštěstí to ale nevedlo k moc složitějším výrazům. Přitom ale část zapoměla zmínit možnost  $n = 1$ , tedy případ, kdy  $n$  na prvočísla rozložit nejde. (Všimněte si, že ve vzorovém řešení jsme tento případ zvlášť řešit nemuseli, protože multiplikativní funkce je dána svými hodnotami v číslech  $p^k$ . V jedničce se nutně rovná jedné.) Skoro každý, kdo se do úlohy pustil, ji také dotáhl do konce. Tak jen škoda, že to nezkusilo více z vás. (Štěpán Šimsa)

### Úloha 3.

(20; 18; 4,00; 5,0)

Mějme číslo  $n$ . Dokažte, že počet dělitelů čísla  $n$  tvaru  $4k + 1$  je alespoň takový, jako počet dělitelů čísla  $n$  tvaru  $4k + 3$ . (Štěpán Šimsa)

ŘEŠENÍ:

Definujme funkci  $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  takto:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1, & \text{pro } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & \text{pro } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Zadání úlohy říká, že máme pro všechna přirozená čísla  $n$  dokázat nerovnost

$$\sum_{d|n} \chi(d) \geq 0.$$

Označme ještě  $\eta(n) = (\chi * u)(n)$ . Funkce  $\chi$  je multiplikativní, proto je (podle tvrzení ze seriálu) multiplikativní i  $\eta$ . Stačí proto dokázat  $\eta(n) \geq 0$  pro  $n$  tvaru  $p^j$ , kde  $p$  je prvočíslo a  $j$  přirozené číslo.

Pokud  $p = 2$ , je  $\eta(2^j) = 1$ , protože mocniny dvojky nemají kromě jedničky žádné liché dělitele.

Je-li  $p$  tvaru  $4k + 1$ , pak všichni dělitelé  $p^j$ , což jsou nižší mocniny  $p$ , jsou také tvaru  $4k + 1$ , a tvrzení tak platí.

Konečně je-li  $p$  tvaru  $4k + 3$ , pak dělitelé tvaru  $4k + 1$  jsou právě všechny sudé mocniny  $p$  (včetně nulté; nejvýše  $j$ -tá), naopak dělitelé tvaru  $4k + 3$  jsou všechny liché mocniny  $p$  (nižší než  $j$ -tá). Pro lichá  $j$  pak dostaneme rovnost počtu obou druhů dělitelů, pro sudá budeme mít o jednoho dělitele tvaru  $4k + 1$  více.

Tvrzení tedy platí pro všechny mocniny prvočísel, což se dá pomocí multiplikativity rozšířit na nerovnost pro všechna přirozená čísla.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů bohužel neřešilo úlohu pomocí znalostí nabytých v seriálu, nýbrž většinou rozebírali různé možnosti, nejprve podobně jako ve vzorovém řešení dokázali úlohu pro mocniny prvočísel a poté pomocí nějakého druhu indukce dokázali úlohu pro všechna  $n$ . Při rozebírání možností a diskutování, co se stane, pokud číslo  $n$  vynásobíme nějakým novým dělitelem, je bohužel velmi snadné zapomenout na nějaké možnosti, za což jsem občas strhával body. Zároveň si můžete rozmyslet, že všechny myšlenky, které se vyskytly při řešení indukci a bez zavedení funkce  $\chi$ , jsou prakticky totožné jako myšlenky ve vzorovém řešení, kde jsou však formálněji sepsané.

(Martin Čech)

# Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(31; 25; 3,35; 4,0)

Kuba našel v šuplíku čtverečkový papír o rozměrech  $20 \times 14$ . Několikrát jej přehnul podél stran čtverečků, čímž dostal jediný čtvereček  $1 \times 1$ . Kolik nejvíce kusů může vzniknout, pokud Kuba rozstříhne takto složený papír podél

- (a) úsečky spojující středy dvou protějších stran? (Pepa Tkadlec)  
(b) úsečky spojující středy dvou sousedních stran? (Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

(a) Obarvíme si všechny vodorovné čáry červeně a svislé žlutě. Při každém přehnutí se červené čáry přehnou na červené a žluté na žluté, výsledný čtvereček tedy opět bude mít červené vodorovné a žluté svislé hrany. Jedním stříhem tedy přestříháme buď všechny červené, nebo všechny žluté hrany, čímž rozstříháme papír na několik proužků – buď 15, nebo 21. Nejvyšší počet částí, na které můžeme papír rozstříhnout, je tedy 21 (zřejmě tohoto počtu dosáhnout umíme).

(b) Tentokrát obarvíme vrcholy čtverečků, a to čtyřmi barvami – tak, aby žádný čtvereček neměl dva vrcholy stejné barvy a aby v každém řádku i sloupci byly použité barvy právě dvě. Všimneme si, že při každém přehnutí na sebe opět položíme vrcholy stejné barvy, výsledný složený papír tedy bude mít všechny stejnobarevné body pod sebou. Odstřížením bodů jedné barvy dostáváme jen čtyři možné podoby rozstříhaného papíru v závislosti na odstřížené barvě. Vznikne tolik částí, kolik je vrcholů odstřížené barvy, nesmíme však zapomenout na „velkou děravou“ část. Celkem tak dostaneme nejvýše 89 částí.

POZNÁMKY:

Ve vzorovém řešení jsme úlohu vyřešili pomocí obarvování, protože to je krásná technika, po jejímž použití se úloha hned vzdá. Na ni ovšem žádný z řešitelů nepřišel. Většina řešení však byla správně, úloha se tedy ukázala spíše jednoduchou. Nejčastěji řešitelé využili pozorování, že řezy na dvou sousedních čtverečcích musejí být osově souměrné podle jejich společné hrany, což znamená, že stačí znát směr řezu v jediném čtverečku, abychom mohli určit všechny ostatní. Strhával jsem body za nezdůvodnění toho, že v části (a) vždy vzniknou stejně dlouhé proužky papíru a v části (b) vzniknou „čtvercové díry kolem některých vrcholů“. (Martin Čech)

## Úloha 2.

(33; 29; 2,42; 2,0)

(a) Na straně  $AB$  konvexního čtyřúhelníku  $ABCD$  je dán bod  $E$  tak, že  $EC \parallel AD$  a  $ED \parallel BC$ . Dokažte, že

$$S_{CDE} \leq \frac{1}{3} S_{ABCD},$$

kde  $S_{CDE}$  a  $S_{ABCD}$  značí obsahy příslušných mnohoúhelníků.

(Martina Vaváčková)



(b) Mějme různostranný ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Označme  $H$  průsečík jeho výšek. Osa ostrého úhlu svíraného výškami z vrcholů  $B, C$  protne strany  $AB, AC$  po řadě v bodech  $P, Q$ . Nakonec buď  $M$  střed strany  $BC$  a  $R$  průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu  $A$  s úsečkou  $MH$ . Dokažte, že body  $A, P, Q, R$  leží na jedné kružnici. (Martina Vaváčková)

ŘEŠENÍ:

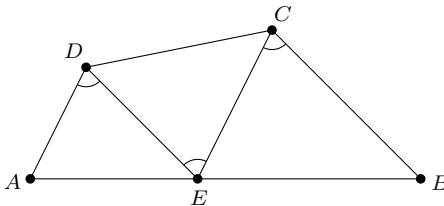
(a) Protože  $AD \parallel EC$ , je  $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CEB|$ ; stejně tak, protože  $ED \parallel BC$ , je  $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle ECB|$ . Podle věty *uu* tedy platí  $\triangle AED \sim \triangle EBC$ . Koeficient podobnosti označme  $k$ , neboli  $|AD| : |EC| = k$ . Střídavé úhly mají stejnou velikost, proto

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB| = \alpha.$$

Poznamenejme, že  $\sin \alpha > 0$ . Ekvivalentně upravíme nerovnost ze zadání:

$$\begin{aligned} S_{CDE} &\leq \frac{1}{3}S_{ABCD}, \\ 3S_{CDE} &\leq S_{AED} + S_{CDE} + S_{EBC}, \\ 2S_{CDE} &\leq S_{AED} + S_{EBC}, \\ 2\left(\frac{1}{2} \cdot (k|AD|) \cdot |DE| \cdot \sin \alpha\right) &\leq \left(\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DE| \cdot \sin \alpha\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (k|AD|) \cdot (k|DE|) \cdot \sin \alpha\right), \\ 2k &\leq 1 + k^2, \\ 0 &\leq (k - 1)^2. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechna reálná  $k$  a provedené úpravy byly ekvivalentní, proto platí i původní nerovnost.

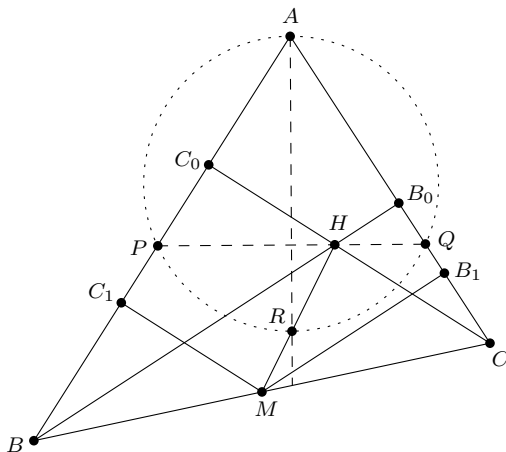


(b) Označme  $B_0, C_0$  postupně paty výšek z vrcholů  $B, C$ . Ukážeme-li, že přímky  $RP, RQ$  jsou kolmicemi na strany  $AB, AC$ , již z toho plyne dokazované – body  $A, P, R, Q$  leží na kružnici nad průměrem  $AR$ . Konkrétně tedy dokážeme, že následující čtveřice přímek se protne v jednom bodě: osa úhlu u vrcholu  $A$ , přímka  $HM$ , kolmice na  $AB$  procházející  $P$  a kolmice na  $AC$  procházející  $Q$ .

Spočteme  $|\sphericalangle HPC_0| = 90^\circ - |\sphericalangle C_0HP| = 90^\circ - |\sphericalangle B_0HQ| = |\sphericalangle B_0QH|$ . (V prostřední rovnosti jsme využili skutečnosti, že  $OP$  je osou úhlu.) Díky tomu je trojúhelník  $APQ$  rovnoramenný. Tudíž se osa úhlu u vrcholu  $A$  a požadované dvě kolmice protnou v jednom bodě. Zbývá ukázat, že tento průsečík leží na přímce  $HM$ .

Nakonec ještě označme  $B_1, C_1$  postupně kolmé projekce bodu  $M$  na strany  $AC, AB$ . Jelikož jsou trojúhelníky  $CC_0B$  a  $BB_0C$  pravouhlé, je  $B_1$  středem úsečky  $B_0C$  a  $C_1$  středem úsečky  $C_0B$ . Dále platí  $|\sphericalangle HCB_0| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle HBC_0|$ , navíc jsou oba trojúhelníky  $HCB_0, HBC_0$  pravouhlé, a proto podobné. V obou těchto podobných trojúhelnících je přímka  $PQ$  osou úhlu, proto  $|B_0Q| : |B_1Q| = |C_0P| : |C_1P|$ .

Kolmice na stranu  $AB$  vedená bodem  $P$  dělí úsečku  $HM$  v poměru  $|C_0P| : |C_1P|$ ; ve stejném poměru ji dělí i kolmice vedená bodem  $Q$  na stranu  $AB$ . Proto tyto dvě kolmice protínají  $HM$  v jednom bodě, což jsme chtěli dokázat.



POZNÁMKY:

S první úlohou si poradil prakticky každý, kdo se do ní pustil. Zásadní bylo všimnout si podobnosti trojúhelníků. Pak už stačilo vyjádřit obsahy a dojít ke známé nerovnosti. Jen mě zarazilo, že několik řešitelů počítalo obsah trojúhelníku jako dvojnásobek platného vzorce  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ , kde  $\gamma$  je úhel mezi stranami  $a, b$ . Na další postup chyba neměla vliv, ale ta polovina tam opravdu patří.

Druhá úloha naopak dělala velké problémy. I došlých řešení bylo poskrovnu, navíc velká část z nich skončila ještě před dotažením důkazu. Zaujalo mě, že z těch správných řešení žádná dvě nebyla stejná, každý řešitel postupoval jiným způsobem. Využívali stejnolehlost, osovou symetrii i další zobrazení a více či méně komplikovaně nakonec došli k cíli. (Bára Kociánová)

**Úloha 3.**

(29; 23; 2,48; 2,0)

(a) Nalezněte funkci definovanou na reálných číslech, jejímž grafem je lomená čára<sup>8</sup> a která nabývá každé reálné hodnoty právě třikrát. (David Hruška)

(b) Pro která přirozená čísla  $n$  existuje polynom  $f$  stupně  $n$  a nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel  $a_1, a_2, \dots$  taková, že platí  $f(a_1) = 0$  a  $f(a_i) = a_{i-1}$  pro každé  $i > 1$ ? (David Hruška)

ŘEŠENÍ:

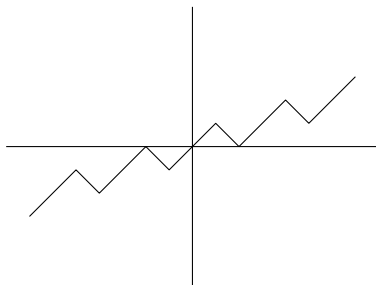
(a) (PODĚLA JÁNA JURKU)

Zadanie splňuje funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná tak, že pre každé  $k \in \mathbb{Z}$  platí:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & \text{pre } 3k - 1 \leq x \leq 3k + 1, \\ -x + 2 + 4k & \text{pre } 3k + 1 \leq x \leq 3k + 2. \end{cases}$$

Graf tejto funkcie vyzerá takto:

<sup>8</sup>Lomená čára je množina libovolně (tedy i nekonečně) mnoha na sebe navazujících úseček.



Z obrázku je jasné, že táto funkcia vyhovuje zadaniu.

**(b)** (PODĽA MATĚJA KONEČNĚHO)

Pre  $n = 1$  existuje napríklad polynóm  $f(x) = x - 1$  s postupnosťou  $a_i = i$ . Sporom ukážeme, že pre  $n \geq 2$  taký polynóm nenájdeme.

Nech teda existuje taký polynóm  $f$ , ktorý splňuje naše zadanie. Podľa znamienka pri vedúcom koeficiente je náš polynóm od nejakého  $x$  buď stále kladný, alebo stále záporný. Ak by bol od tohto  $x$  stále záporný, tak by náš polynóm  $f$  mohol nadobúdať iba konečne veľa kladných hodnôt, čo je spor. Keďže je náš polynóm stupňa aspoň dva, potom aj polynóm  $f(x) - x$  je od nejakého  $x_0$  stále kladný. Tým pádom pre všetky  $x$  väčšie ako  $x_0$  platí  $f(x) > x$ .

Označme  $i_0$  také prirodzené číslo, že pre všetky prirodzené  $i$  väčšie ako  $i_0$  platí, že aj  $a_i$  je väčšie ako  $x_0$ . (Poznamenajme, že také  $i_0$  existuje, pretože  $a_i$  je nekonečná postupnosť rôznych prirodzených čísel a tých, ktoré sú menšie ako  $x_0$ , je konečne veľa.)

Pozrime sa na našu postupnosť  $a_{i_0+1}, a_{i_0+2}, \dots$ . Zo zadania platí, že  $a_{i_0+j} = f(a_{i_0+j+1})$  pre všetky prirodzené  $j$ , a keďže  $a_{i_0+j+1}$  je väčšie ako  $x_0$ , tak platí aj  $f(a_{i_0+j+1}) > a_{i_0+j+1}$ . Podobnou úvahou dostávame, že  $a_{i_0+j} > a_{i_0+j+1} > a_{i_0+j+2} > \dots$ . Keďže neexistuje nekonečná klesajúca postupnosť prirodzených čísel, tak sa dostávame k sporu, že taký polynóm  $f(x)$  existuje.

POZNÁMKY:

Komentár k (a): Došlo mi veľa rozmanitých predpisov funkcií, ktoré vyhovovali zadaniu. Väčšina z vás mala obrázok podobný tomu, ktorý je uvedený vo vzoráku.

Komentár k (b): Chcel by som vás pochváliť, že ste sa nezľakli zadania a pokúsili sa ho vyriešiť. Všetci ste to mali viac-menej správne, čo ma potešilo. (Viktor Szabados)

## Úloha 4.

(39; 20; 2,05; 2,0)

V niektorých  $k$  políčkách tabuľky  $10 \times 10$  je neviditeľným inkoustom nakreslená jedna úhlopriečka. Čuch chce zistiť, ktorá políčka to jsou. Kedyž ukáže shora či zdola na nějaký sloupec nebo zleva či zprava na nějaký řádek, dozví se, kudy by z tabuľky vyletěl paprsek světla, kdyby do ní vletěl právě z onoho směru a odrážel se pouze od vyznačených úhlopříček jako od zrcadel. Kolikrát nejméně musí Čuch do tabuľky ukázat, aby potom mohl vždy s jistotou určit, kde se zrcátka nacházejí, pokud

**(a)**  $k = 2$ , (Martin Čech)

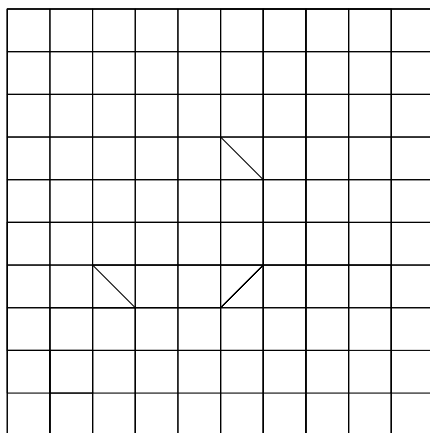
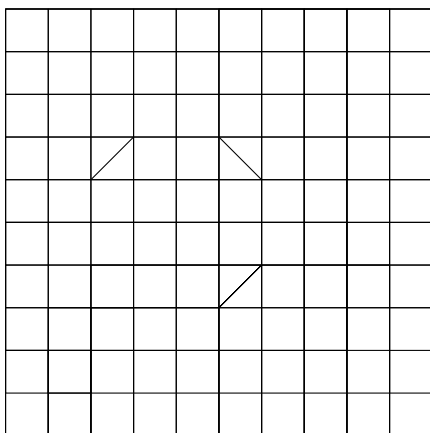
**(b)**  $k = 3$ ? (David Hruška)

ŘEŠENÍ:

**(a)** Nejprve dokážeme, že deset ukázání nestačí. Po devíti ukázáních totiž určitě najdeme alespoň jeden sloupec nebo řádek, v němž Čuch neukázal na alespoň dvě políčka. Jsou-li zrcátka zrovna na těchto políčkách, pak Čuch nemůže jedním ukázáním zjistit, jak jsou natočená.

Nyní dokážeme, že jedenáct pokusů stačí. Čuch bude postupně odshora ukazovat na jednotlivé řádky. Jakmile narazí na zrcátko (což je právě tehdy, když paprsek nevyletí na druhé straně), ukáže na příslušný řádek z druhé strany. Tím určí počet a polohu zrcátek v tomto řádku. Pokud našel pouze jedno zrcátko, pokračuje dále, dokud nenarazí na řádek se zrcátkem. Polohu tohoto zrcátka už umí jednoznačně určit. Ukázal tedy na devět řádků nejvýše jednou a na jeden dvakrát, což je dohromady nanejvýš jedenáct pokusů.

(b) Čuchovi se to nemusí podařit, ať svítí jakkoli – existují totiž dvě různá rozmístění zrcátek taková, že každý vyslaný paprsek vyletí z obou na stejném místě. Jedna z mnoha možných dvojic je na obrázku:



POZNÁMKY:

Část (a) se nakonec ukázala skoro těžší než část (b). Bylo to hlavně proto, že jsem se rozhodl být přísný a strhávat bod za neúplný důkaz toho, že deset ukázání nestačí. Tvrzeními typu „nejvýhodnější bude ...“ nebo „nejhorší, co se může stát, je, že ...“ začínají přesně ty části důkazů, za které se nejčastěji strhávají body – je tedy potřeba je pořádně odůvodnit nebo vysvětlit (spousta řešitelů používajících tyto výrazy navíc dospěla k závěru, že u tří zrcátek je potřeba 18–19 pokusů, přestože většinou to jde na 12). Řešení části (b) bylo možná trochu nečekané, ale nebylo to tak těžké – při rozebírání možností se na něj nutně muselo narazit. Překvapivě se však našlo několik zkušených řešitelů, kteří se pokusili dokázat, že dvanáct ukázání stačí. Za to jsem uděloval jeden bod.

(Martin Čech)

**Úloha 5.**

(24; 20; 3,50; 4,5)

(a) Mějme posloupnost přirozených čísel  $a_1, a_2, \dots$  takovou, že každé přirozené číslo se v ní nachází právě jednou. Dokažte, že pak existují přirozená čísla  $l, m$ , pro která platí  $1 < l < m$  a  $a_1 + a_m = 2a_l$ .

(Alča Skálová)

(b) Rozmístěte čísla  $1, 2, \dots, n$  do řady tak, aby aritmetický průměr žádných dvou z nich neležel mezi nimi.

(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

ŘEŠENÍ:

(a) Najdeme nejmenší index  $l$  takový, že  $a_l > a_1$ , a dále budeme hledat index  $m$ , aby platila rovnost ze zadání:  $a_1 + a_m = 2a_l$ , kterou si upravíme na  $a_m = 2a_l - a_1$ . Jelikož je v posloupnosti

každé přirozené číslo právě jednou, je v ní i toto číslo  $a_m$ . Platí  $a_l > a_1$ , proto  $2a_l - a_1 > a_l$ , tedy  $a_m > a_l > a_1$ . Protože  $l$  je nejmenší index čísla většího než  $a_1$ , je index  $m$  určitě větší. V libovolné posloupnosti přirozených čísel tedy umíme najít indexy  $l, m$  takové, že platí  $1 < l < m$  a zároveň  $a_1 + a_m = 2a_l$ .

(b) Konečné posloupnosti čísel, ve které mezi žádnými dvěma čísly neleží jejich aritmetický průměr, budeme nazývat *vhodné*. Vhodnou  $n$ -prvkovou permutací rozumíme vhodnou  $n$ -prvkovou posloupnost, která obsahuje každé číslo  $1, \dots, n$  právě jednou. Automaticky je 1-prvková permutace vhodná, jelikož ani neobsahuje dva různé členy.

Z  $n$ -prvkové vhodné permutace  $a_1, \dots, a_n$  sestojíme  $2n$ -prvkovou vhodnou permutací. Pro dané  $x, y, z$  je výrok „ $y$  je aritmetickým průměrem  $x$  a  $z$ “ ekvivalentní výroku „ $2y$  je aritmetickým průměrem  $2x$  a  $2z$ “ a rovněž výroku „ $2y - 1$  je aritmetickým průměrem  $2x - 1$  a  $2z - 1$ “. Proto je vhodná i posloupnost

$$2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n \quad \text{a stejně tak} \quad 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_n - 1.$$

Zbývá si uvědomit, že položením obou vhodných posloupností za sebe získáme stále vhodnou posloupnost – první posloupnost totiž obsahuje pouze sudá čísla a druhá lichá, nemá tedy smysl uvažovat průměry napříč oběma posloupnostmi. Navíc je zde použito právě jednou každé číslo od 1 do  $2n$ , tedy jedná se o kýženou  $2n$ -prvkovou permutaci.

Opakováním tohoto postupu vyřešíme úlohu pro všechna  $n$ , která jsou mocninou dvojky. Pro  $n$  různé od mocniny dvojky stačí uvážit konstrukci pro nejbližší vyšší mocninu dvojky a následně nadbytečné prvky z permutace odebrat, čímž se její vhodnost neporuší.

POZNÁMKY:

K části (a): Některá řešení se více či méně podobala tomu výše uvedenému, které mi připadá nejsnadnější. Zbytek většinou našel někde v posloupnosti číslo  $a_1 + 1$  a postupoval sporem. Zjistil, že v nevyhovující posloupnosti by všechna  $a_1 + 2^k$ ,  $k > 0$ , musela ležet před  $a_1 + 1$ . Což ale nelze, protože bychom před  $a_1 + 1$  měli nekonečně mnoho členů. Oba postupy jsou správné a většina řešitelů si vysloužila dva body.

K části (b): I v této části byly dva oblíbené způsoby řešení. Kromě tohoto indukčního se řešitelé pouštěli do důkazu správnosti rekurzivního algoritmu, v němž v každém kroku rozdělili část posloupnosti na dvě podle zbytků po dělení mocninou dvou. Ti, kteří se nezamotali v indexech a úvahách, dostali plný počet bodů. (Bára Kociánová)

## Úloha 6.

(35; 32; 2,63; 2,0)

(a) Některé body na přímce  $p$  jsou fešné. Navíc platí: vezmeme-li libovolný bod  $z$   $p$ , pak jeho vzdálenost od alespoň jednoho z fešných bodů je iracionální. Kolik nejméně může být fešných bodů? (Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

(b) Řešte tutéž úlohu, je-li  $p$  rovina (nikoli přímka). (Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

ŘEŠENÍ:

(a) Jeden fešný bod nám nestačí, protože určite najdeme bod v racionální vzdálenosti od něho (napr. on sám). Ukážeme, že dva fešné body stačí.

Zvoľme ľubovoľné dva body priamky, ktorých vzdialenosť je iracionálna (napr.  $\sqrt{2}$ ). Ak má ľubovoľný bod  $z$  priamky racionálnu vzdialenosť  $x$  k jednému z nich, jeho vzdialenosť od druhého fešného bodu je (podľa vzájomnej polohy bodov) buď  $x + \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} - x$ , alebo  $x - \sqrt{2}$ , ale vo všetkých troch prípadoch dostaneme iracionálne číslo.

(b) Podobne ako v a), jeden fešný bod nestačí. Rovnako nestačia ani dva fešné body (vo vzdialenosti  $x$ ), pretože vieme zostrojiť rovnoramenný trojuholník, kde základňu tvorí spojnica fešných bodov a ramená majú dĺžku  $\lceil x \rceil$ . Posledný vrchol má teda racionálnu vzdialenosť od oboch fešných bodov. Ukážeme, že nám postačia tri body.

Označme za fešné body  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  a  $(\sqrt{2}, 0)$  a pre spor predpokladajme, že nejaký bod  $(x, y)$  má od všetkých troch racionálne vzdialenosti – označme ich postupne  $k$ ,  $l$  a  $m$ . Potom dostávame:

$$\begin{aligned} k^2 &= x^2 + y^2, \\ l^2 &= (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x, \\ m^2 &= (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2\sqrt{2}x. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch vzťahov a racionality  $k$  a  $l$  dostávame, že aj  $x$  musí byť racionálne, a teda  $\sqrt{2}x$  je iracionálne. Keď to ale dosadíme do posledného vzťahu, dostaneme, že  $m^2$  musí byť iracionálne, čo je spor s predpokladom, že  $m$  je racionálne.

Vidíme teda, že takto zvolené fešné body zadaniu vyhovujú.

**POZNÁMKY:**

Úloha (alebo aspoň časť (a)) nebola ťažká, čomu odpovedá aj to, že takmer všetky riešenia boli správne. Niektorí ste síce zabudli spomenúť, prečo jeden bod nestačil, ale body som za to nestrhával. Za konštatovanie, že musia byť 2 fešné body, ale bez patričného odôvodnenia, ste mohli dostať len jeden bod.

Ak ste poslali aj časť (b) (a nezamotali sa v dôkaze), tak som vám to väčšinou uznal aj napriek malým problémom v značení alebo znamienkach. Opäť, za obyčajné konštatovanie, že musia byť tri fešné body, ktoré ste ale nedokázali (aspoň trochu uveriteľne), bol iba jeden bodík.

(Peter „π tr“ Korcsok)

**Úloha 7.**

(24; 23; 1,92; 2,0)

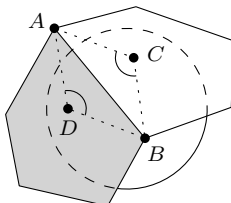
(a) *Najdšte konvexní mnohostěn, jehož stěny lze obarvit černě a bíle tak, aby černých stěn bylo více než bílých, ale žádné dvě černé stěny neměly společnou hranu.* (Pepa Tkadlec)

(b) *Dokažte, že žádnému takovému mnohostěnu nelze vepsat kouli.*<sup>9</sup> (Pepa Tkadlec)

**ŘEŠENÍ:**

(a) Mnohostěn můžeme zkonstruovat například takto: Vezmeme krychli, která je uvnitř černá a na povrchu bílá. Poté odřízneme každý roh krychle rovinou. Tím dostaneme těleso, které je jistě konvexní, má šest bílých a osm černých stěn a žádné dvě černé stěny se nedotýkají hranou.

(b) Předpokládejme pro spor, že máme nějaký mnohostěn, který splňuje podmínky a přitom má vepsanou kouli. Vezmeme nějaké dvě stěny mnohostěnu, které se dotýkají hranou  $AB$ . Body dotyku vepsané koule s těmito dvěma stěnami označme  $C$  a  $D$ . Trojúhelníky  $ABC$  a  $ABD$  jsou shodné podle věty  $sss$ , neboť délka různých tečen (jako úseček) z bodu ke kouli je stejná.



<sup>9</sup>Koule vepsaná mnohostěnu se dotýká všech jeho stěn.

Nyní zvlášť pro černé a zvlášť pro bílé stěny spočítáme součet úhlů  $ACB$  za všechny hrany mnohostěnu. Při každé hraně máme buď jednu černou a jednu bílou stěnu, nebo dokonce dvě bílé, výsledný součet u černých stěn tedy (díky shodnosti) určitě nebude vyšší než součet u bílých stěn. Přitom je ale černých stěn více než bílých a součet úhlů u každého z bodů dotyku je  $360^\circ$ , takže musí být součet úhlů u černých stěn alespoň o  $360^\circ$  větší než u těch bílých. To je spor.

POZNÁMKY:

Naprostá většina z vás si poradila s částí (a). Objevily se rozmanité tvary, nejčastěji krychle bez rohů nebo dva víceboké jehlany vzájemně k sobě šikově přilepené podstavami. Jako bonus si můžete rozmyslet, kolik nejméně stěn je třeba. Bohužel nikdo nevyřešil část (b), která přitom nevyžadovala žádné složité techniky, jen pěknou myšlenku. (Josef Svoboda)

## 2. jarní série – Iracionální čísla

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.–3.	František	Couf	1	GZborovPH	3 3 – 5 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
1.–3.	Martin	Raszyk	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
1.–3.	Radovan	Švarc	3	G ČTřebová	3 0 3 5 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
4.	Václav	Rozhoň	3	GJirsikaČB	3 3 – 5 5 5 5 –	23	<b>23,63</b>
5.	Eduard	Batmendijn	3	CGStLubovňa	3 – – 5 5 5 5 –	23	<b>23,58</b>
6.	Filip	Bialas	1	G OpatovPH	3 3 – 5 5 5 – –	21	<b>23,42</b>
7.	Pavel	Turek	1	G TomkovaOL	3 3 3 5 5 5 1 –	21	<b>23,04</b>
8.	Jakub	Löwit	2	G ČeskolipH	3 0 3 5 5 5 2 –	21	<b>22,20</b>
9.–10.	Vojtěch	Suchánek	3	G JarošeBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	<b>22,17</b>
9.–10.	Mikuláš	Zindulka	3	GMikul23PL	3 3 – 5 5 5 – –	21	<b>22,17</b>
11.	Zuzana	Trégllová	1	G Žatec	3 3 2 5 – 5 – –	18	<b>21,88</b>
12.	Martin	Surma	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 – –	21	<b>21,76</b>
13.	Jan	Václavek	2	G Ústí n O	3 3 3 5 5 – – –	19	<b>21,52</b>
14.	Václav	Steinhauser	0	ZŠVranéNV1	3 3 1 5 5 – – –	17	<b>21,40</b>
15.	Minh Tri	Pham	2	NPorg	3 3 3 – 5 5 – –	19	<b>21,25</b>
16.	Karolína	Kuchyňová	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	<b>21,21</b>
17.	Matěj	Konečný	3	G Jirov ČB	3 3 3 5 5 5 – –	21	<b>21,14</b>
18.	Martin	Hora	4	GMikul23PL	3 – – 5 5 5 5 –	23	<b>20,80</b>
19.	Jan	Šorm	2	G JarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	<b>20,77</b>
20.	Jan	Jurka	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	19	<b>20,55</b>
21.	Jan	Soukup	3	G Klatovy	3 3 3 5 5 5 4 –	22	<b>20,50</b>
22.	Markéta	Calábková	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 4 5 – –	20	<b>20,47</b>
23.	Hedvika	Ranošová	0	GBudějovPH	3 3 3 5 – – – –	14	<b>20,44</b>
24.	Daniel	Pišťák	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 – – –	19	<b>20,00</b>
25.	Libor	Drozdek	3	G Holešov	3 3 3 – 4 5 – –	18	<b>19,71</b>
26.	Jakub	Svoboda	4	G KomHavíč	3 3 3 5 5 5 1 3	21	<b>19,54</b>
27.	Tomáš	Kuzma	2	GAB Senec	3 3 3 3 4 – – –	16	<b>19,37</b>
28.	Martin	Kopřiva	2	GMikul23PL	3 3 3 5 2 – – –	16	<b>19,28</b>
29.	Matyáš	Grof	3	GZborovPH	3 3 3 2 4 4 2 1	17	<b>19,00</b>
30.	Marián	Poppr	3	GJNerudyPH	3 3 3 5 1 5 – –	19	<b>17,97</b>
31.	Katarína	Krajčiová	3	GAlejKošic	3 3 3 – 5 5 – –	19	<b>17,91</b>
32.	Antonín	Češík	4	SPŠElek PA	3 3 3 5 – 5 – –	19	<b>17,70</b>
33.	Jan	Krejčí	4	G Bílovec	3 3 3 5 5 2 – –	19	<b>17,62</b>
34.	Dominik	Krasula	1	G Krnov	3 0 3 5 1 1 1 –	13	<b>17,15</b>
35.	Marian	Poljak	2	GJŠkodyPŘ	3 3 2 – 5 – – –	13	<b>16,90</b>
36.	Tomáš	Fiala	3	GLedečNSáz	3 0 3 4 5 – – –	15	<b>16,69</b>
37.–38.	Markéta	Horová	2	GMikul23PL	3 3 3 – 3 – – –	12	<b>16,00</b>
37.–38.	Vojtěch	Lukeš	2	G LPika PL	3 3 1 – 5 – – –	12	<b>16,00</b>
39.	Lukáš	Kubacki	1	GNadKavaPH	3 3 3 – – – 1 –	10	<b>15,89</b>



40.	Lukáš	Černý	2	NPorg	3 3 3 - 2 - - -	11	<b>15,05</b>
41.	Tereza	Kislingerová	1	G Klatovy	3 3 3 - - - - -	9	<b>14,89</b>
42.	Jiří	Zeman	4	GLesníZlín	3 3 - 5 5 - - -	16	<b>14,56</b>
43.-45.	Anh	Le Hoang	2	GJarošeBO	3 3 1 0 2 0 - 0	9	<b>13,00</b>
43.-45.	Jaroslav	Stránský	2	G Tišnov	3 0 3 - 2 1 - -	9	<b>13,00</b>
43.-45.	Šimon	Tabačko	2	EvG Košice	1 0 2 1 5 - - -	9	<b>13,00</b>
46.	Jakub	Hledík	3	GSŘMRSkuteč	3 - 3 - 5 - - -	11	<b>12,57</b>
47.	Zuzana	Šimečková	3	GCON ČesBud'	3 - 3 - 5 - - -	11	<b>12,33</b>
48.	Peter Pavel Arthur	Petráš	2	ŠpMNDaG BA	- 3 1 - 4 - - -	8	<b>11,89</b>
49.	Zuzana	Svobodová	2	G FrýdINOs	3 3 3 0 - - - -	9	<b>11,75</b>
50.	Jaromír	Mielec	1	GVolgogrOS	3 3 2 - - - - -	8	<b>11,50</b>
51.-53.	Marek	Černý	3	G Chrudim	- 3 3 - 3 - - -	9	<b>11,39</b>
51.-53.	Marek	Štěpán	3	SPŠE Fren	3 3 - - 2 - 1 -	9	<b>11,39</b>
51.-53.	Peter	Vook	3	GPošKošice	3 3 3 - - - - -	9	<b>11,39</b>
54.	Robert	Keřlík	4	GOPavla PH	3 3 - 2 2 1 1 -	11	<b>11,00</b>
55.	Patricie	Klosse	2	G ČKrumlov	3 1 3 - - - - -	7	<b>10,72</b>
56.	Jiří	Štrincl	3	GSRRandyJN	3 0 - 5 - - - -	8	<b>10,30</b>
57.-58.	Lukáš	Honsa	2	G Jirov ČB	3 3 - - - - - -	6	<b>9,48</b>
57.-58.	Matěj	Seidl	2	PORG PH	3 0 3 - - - - -	6	<b>9,48</b>
59.	Lukáš	Sadlek	3	G Čadca	3 1 3 - - - - -	7	<b>9,17</b>
60.-62.	Petr	Jakubčík	0	PORG PH	3 0 - - - - - -	3	<b>8,34</b>
60.-62.	Vojtěch	Lanz	0	GZborovPH	3 0 0 0 - 0 - -	3	<b>8,34</b>
60.-62.	Přemysl	Šťastný	0	G Žamberk	3 - - - - - - -	3	<b>8,34</b>
63.	Ivona	Hrivová	4	GOKrŽilina	3 2 3 - 2 - - -	10	<b>8,29</b>
64.-65.	Andrea	Kučerová	2	G ČKrumlov	3 0 2 - - - - -	5	<b>8,17</b>
64.-65.	Timotej	Šujan	2	GJarošeBO	- - - - 5 - - -	5	<b>8,17</b>
66.	Zuzana	Vlasáková	4	G Rumburk	3 3 3 - - - - -	9	<b>7,43</b>
67.-70.	Kateřina	Nová	1	G Vimperk	3 - - - - - - -	3	<b>6,79</b>
67.-70.	Jáchym	Solecký	1	PORG PH	3 0 - - - - - -	3	<b>6,79</b>
67.-70.	Marie	Vonzino	1	GTomkovaOL	3 - - - - - - -	3	<b>6,79</b>
67.-70.	Ondřej	Zeman	3	G Lovosice	- - - - 5 - - -	5	<b>6,79</b>
71.-73.	Michaela	Brezinová	2	GKomTřebiš	3 1 - - - - - -	4	<b>6,76</b>
71.-73.	Jiřina	Duspivová	2	G Kralupy	3 - 1 - - - - -	4	<b>6,76</b>
71.-73.	Jakub	Marták	2	G GolNitra	2 0 1 - 0 0 1 -	4	<b>6,76</b>
74.	Michaela	Brabcová	2	G Jirov ČB	3 - - - - - - -	3	<b>5,27</b>
75.	Adam	Gálik	4	G OlivuPopr	3 0 0 1 1 0 0 0	5	<b>5,00</b>
76.	Jakub	Sláma	3	G OpatovPH	3 - - - - - - -	3	<b>4,23</b>
77.	Jan	Erhart	3	GFXŠaldyLI	- - 3 - - - - -	3	<b>3,21</b>
78.	Kristýna	Ilievová	3	G Milevsko	3 - - - - - - -	3	<b>2,87</b>
79.	Matěj	Coufal	1	G HavlBrod	0 1 - - 0 - - -	1	<b>2,67</b>

# 3. jarní série – Stereometrie

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.	<i>Pavel</i>	<i>Turek</i>	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 -	23	<b>24,07</b>
2.	<i>František</i>	<i>Couf</i>	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 5 5 -	23	<b>23,94</b>
3.	<i>Filip</i>	<i>Bialas</i>	1	GOpátovPH	3 3 3 5 5 - - -	19	<b>22,43</b>
4.	<i>Mikuláš</i>	<i>Zindulka</i>	3	GMikul23PL	2 3 - 5 5 5 - -	20	<b>21,41</b>
5.	<i>Radovan</i>	<i>Švarc</i>	3	G ČTřebová	3 3 - 5 5 5 5 -	23	<b>21,23</b>
6.	<i>Hedvika</i>	<i>Ranošová</i>	0	GBudějovPH	1 3 1 5 5 - - -	15	<b>21,07</b>
7.	<i>Martin</i>	<i>Raszyk</i>	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 -	23	<b>20,50</b>
8.	<i>Katarína</i>	<i>Krajčiová</i>	3	GAlejKošic	3 3 3 5 5 5 - -	21	<b>20,18</b>
9.	<i>Martin</i>	<i>Surma</i>	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 - - -	19	<b>20,05</b>
10.	<i>Vojtěch</i>	<i>Lukeš</i>	2	G LPika PL	3 3 3 - 5 1 - -	15	<b>18,59</b>
11.	<i>Václav</i>	<i>Rozhoň</i>	3	GJirsíkaČB	3 3 3 5 - 2 - -	16	<b>18,15</b>
12.	<i>Eduard</i>	<i>Batmendijn</i>	3	CGStLubovňa	3 3 - 5 1 4 - -	16	<b>17,98</b>
13.	<i>Tomáš</i>	<i>Fiala</i>	3	GLedečNSáz	3 3 3 - 5 1 - -	15	<b>16,69</b>
14.	<i>Petr</i>	<i>Jakubčík</i>	0	PORG PH	3 3 3 - - - - -	9	<b>16,42</b>
15.	<i>Václav</i>	<i>Steinhauser</i>	0	ZŠVranéNV1	2 0 3 5 - - - -	10	<b>16,06</b>
16.	<i>Jakub</i>	<i>Svoboda</i>	4	G KomHavíř	3 3 3 4 5 1 - -	18	<b>15,93</b>
17.-18.	<i>Tomáš</i>	<i>Kuzma</i>	2	GAB Senec	2 2 - 2 5 - - 0	11	<b>15,05</b>
17.-18.	<i>Šimon</i>	<i>Tabačko</i>	2	EvG Košice	3 3 3 - - 2 - -	11	<b>15,05</b>
19.	<i>Tereza</i>	<i>Kislingerová</i>	1	G Klatovy	3 3 3 - - - - -	9	<b>14,89</b>
20.	<i>Jakub</i>	<i>Löwit</i>	2	GČeskoliPH	1 3 3 - 5 0 - -	12	<b>14,53</b>
21.	<i>Karolína</i>	<i>Kuchyňová</i>	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 - - - -	14	<b>14,39</b>
22.	<i>Jan</i>	<i>Soukup</i>	3	G Klatovy	2 2 3 5 5 1 - -	17	<b>14,26</b>
23.	<i>Vojtěch</i>	<i>Suchánek</i>	3	GJarošeBO	1 3 3 - - 5 - -	12 - i	<b>14,20</b>
24.	<i>Vojtěch</i>	<i>Lanz</i>	0	GZborovPH	0 0 1 0 5 - - 0	6	<b>13,03</b>
25.-26.	<i>Marian</i>	<i>Poljak</i>	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 - - - - -	9	<b>13,00</b>
25.-26.	<i>Jan</i>	<i>Václavek</i>	2	G Ústí n O	3 3 3 - - - - -	9	<b>13,00</b>
27.	<i>Martin</i>	<i>Kopřiva</i>	2	GMikul23PL	3 3 3 - - - - -	9	<b>12,87</b>
28.	<i>Lukáš</i>	<i>Kubacki</i>	1	GNadKavaPH	1 3 3 - - - - -	7	<b>12,64</b>
29.	<i>Daniel</i>	<i>Pišťák</i>	2	GZborovPH	3 2 - 5 - 1 - -	11	<b>12,45</b>
30.	<i>Jan</i>	<i>Jurka</i>	3	GMLerchaBO	3 2 - 5 - - - -	10	<b>12,31</b>
31.	<i>Jan</i>	<i>Šorm</i>	2	GJarošeBO	3 3 3 - - - - -	9	<b>11,62</b>
32.-33.	<i>Matyáš</i>	<i>Grof</i>	3	GZborovPH	3 3 3 - - 0 0 0	9	<b>11,39</b>
32.-33.	<i>Peter</i>	<i>Vook</i>	3	GPošKošice	3 3 3 - - - - -	9	<b>11,39</b>
34.-36.	<i>Kateřina</i>	<i>Nová</i>	1	G Vimperk	1 2 3 - - - - -	6	<b>11,38</b>
34.-36.	<i>Jáchym</i>	<i>Solecký</i>	1	PORG PH	2 3 1 - - - - -	6	<b>11,38</b>
34.-36.	<i>Zuzana</i>	<i>Trégllová</i>	1	G Žatec	3 2 1 - - - - -	6	<b>11,38</b>
37.	<i>Jakub</i>	<i>Hledík</i>	3	GSŘMRSkuteč	3 3 3 - - 0 - -	9	<b>10,50</b>
38.	<i>Jan</i>	<i>Kadlec</i>	3	G Klatovy	2 2 3 5 - - - -	12	<b>10,46</b>
39.	<i>Antonín</i>	<i>Češík</i>	4	SPŠElek PA	3 3 3 - - 3 - -	12	<b>10,35</b>

40.	Matěj	Konečný	3	G Jírov ČB	1 3 1 - 5 - - -	10	<b>10,26</b>
41.	Zuzana	Svobodová	2	G FrýdlNOs	1 2 3 1 - - - -	7	<b>9,51</b>
42.-44.	Markéta	Horová	2	GMikul23PL	2 1 3 - - - - -	6	<b>9,48</b>
42.-44.	Patricie	Klosse	2	G ČKrumlov	2 3 1 0 - - - -	6	<b>9,48</b>
42.-44.	Andrea	Kučerová	2	G ČKrumlov	2 3 1 0 - - - 0	6	<b>9,48</b>
45.	Zuzana	Šimečková	3	GCON ČesBud	2 3 3 - - 0 - -	8	<b>9,21</b>
46.	Marián	Poppr	3	GJNerudyPH	- 3 1 1 5 0 - -	10	<b>8,74</b>
47.	Jiřina	Duspivová	2	G Kralupy	2 - 3 - - - - -	5	<b>8,17</b>
48.	Lukáš	Sadlek	3	G Čadca	3 0 3 - - - - -	6	<b>8,00</b>
49.	Minh Tri	Pham	2	NPorg	3 2 - - - - - -	5	<b>7,71</b>
50.	Martin	Hora	4	GMikul23PL	- - - 5 5 0 - -	10	<b>5,71</b>
51.	Markéta	Calábková	3	GJŠkodyPŘ	- - - - 5 - - -	5	<b>5,51</b>
52.	Dominik	Krasula	1	G Krnov	3 - - - - - - -	3	<b>5,47</b>
53.	Jakub	Marták	2	G GolNitra	0 2 1 0 - 0 - 0	3	<b>5,27</b>
54.	Jakub	Sláma	3	G OpatovPH	2 1 - - - - - -	3	<b>4,23</b>
55.	Ivona	Hrivová	4	GOkrŽilina	3 0 2 - - - - -	5	<b>3,92</b>
56.	Jiří	Zeman	4	GLesníZlín	1 3 - - - - - -	4	<b>3,25</b>
57.	Jiří	Štrincl	3	GSRandyJN	2 0 - - - 0 - -	2	<b>2,88</b>
58.	Kristýna	Ilievová	3	G Milevsko	3 - - - - - - -	3	<b>2,87</b>
59.	Adam	Gálik	4	G OlivuPopr	2 0 0 0 0 0 0 0	2	<b>2,00</b>
60.	Timotej	Šujan	2	GJarošeBO	- 0 - - - - - -	0	<b>0,00</b>

### 3. seriálová série – Teorie čísel

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.–10.	Filip	Bialas	1	GOpatovPH	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Ondrej	Bínovský	3	GAnMeTr	5 5 5	15 + <i>i</i>	<b>15,00</b>
1.–10.	František	Couf	1	GZborovPH	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Jakub	Löwit	2	GČeskoliPH	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Martin	Raszyk	4	G Karviná	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Václav	Rozhoň	3	GJirsíkaČB	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Jakub	Svoboda	4	G KomHavíř	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Radovan	Švarc	3	G ČTřebová	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Pavel	Turek	1	GTomkovaOL	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–10.	Mikuláš	Zindulka	3	GMikul23PL	5 5 5	15	<b>15,00</b>
11.	Jan	Soukup	3	G Klatovy	5 5 3	13	<b>12,02</b>
12.	Dominik	Krasula	1	G Krnov	4 5 –	9	<b>11,28</b>
13.	Jan	Jurka	3	GMLerchaBO	5 5 –	10	<b>11,16</b>
14.	Karolína	Kuchyňová	3	GMLerchaBO	5 – 5	10	<b>10,21</b>
15.	Matěj	Konečný	3	G Jírov ČB	5 – 5	10	<b>10,14</b>
16.	Jan	Šorm	2	GJarošeBO	5 – 3	8	<b>9,58</b>
17.	Jan	Václavek	2	G Ústí n O	5 – –	5	<b>7,36</b>
18.	Martin	Hora	4	GMikul23PL	5 – 5	10	<b>7,09</b>
19.–20.	Matyáš	Grof	3	GZborovPH	2 1 2	5	<b>6,40</b>
19.–20.	Vojtěch	Suchánek	3	GJarošeBO	5 – –	5	<b>6,40</b>
21.	Tomáš	Fiala	3	GLedečNSáz	5 – –	5	<b>6,02</b>
22.	Jakub	Hledík	3	GSŘMRSkuteč	4 – –	4	<b>4,79</b>
23.	Markéta	Calábková	3	GJŠkodyPŘ	– – 4	4	<b>4,37</b>
24.	Antonín	Češík	4	SPŠElek PA	5 – –	5	<b>4,15</b>
25.	Martin	Kopřiva	2	GMikul23PL	– – 2	2	<b>3,41</b>
26.	Marián	Poppr	3	GJNerudyPH	4 – –	4	<b>3,40</b>
27.	Timotej	Šujan	2	GJarošeBO	– – 1	1	<b>1,85</b>
28.	Adam	Gálik	4	GOlivuPopr	0 0 0	0	<b>0,00</b>

# 4. jarní série – Finální myšmaš

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.	<i>Pavel</i>	<i>Turek</i>	1	GTomkovaOL	5 4 5 5 5 5 2	31	<b>33,10</b>
2.	<i>Jakub</i>	<i>Löwit</i>	2	GČeskoliPH	5 4 4 4 5 5 2	29	<b>30,78</b>
3.	<i>František</i>	<i>Couf</i>	1	GZborovPH	4 2 2 5 5 5 2	25	<b>28,97</b>
4.	<i>Filip</i>	<i>Bialas</i>	1	GOpátovPH	5 2 5 1 5 2 2	22	<b>28,68</b>
5.	<i>Martin</i>	<i>Raszyk</i>	4	G Karviná	5 5 5 5 5 5 2	32	<b>28,31</b>
6.	<i>Jáchym</i>	<i>Solecký</i>	1	PORG PH	5 2 2 4 5 2 –	20	<b>27,29</b>
7.	<i>Vojtěch</i>	<i>Suchánek</i>	3	GJarošeBO	5 5 – 2 5 5 2	24	<b>26,77</b>
8.	<i>Radovan</i>	<i>Švarc</i>	3	G ČTřebová	5 5 5 3 5 5 2	30	<b>26,18</b>
9.	<i>Jakub</i>	<i>Svoboda</i>	4	G KomHavří	5 2 4 4 5 5 2	27	<b>24,40</b>
10.	<i>Vojtěch</i>	<i>Lanz</i>	0	GZborovPH	5 2 1 1 2 – 2	13	<b>23,38</b>
11.	<i>Jan</i>	<i>Soukup</i>	3	G Klatovy	5 2 2 5 5 5 2	26	<b>22,51</b>
12.	<i>Martin</i>	<i>Surma</i>	3	GJWolkraPV	5 2 2 4 2 2 2	19	<b>21,09</b>
13.	<i>Vojtěch</i>	<i>Lukeš</i>	2	G LPika PL	5 2 2 1 1 2 2	15	<b>20,68</b>
14.	<i>Antonín</i>	<i>Češík</i>	4	SPŠElek PA	5 2 5 5 5 – –	22	<b>19,75</b>
15.	<i>Katarína</i>	<i>Krajčiová</i>	3	GAlejKošic	5 2 2 2 4 2 2	19	<b>17,04</b>
16.	<i>Václav</i>	<i>Rozhoň</i>	3	GJirsikaČB	– 2 2 2 5 2 –	13	<b>16,38</b>
17.	<i>Hedvika</i>	<i>Ranošová</i>	0	GBudějovPH	– 2 2 1 – 2 –	7	<b>16,32</b>
18.	<i>Tomáš</i>	<i>Kuzma</i>	2	GAB Senec	1 4 1 2 – 2 –	10	<b>15,25</b>
19.	<i>Karolína</i>	<i>Kuchyňová</i>	3	GMLerchaBO	2 2 2 2 2 2 2	14	<b>14,53</b>
20.	<i>Dominik</i>	<i>Krasula</i>	1	G Krnov	2 – 2 2 1 2 –	9	<b>14,42</b>
21.	<i>Jan</i>	<i>Václavek</i>	2	G Ústí n O	5 2 – 1 – 1 –	9	<b>14,03</b>
22.	<i>Jan</i>	<i>Jurka</i>	3	GMLerchaBO	– 4 2 – 3 2 –	11 – i	<b>13,70</b>
23.	<i>Marián</i>	<i>Poppr</i>	3	GJNerudyPH	2 5 0 2 – 4 2	15	<b>13,20</b>
24.	<i>Jakub</i>	<i>Hledík</i>	3	GSŘMRSkuteč	– 2 2 2 – 2 2	10	<b>11,90</b>
25.	<i>Markéta</i>	<i>Horová</i>	2	GMikul23PL	– – 2 1 – 2 2	7	<b>11,43</b>
26.	<i>Jan</i>	<i>Šorm</i>	2	GJarošeBO	1 2 – 1 – 2 2	8	<b>11,00</b>
27.	<i>Lukáš</i>	<i>Kubacki</i>	1	GNadKavaPH	– 2 – 1 – 2 –	5	<b>10,89</b>
28.	<i>Daniel</i>	<i>Pišťák</i>	2	GZborovPH	2 2 – 1 2 2 –	9	<b>10,65</b>
29.	<i>Zuzana</i>	<i>Svobodová</i>	2	G FrýdlNOs	2 2 – 1 – – 2	7	<b>9,91</b>
30.–31.	<i>Matyáš</i>	<i>Grof</i>	3	GZborovPH	3 – 1 1 – 2 –	7	<b>9,50</b>
30.–31.	<i>Jiří</i>	<i>Štrncl</i>	3	GSRandyJN	3 – 2 0 – 2 –	7	<b>9,50</b>
32.	<i>Matěj</i>	<i>Konečný</i>	3	G Jírov ČB	– 2 5 – – 2 –	9	<b>9,30</b>
33.	<i>Petr</i>	<i>Jakubčík</i>	0	PORG PH	0 – – 3 – 0 –	3	<b>9,20</b>
34.	<i>Zuzana</i>	<i>Tréglová</i>	1	G Žatec	3 – – 1 – – –	4	<b>9,15</b>
35.	<i>Jakub</i>	<i>Marták</i>	2	G GolNitra	0 0 – 0 3 2 –	5	<b>8,59</b>
36.	<i>Tomáš</i>	<i>Fiala</i>	3	GLedečNSáz	– 1 – 1 – 2 2	6	<b>7,60</b>
37.	<i>Jiří</i>	<i>Zeman</i>	4	GLesníZlín	1 – 2 1 – 2 2	8	<b>6,60</b>
38.	<i>Kristýna</i>	<i>Šudomová</i>	2	GValašKlob	3 – – – 1 – –	4	<b>6,42</b>
39.	<i>Markéta</i>	<i>Calábková</i>	3	GJŠkodyPŘ	– – 0 1 2 2 –	5	<b>5,55</b>

<b>40.</b>	<i>Kateřina</i>	<i>Nová</i>	1	G Vimperk	---	2	---	2	<b>5,13</b>				
<b>41.</b>	<i>Adam</i>	<i>Gálik</i>	4	G OlivuPopr	0	0	1	0	1	1	0	3	<b>3,00</b>
<b>42.</b>	<i>Zuzana</i>	<i>Šimečková</i>	3	G CON ČesBud	---	---	---	---	2	2	<b>2,45</b>		
<b>43.</b>	<i>Ivona</i>	<i>Hrivová</i>	4	G Okr Žilina	-	1	---	---	2	3	<b>2,28</b>		
<b>44.</b>	<i>Kristýna</i>	<i>Ilievová</i>	3	G Milevsko	-	2	---	---	---	2	<b>1,91</b>		
<b>45.</b>	<i>Timotej</i>	<i>Šujan</i>	2	G JarošeBO	---	0	---	---	0	<b>0,00</b>			

# Výsledková listina jarní části semináře

1. Pavel	Turek	1	GTomkovaOL	24 23 24 33 15 15	<b>133,96</b>	264
2. František	Couf	1	GZborovPH	24 25 24 29 15 15	<b>131,85</b>	367
3. Martin	Raszyk	4	G Karviná	25 25 21 28 15 15	<b>128,81</b>	752
4. Filip	Bialas	1	G OpatovPH	24 23 22 29 15 15	<b>128,44</b>	128
5. Radovan	Švarc	3	G ČTřebová	25 25 21 26 15 15	<b>127,41</b>	831
6. Jakub	Löwit	2	GČeskolihPH	24 22 15 31 11 15	<b>117,41</b>	334
7. Jakub	Svoboda	4	G KomHavíř	25 20 16 24 15 15	<b>114,87</b>	327
8. Václav	Rozhoň	3	G JirsikaČB	25 24 18 16 15 15	<b>113,16</b>	113
9. Jan	Soukup	3	G Klatovy	19 21 14 23 15 12	<b>103,08</b>	613
10. Martin	Surma	3	GJWolkraPV	22 22 20 21 11 -	<b>95,66</b>	203
11. Vojtěch	Suchánek	3	GJarošeBO	11 22 14 27 14 6	<b>95,25</b>	95
12. Jan	Jurka	3	GMLerchaBO	23 21 12 9 15 11	<b>91,42</b>	109
13. Mikuláš	Zindulka	3	GMikul23PL	22 22 21 - 6 15	<b>87,35</b>	87
14. Karolína	Kuchyňová	3	GMLerchaBO	20 21 14 15 4 10	<b>84,07</b>	284
15. Antonín	Češík	4	SPŠElek PA	20 18 10 20 9 4	<b>81,03</b>	213
16.-17. Hedvika	Ranošová	0	GBudějovPH	23 20 21 16 - -	<b>80,62</b>	81
16.-17. Vojtěch	Lukeš	2	G LPika PL	18 16 19 21 7 -	<b>80,62</b>	81
18. Katarína	Krajčiová	3	GAlejKošic	20 18 20 17 4 -	<b>79,90</b>	411
19. Matěj	Konečný	3	G Jirov ČB	17 21 10 9 11 10	<b>78,48</b>	286
20. Jan	Šorm	2	GJarošeBO	22 21 12 11 3 10	<b>78,32</b>	273
21. Dominik	Krasula	1	G Krnov	20 17 5 14 10 11	<b>78,12</b>	264
22. Jan	Václavek	2	G Ústí n O	15 22 13 14 5 7	<b>75,86</b>	76
23. Tomáš	Kuzma	2	GAB Senec	16 19 15 15 6 -	<b>71,86</b>	72
24. Daniel	Pišťák	2	GZborovPH	17 20 12 11 8 -	<b>68,27</b>	407
25. Václav	Steinhauser	0	ZŠVranéNVl	22 21 16 - 7 -	<b>67,03</b>	164
26. Zuzana	Trégllová	1	G Žatec	23 22 11 9 - -	<b>65,83</b>	66
27. Martin	Hora	4	GMikul23PL	25 21 6 - 7 7	<b>65,69</b>	637
28. Martin	Kopřiva	2	GMikul23PL	21 19 13 - 8 3	<b>65,36</b>	84
29. Markéta	Horová	2	GMikul23PL	13 16 9 11 12 -	<b>61,84</b>	62
30. Eduard	Batmendijn	3	CGStLubovňa	20 24 18 - - -	<b>61,25</b>	86
31. Jáchym	Solecký	1	PORG PH	15 7 11 27 - -	<b>60,63</b>	61
32. Vojtěch	Lanz	0	GZborovPH	15 8 13 23 - -	<b>60,14</b>	60
33. Jakub	Hledík	3	GSŘMRSkuteč	14 13 11 12 6 5	<b>59,22</b>	161
34. Tomáš	Fiala	3	GLedečNSáz	11 17 17 8 - 6	<b>58,02</b>	135
35. Lukáš	Kubacki	1	GNadKavaPH	15 16 13 11 - -	<b>54,59</b>	55
36. Markéta	Calábková	3	GJŠkodyPŘ	15 20 6 6 - 4	<b>50,65</b>	224
37. Marian	Poljak	2	GJŠkodyPŘ	19 17 13 - - -	<b>49,27</b>	49
38. Zuzana	Šimečková	3	GCON ČesBudř	14 12 9 2 11 -	<b>49,01</b>	174
39. Zuzana	Svobodová	2	G FrýdINOs	17 12 10 10 - -	<b>48,10</b>	226
40. Petr	Jakubčík	0	PORG PH	13 8 16 9 - -	<b>46,99</b>	47

41.	Matyáš	Gróf	3	GZborovPH	- 19 11 10 - 6	<b>46,29</b>	46
42.	Jan	Krejčí	4	G Bilovec	16 18 - - 11 -	<b>45,09</b>	186
43.	Tereza	Kislingerová	1	G Klatovy	15 15 15 - - -	<b>44,95</b>	45
44.	Minh Tri	Pham	2	NPorg	16 21 8 - - -	<b>44,48</b>	117
45.	Marián	Poppr	3	GJNerudyPH	- 18 9 13 - 3	<b>43,31</b>	368
46.	Jakub	Marták	2	G GolNitra	14 7 5 9 6 -	<b>41,13</b>	41
47.	Šimon	Tabačko	2	EvG Košice	12 13 15 - - -	<b>40,24</b>	40
48.	Anh Dung	Le	4	G Tachov	25 - - - 15 -	<b>40,00</b>	983
49.	Anh	Le Hoang	2	GJarošeBO	14 13 - - 13 -	<b>39,69</b>	40
50.	Jaromír	Mielec	1	GVolgogrOS	20 12 - - 7 -	<b>38,49</b>	319
51.	Kateřina	Nová	1	G Vimperk	13 7 11 5 - -	<b>35,94</b>	36
52.	Andrea	Kučerová	2	G ČKrumlov	18 8 9 - - -	<b>35,64</b>	36
53.	Patricie	Klosse	2	G ČKrumlov	15 11 9 - - -	<b>35,51</b>	36
54.	Ivona	Hrivová	4	GOkrŽilina	15 8 4 2 4 -	<b>33,09</b>	183
55.	Jakub	Sláma	3	GOpátovPH	18 4 4 - 6 -	<b>32,37</b>	32
56.	Peter	Vook	3	GPošKošice	8 11 11 - - -	<b>30,78</b>	31
57.	Lukáš	Sadlek	3	G Čadca	11 9 8 - 3 -	<b>30,57</b>	31
58.	Jan	Kadlec	3	G Klatovy	11 - 10 - 7 -	<b>28,70</b>	375
59.	Lukáš	Černý	2	NPorg	13 15 - - - -	<b>28,05</b>	28
60.	Jiří	Zeman	4	GLesníZlín	3 15 3 7 - -	<b>27,66</b>	145
61.	Jaroslav	Stránský	2	G Tišnov	12 13 - - - -	<b>24,89</b>	25
62.	Michaela	Brabcová	2	G Jírov ČB	13 5 - - 6 -	<b>24,46</b>	24
63.	Adam	Gálik	4	G OlivuPopr	9 5 2 3 5 0	<b>24,00</b>	24
64.	Ondřej	Zeman	3	G Lovosice	17 7 - - - -	<b>23,40</b>	23
65.	Matěj	Seidl	2	PORG PH	12 9 - - 2 -	<b>23,22</b>	23
66.	Lukáš	Honsa	2	G Jírov ČB	13 9 - - - -	<b>22,77</b>	23
67.	Jiří	Štrincl	3	GSRandyJN	- 10 3 10 - -	<b>22,68</b>	23
68.	Jan	Erhart	3	GFXŠaldyLI	14 3 - - 4 -	<b>21,91</b>	216
69.	Michaela	Brezinová	2	GKomTřebiš	13 7 - - - -	<b>19,76</b>	20
70.	Libor	Drozdek	3	G Holešov	- 20 - - - -	<b>19,71</b>	42
71.	Marie	Vonzino	1	GTomkovaOL	13 7 - - - -	<b>19,43</b>	19
72.	Martin	Špilar	3	G Vyškov	18 - - - - -	<b>18,38</b>	18
73.	Zuzana	Drázdová	3	GCON ČesBud	13 - - - 5 -	<b>17,28</b>	124
74.	Přemysl	Šťastný	0	G Žamberk	8 8 - - 0 -	<b>16,68</b>	17
75.	Matěj	Coufal	1	G HavlBrod	14 3 - - 0 -	<b>16,48</b>	16
76.	Kristýna	Šudomová	2	GValašKlob	8 - - 6 2 -	<b>15,65</b>	115
77.	Ondřej	Bínovský	3	GAnMeTr	- - - - - 15	<b>15,00</b>	15
78.	Jiřina	Duspiřinová	2	G Kralupy	- 7 8 - - -	<b>14,93</b>	15
79.	Adam	Říha	2	G ČesLípa	13 - - - - -	<b>13,29</b>	13
80.	Jan	Alfery	2	GNPražačPH	13 - - - - -	<b>13,04</b>	49
81.–82.	Daniel	Backov	2	G Ružomb	12 - - - - -	<b>11,89</b>	12
81.–82.	Peter Pavel Arthur	Petráš	2	ŠpMNDaG BA	- 12 - - - - -	<b>11,89</b>	12
83.	Marek	Vícha	3	MendelG OP	12 - - - - -	<b>11,68</b>	12
84.–85.	Marek	Černý	3	G Chrudim	- 11 - - - - -	<b>11,39</b>	11
84.–85.	Marek	Štěpán	3	SPŠE Fren	- 11 - - - - -	<b>11,39</b>	11
86.	Markéta	Ospálková	1	G Uničov	11 - - - - -	<b>11,38</b>	11
87.	Robert	Keřlík	4	GOPavla PH	- 11 - - - - -	<b>11,00</b>	11
88.	Kristýna	Ilievová	3	G Milevsko	3 3 3 2 - -	<b>10,52</b>	255
89.	Timotej	Šujan	2	GJarošeBO	- 8 0 0 - 2	<b>10,02</b>	10
90.	Tomáš	Flaschka	2	G Hlučín	9 - - - - -	<b>9,48</b>	9
91.	Zuzana	Vlasáková	4	G Rumburk	- 7 - - - - -	<b>7,43</b>	151



<b>92.–94.</b> Kryštof	Kolář	2	GJarošeBO	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>92.–94.</b> Martin	Konečný	2	GStrážnice	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>92.–94.</b> Peter Kulcsár	Szabó	2	GHSelyhoKM	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>95.</b> Vojtěch	Juříček	2	G Kralupy	5	-	-	-	-	-	<b>5,13</b>	32
<b>96.</b> Václav	Krchňák	2	GJarošeBO	5	-	-	-	-	-	<b>4,96</b>	69
<b>97.</b> Michael	Bucha	3	G Zábřeh	4	-	-	-	-	-	<b>4,23</b>	4
<b>98.–99.</b> Dušan	Klíma	2	GRychnovKn	2	-	-	-	-	-	<b>1,91</b>	2
<b>98.–99.</b> Tomáš	Velich	2	GJHroncaBA	2	-	-	-	-	-	<b>1,91</b>	2
<b>100.</b> Tomáš	Valovič	4	GAHŠ VKrtiš	1	-	-	-	-	-	<b>1,00</b>	1

# Výsledková listina seriálu

1. Pavel	Turek	1	GTomkovaOL	24 23 24 33 15 15	<b>133,96</b>	264
2. František	Couf	1	GZborovPH	24 25 24 29 15 15	<b>131,85</b>	367
3. Martin	Raszyk	4	G Karviná	25 25 21 28 15 15	<b>128,81</b>	752
4. Filip	Bialas	1	G OpatovPH	24 23 22 29 15 15	<b>128,44</b>	128
5. Radovan	Švarc	3	G ČTřebová	25 25 21 26 15 15	<b>127,41</b>	831
6. Jakub	Löwit	2	GČeskolíPH	24 22 15 31 11 15	<b>117,41</b>	334
7. Jakub	Svoboda	4	G KomHavíř	25 20 16 24 15 15	<b>114,87</b>	327
8. Václav	Rozhoň	3	G JirsikaČB	25 24 18 16 15 15	<b>113,16</b>	113
9. Jan	Soukup	3	G Klatovy	19 21 14 23 15 12	<b>103,08</b>	613
10. Jan	Jurka	3	GMLerchaBO	23 21 12 14 15 11	<b>95,78</b>	114
11. Martin	Surma	3	GJWolkraPV	22 22 20 21 11 -	<b>95,66</b>	203
12. Vojtěch	Suchánek	3	GJarošeBO	11 22 14 27 14 6	<b>95,25</b>	95
13. Mikuláš	Zindulka	3	GMikul23PL	22 22 21 - 6 15	<b>87,35</b>	87
14. Karolína	Kuchyňová	3	GMLerchaBO	20 21 14 15 4 10	<b>84,07</b>	284
15. Antonín	Češík	4	SPŠElek PA	20 18 10 20 9 4	<b>81,03</b>	213
16.-17. Hedvika	Ranošová	0	GBudějovPH	23 20 21 16 - -	<b>80,62</b>	81
16.-17. Vojtěch	Lukeš	2	G LPika PL	18 16 19 21 7 -	<b>80,62</b>	81
18. Katarína	Krajčiová	3	GAlejKošic	20 18 20 17 4 -	<b>79,90</b>	411
19. Matěj	Konečný	3	G Jirov ČB	17 21 10 9 11 10	<b>78,48</b>	286
20. Jan	Šorm	2	GJarošeBO	22 21 12 11 3 10	<b>78,32</b>	273
21. Dominik	Krasula	1	G Krnov	20 17 5 14 10 11	<b>78,12</b>	264
22. Jan	Václavek	2	G Ústí n O	15 22 13 14 5 7	<b>75,86</b>	76
23. Tomáš	Kuzma	2	GAB Senec	16 19 15 15 6 -	<b>71,86</b>	72
24. Daniel	Pišťák	2	GZborovPH	17 20 12 11 8 -	<b>68,27</b>	407
25. Václav	Steinhauser	0	ZŠVranéNVl	22 21 16 - 7 -	<b>67,03</b>	164
26. Zuzana	Trégllová	1	G Žatec	23 22 11 9 - -	<b>65,83</b>	66
27. Martin	Hora	4	GMikul23PL	25 21 6 - 7 7	<b>65,69</b>	637
28. Martin	Kopřiva	2	GMikul23PL	21 19 13 - 8 3	<b>65,36</b>	84
29. Markéta	Horová	2	GMikul23PL	13 16 9 11 12 -	<b>61,84</b>	62
30. Eduard	Batmendijn	3	CGStLubovňa	20 24 18 - - -	<b>61,25</b>	86
31. Jáchym	Solecký	1	PORG PH	15 7 11 27 - -	<b>60,63</b>	61
32. Vojtěch	Lanz	0	GZborovPH	15 8 13 23 - -	<b>60,14</b>	60
33. Jakub	Hledík	3	GSŘMRSkuteč	14 13 11 12 6 5	<b>59,22</b>	161
34. Tomáš	Fiala	3	GLedečNSáz	11 17 17 8 - 6	<b>58,02</b>	135
35. Lukáš	Kubacki	1	GNadKavaPH	15 16 13 11 - -	<b>54,59</b>	55
36. Markéta	Calábková	3	GJŠkodyPŘ	15 20 6 6 - 4	<b>50,65</b>	224
37. Marian	Poljak	2	GJŠkodyPŘ	19 17 13 - - -	<b>49,27</b>	49
38. Zuzana	Šimečková	3	GCON ČesBudř	14 12 9 2 11 -	<b>49,01</b>	174
39. Zuzana	Svobodová	2	G FrýdINOs	17 12 10 10 - -	<b>48,10</b>	226
40. Petr	Jakubčík	0	PORG PH	13 8 16 9 - -	<b>46,99</b>	47

41.	Matyáš	Gróf	3	GZborovPH	- 19 11 10 - 6	<b>46,29</b>	46
42.	Jan	Krejčí	4	G Bilovec	16 18 - - 11 -	<b>45,09</b>	186
43.	Tereza	Kislingerová	1	G Klatovy	15 15 15 - - -	<b>44,95</b>	45
44.	Minh Tri	Pham	2	NPorg	16 21 8 - - -	<b>44,48</b>	117
45.	Marián	Poppr	3	GJNerudyPH	- 18 9 13 - 3	<b>43,31</b>	368
46.	Jakub	Marták	2	G GolNitra	14 7 5 9 6 -	<b>41,13</b>	41
47.	Šimon	Tabačko	2	EvG Košice	12 13 15 - - -	<b>40,24</b>	40
48.	Anh Dung	Le	4	G Tachov	25 - - - 15 -	<b>40,00</b>	983
49.	Anh	Le Hoang	2	GJarošeBO	14 13 - - 13 -	<b>39,69</b>	40
50.	Jaromír	Mielec	1	GVolgogrOS	20 12 - - 7 -	<b>38,49</b>	319
51.	Kateřina	Nová	1	G Vimperk	13 7 11 5 - -	<b>35,94</b>	36
52.	Andrea	Kučerová	2	G ČKrumlov	18 8 9 - - -	<b>35,64</b>	36
53.	Patricie	Klosse	2	G ČKrumlov	15 11 9 - - -	<b>35,51</b>	36
54.	Ivona	Hrivová	4	GOKrŽilina	15 8 4 2 4 -	<b>33,09</b>	183
55.	Jakub	Sláma	3	G OpatovPH	18 4 4 - 6 -	<b>32,37</b>	32
56.	Peter	Vook	3	G PošKošice	8 11 11 - - -	<b>30,78</b>	31
57.	Lukáš	Sadlek	3	G Čadca	11 9 8 - 3 -	<b>30,57</b>	31
58.	Jan	Kadlec	3	G Klatovy	11 - 10 - 7 -	<b>28,70</b>	375
59.	Lukáš	Černý	2	NPorg	13 15 - - - -	<b>28,05</b>	28
60.	Jiří	Zeman	4	GLesníZlín	3 15 3 7 - -	<b>27,66</b>	145
61.	Jaroslav	Stránský	2	G Tišnov	12 13 - - - -	<b>24,89</b>	25
62.	Michaela	Brabcová	2	G Jírov ČB	13 5 - - 6 -	<b>24,46</b>	24
63.	Adam	Gálik	4	G OlivuPopr	9 5 2 3 5 0	<b>24,00</b>	24
64.	Ondřej	Zeman	3	G Lovosice	17 7 - - - -	<b>23,40</b>	23
65.	Matěj	Seidl	2	PORG PH	12 9 - - 2 -	<b>23,22</b>	23
66.	Lukáš	Honsa	2	G Jírov ČB	13 9 - - - -	<b>22,77</b>	23
67.	Jiří	Štrincl	3	GSRandyJN	- 10 3 10 - -	<b>22,68</b>	23
68.	Jan	Erhart	3	GFXŠaldyLI	14 3 - - 4 -	<b>21,91</b>	216
69.	Michaela	Brezinová	2	GKomTřebiř	13 7 - - - -	<b>19,76</b>	20
70.	Libor	Drozdek	3	G Holešov	- 20 - - - -	<b>19,71</b>	42
71.	Marie	Vonzino	1	GTomkovaOL	13 7 - - - -	<b>19,43</b>	19
72.	Martin	Špilar	3	G Vyškov	18 - - - - -	<b>18,38</b>	18
73.	Zuzana	Drázdová	3	GCON ČesBud	13 - - - 5 -	<b>17,28</b>	124
74.	Přemysl	Šťastný	0	G Žamberk	8 8 - - 0 -	<b>16,68</b>	17
75.	Matěj	Coufal	1	G HavlBrod	14 3 - - 0 -	<b>16,48</b>	16
76.	Kristýna	Šudomová	2	GValašKlob	8 - - 6 2 -	<b>15,65</b>	115
77.	Ondřej	Bínovský	3	GAnMeTr	- - - - - 15	<b>15,00</b>	15
78.	Jiřina	Duspiřinová	2	G Kralupy	- 7 8 - - -	<b>14,93</b>	15
79.	Adam	Říha	2	G ČesLípa	13 - - - - -	<b>13,29</b>	13
80.	Jan	Alfery	2	GNPrazačPH	13 - - - - -	<b>13,04</b>	49
81.-82.	Daniel	Backov	2	G Ružomb	12 - - - - -	<b>11,89</b>	12
81.-82.	Peter Pavel Arthur	Petráš	2	ŠpMNDaG BA	- 12 - - - -	<b>11,89</b>	12
83.	Marek	Vícha	3	MendelG OP	12 - - - - -	<b>11,68</b>	12
84.-85.	Marek	Černý	3	G Chrudim	- 11 - - - -	<b>11,39</b>	11
84.-85.	Marek	Štěpán	3	SPŠE Fren	- 11 - - - -	<b>11,39</b>	11
86.	Markéta	Ospálková	1	G Uničov	11 - - - - -	<b>11,38</b>	11
87.	Robert	Keřlík	4	GOPavla PH	- 11 - - - -	<b>11,00</b>	11
88.	Kristýna	Ilievová	3	G Milevsko	3 3 3 2 - -	<b>10,52</b>	255
89.	Timotej	Šujan	2	GJarošeBO	- 8 0 0 - 2	<b>10,02</b>	10
90.	Tomáš	Flaschka	2	G Hlučín	9 - - - - -	<b>9,48</b>	9
91.	Zuzana	Vlasáková	4	G Rumburk	- 7 - - - -	<b>7,43</b>	151

<b>92.–94.</b> Kryštof	Kolář	2	GJarošeBO	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>92.–94.</b> Martin	Konečný	2	GStrážnice	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>92.–94.</b> Peter Kulcsár	Szabó	2	GHSelyhoKM	5	-	-	-	-	-	<b>5,27</b>	5
<b>95.</b> Vojtěch	Juříček	2	G Kralupy	5	-	-	-	-	-	<b>5,13</b>	32
<b>96.</b> Václav	Krchňák	2	GJarošeBO	5	-	-	-	-	-	<b>4,96</b>	69
<b>97.</b> Michael	Bucha	3	G Zábřeh	4	-	-	-	-	-	<b>4,23</b>	4
<b>98.–99.</b> Dušan	Klíma	2	GRychnovKn	2	-	-	-	-	-	<b>1,91</b>	2
<b>98.–99.</b> Tomáš	Velich	2	GJHroncaBA	2	-	-	-	-	-	<b>1,91</b>	2
<b>100.</b> Tomáš	Valovič	4	GAHŠ VKrtiš	1	-	-	-	-	-	<b>1,00</b>	1

## Výsledková listina 32. ročníku

1. František	Couf	1 GZborovPH	25 25 25 24 24 25 24 29 15 15 15	<b>245,41</b>	480
2. Pavel	Turek	1 GTomkovaOL	24 22 25 23 24 23 24 33 15 15 15	<b>242,63</b>	373
3. Filip	Bialas	1 GOpatoVPH	25 24 23 23 24 23 22 29 15 15 15	<b>238,54</b>	239
4. Radovan	Švarc	3 G ČTřebová	25 23 25 19 25 25 21 26 15 15 15	<b>234,60</b>	939
5. Martin	Raszyk	4 G Karviná	16 25 23 21 25 25 21 28 15 15 15	<b>227,95</b>	853
6. Jakub	Löwit	2 GČeskoliPH	23 21 20 22 24 22 15 31 14 11 15	<b>218,18</b>	438
7. Jakub	Svoboda	4 G KomHavíř	22 24 21 21 25 20 16 24 14 15 15	<b>216,56</b>	429
8. Václav	Rozhoň	3 GJirsikaČB	25 21 21 24 25 24 18 16 7 15 15	<b>210,52</b>	213
9. Jan	Soukup	3 G Klatovy	22 19 21 21 19 21 14 23 15 15 12	<b>200,51</b>	713
10. Martin	Surma	3 GJWolkraPV	23 22 23 23 22 22 20 21 - 11 -	<b>187,44</b>	294
11. Vojtěch	Suchánek	3 GJarošeBO	20 24 21 22 11 22 14 27 - 14 6	<b>181,31</b>	183
12. Jan	Jurka	3 GMLerchaBO	13 15 21 22 23 21 12 14 11 15 11	<b>178,99</b>	197
13. Mikuláš	Zindulka	3 GMikul23PL	21 21 17 24 22 22 21 - 7 6 15	<b>177,56</b>	178
14. Martin	Hora	4 GMikul23PL	25 23 25 21 25 21 6 - 15 7 7	<b>174,77</b>	740
15. Katarína	Krajčiová	3 GAlejKošic	25 21 20 21 20 18 20 17 4 4 -	<b>172,06</b>	503
16. Karolína	Kuchyňová	3 GMLerchaBO	23 18 19 21 20 21 14 15 5 4 10	<b>171,73</b>	373
17. Matěj	Konečný	3 G Jirov ČB	14 16 20 21 17 21 10 9 15 11 10	<b>165,31</b>	373
18. Antonín	Češík	4 SPŠElek PA	20 20 19 20 20 18 10 20 4 9 4	<b>164,61</b>	297
19. Eduard	Batmendijn	3 CGStLubovňa	25 18 21 22 20 24 18 - 15 - -	<b>162,72</b>	188
20. Jan	Šorm	2 GJarošeBO	17 21 19 17 22 21 12 11 10 3 10	<b>161,88</b>	357
21. Václav	Steinhauser	0 ZŠVranéNVl	23 23 19 21 22 21 16 - 9 7 -	<b>161,68</b>	259
22. Martin	Kopřiva	2 GMikul23PL	21 19 17 20 21 19 13 - 10 8 3	<b>153,16</b>	172
23. Markéta	Horová	2 GMikul23PL	22 22 14 22 13 16 9 11 10 12 -	<b>150,11</b>	150
24. Dominik	Krasula	1 G Krnov	15 14 13 20 20 17 5 14 4 10 11	<b>144,95</b>	333
25. Vojtěch	Lukeš	2 G LPika PL	13 14 19 16 18 16 19 21 - 7 -	<b>142,26</b>	142
26. Daniel	Pišťák	2 GZborovPH	8 17 19 19 17 20 12 11 4 8 -	<b>135,64</b>	473
27. Vojtěch	Lanz	0 GZborovPH	19 17 15 16 15 8 13 23 - - -	<b>128,33</b>	128
28. Tomáš	Kuzma	2 GAB Senec	13 18 7 14 16 19 15 15 - 6 -	<b>123,44</b>	123
29. Marian	Poljak	2 GJŠkodyPŘ	17 22 18 18 19 17 13 - - -	<b>123,23</b>	123
30. Anh Dung	Le	4 G Tachov	22 22 14 8 25 - - - 15 15 -	<b>121,45</b>	100
31. Jan	Václavek	2 G Ústí n O	13 17 11 - 15 22 13 14 3 5 7	<b>119,95</b>	120
32. Jan	Krejčí	4 G Bílovec	21 10 17 20 16 18 - - 7 11 -	<b>119,94</b>	263
33. Lukáš	Sadlek	3 G Čadca	18 20 21 15 11 9 8 - 10 3 -	<b>115,75</b>	116
34.-35. Minh Tri	Pham	2 NPorg	17 16 15 21 16 21 8 - - -	<b>112,69</b>	180
34.-35. Zuzana	Svobodová	2 G FrýdlNOs	18 18 17 10 17 12 10 10 2 - -	<b>112,69</b>	293
36. Marián	Poppr	3 GJNerudyPH	14 23 16 12 - 18 9 13 5 - 3	<b>112,27</b>	437
37. Petr	Jakubčík	0 PORG PH	18 16 12 18 13 8 16 9 0 - -	<b>111,53</b>	111
38. Tomáš	Fiala	3 GLedecNSáz	19 13 12 7 11 17 17 8 1 - 6	<b>110,51</b>	188
39. Markéta	Čalábková	3 GJŠkodyPŘ	12 7 16 16 15 20 6 6 6 - 4	<b>106,15</b>	279
40. Tereza	Kislingerová	1 G Klatovy	18 22 19 0 15 15 15 - - -	<b>103,60</b>	104

41. Jakub	Hledík	3 GSŘMRskuteč	17	4	9	11	14	13	11	12	1	6	5	<b>101,56</b>	204
42. Kateřina	Nová	1 G Vimperk	19	14	10	15	13	7	11	5	3	-	-	<b>96,43</b>	96
43. Jaromír	Mielec	1 G VolgogrOS	6	17	16	17	20	12	-	-	2	7	-	<b>95,44</b>	376
44. Anh	Le Hoang	2 G JarošeBO	11	20	13	-	14	13	-	-	8	13	-	<b>91,96</b>	92
45. Jakub	Sláma	3 G OpatovPH	12	14	14	15	18	4	4	-	1	6	-	<b>90,64</b>	91
46. Jan	Kadlec	3 G Klatovy	18	9	15	13	11	-	10	-	4	7	-	<b>88,17</b>	434
47. Marko	Puza	4 G PošKošice	23	20	17	21	-	-	-	-	7	-	-	<b>87,94</b>	502
48. Miroslav	Stankovič	4 G PošKošice	22	25	18	15	-	-	-	-	8	-	-	<b>87,58</b>	538
49. Martin	Špilar	3 G Vyškov	22	17	14	14	18	-	-	-	-	-	-	<b>86,76</b>	87
50. Miroslav	Psota	4 G HlinŽilina	21	20	20	22	-	-	-	-	3	-	-	<b>86,50</b>	280
51. Lukáš	Kubacki	1 G NadKavaPH	11	7	8	0	15	16	13	11	3	-	-	<b>83,75</b>	84
52. Hedvika	Ranošová	0 G BudějovPH	-	-	-	-	23	20	21	16	-	-	-	<b>80,62</b>	81
53. Zuzana	Trégllová	1 G Žatec	11	-	-	-	23	22	11	9	-	-	-	<b>77,21</b>	77
54. Andrea	Kučerová	2 G ČKrumlov	19	17	5	-	18	8	9	-	-	-	-	<b>77,18</b>	77
55. Michaela	Brabcová	2 G Jirov ČB	16	14	12	11	13	5	-	-	-	6	-	<b>77,12</b>	77
56. Patricie	Klosse	2 G ČKrumlov	16	17	5	-	15	11	9	-	-	-	-	<b>73,68</b>	74
57. Minh Thao	Nguyen	2 G BenešeKL	17	22	19	13	-	-	-	-	3	-	-	<b>73,48</b>	73
58. Jáchym	Solecký	1 PORG PH	13	0	-	-	15	7	11	27	-	-	-	<b>73,27</b>	73
59. Jakub	Dargaj	4 G PošKošice	19	17	12	22	-	-	-	-	3	-	-	<b>73,12</b>	459
60. Jakub	Marták	2 G GolNitra	12	4	5	11	14	7	5	9	0	6	-	<b>72,66</b>	73
61. Miroslav	Krabec	4 G KomHavíř	16	17	17	17	-	-	-	-	-	-	-	<b>67,58</b>	256
62. Ondřej	Darmovzal	3 G JarošeBO	23	21	23	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>67,42</b>	67
63. Jiří	Zeman	4 G LesníZlín	-	18	12	5	3	15	3	7	-	-	-	<b>62,63</b>	180
64. Anna	Steinhausarová	4 G Dačice	21	17	10	12	-	-	-	-	3	-	-	<b>62,05</b>	554
65. Vít	Kalisz	2 FSG Pirna	12	17	13	14	-	-	-	-	-	-	-	<b>56,13</b>	56
66. Jiřina	Duspivová	2 G Kralupy	11	17	5	7	-	7	8	-	-	-	-	<b>54,58</b>	55
67. Marie	Vonzino	1 G TomkovaOL	16	3	7	8	13	7	-	-	-	-	-	<b>53,26</b>	53
68. Daniela	Šindelářová	2 GaSOŠ Telč	21	13	8	9	-	-	-	-	-	-	-	<b>51,49</b>	51
69. Lukáš	Honsa	2 G Jirov ČB	9	8	11	-	13	9	-	-	-	-	-	<b>51,14</b>	51
70. Jaroslav	Štránský	2 G Tišnov	11	5	8	-	12	13	-	-	-	-	-	<b>49,05</b>	49
71. Zuzana	Šimečková	3 G CON ČesBud	-	-	-	-	14	12	9	2	-	11	-	<b>49,01</b>	174
72. Michaela	Brezinová	2 G KomTřebiš	12	16	-	-	13	7	-	-	-	-	-	<b>47,65</b>	48
73. Přemysl	Štátný	0 G Žamberk	14	6	-	10	8	8	-	-	-	0	-	<b>47,31</b>	47
74. Šimon	Tabačko	2 EvG Košice	-	7	-	-	12	13	15	-	-	-	-	<b>47,00</b>	47
75. Michael	Bucha	3 G Zábřeh	10	11	16	4	4	-	-	-	-	-	-	<b>46,51</b>	47
76. Matyáš	Grof	3 G ZborovPH	-	-	-	-	-	19	11	10	-	-	6	<b>46,29</b>	46
77. Daniel	Backov	2 G Ružomb	16	0	5	13	12	-	-	-	-	-	-	<b>46,16</b>	46
78. Adam	Gálik	4 G OlivuPopr	7	1	6	7	9	5	2	3	0	5	0	<b>45,00</b>	45
79. Petr	Lukeš	4 G NeumannŽR	10	17	12	-	-	-	-	-	5	-	-	<b>44,45</b>	208
80. Kristýna	Šmidová	4 G MensaPH	18	19	4	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>41,68</b>	136
81. Kristýna	Šudomová	2 G ValašKlob	14	3	3	5	8	-	-	6	0	2	-	<b>41,43</b>	140
82. Jan	Alfery	2 GN PražáčPH	9	-	18	-	13	-	-	-	-	-	-	<b>40,67</b>	77
83. Ivona	Hrivová	4 G OkrŽilina	7	-	-	-	15	8	4	2	-	4	-	<b>40,47</b>	190
84. Peter	Vook	3 G PošKošice	9	-	-	-	8	11	11	-	-	-	-	<b>39,95</b>	40
85. Jiří	Štrincl	3 GSRandyJN	11	0	6	-	-	10	3	10	-	-	-	<b>39,60</b>	40
86. Jakub	Šebek	4 G KepleraPH	21	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>38,87</b>	98
87.-88. Markéta	Ospálková	1 G Uničov	15	3	7	3	11	-	-	-	0	-	-	<b>38,40</b>	38
87.-88. Marek	Vícha	3 MendelG OP	11	12	3	-	12	-	-	-	-	-	-	<b>38,40</b>	38
89. Zuzana	Vlasáková	4 G Rumburk	4	12	9	5	-	7	-	-	-	-	-	<b>37,67</b>	187
90. Adam	Říha	2 G ČesLípa	12	7	5	-	13	-	-	-	-	-	-	<b>37,21</b>	37
91. Jiří	Česka	1 CMGProstěj	19	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>35,35</b>	35

92.	Kristýna	Ilievová	3 G Milevsko	6	13	3	3	3	3	3	2	-	-	-	-	-	<b>34,74</b>	279
93.	Štefan	Račák	2 GTajBanBys	18	4	7	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>33,45</b>	33
94.	Anežka	Michálková	2 GaSOŠ Telč	19	-	7	5	-	-	-	-	2	-	-	-	-	<b>32,47</b>	32
95.	Mihály	Kotiers	2 GHSelyhoKM	13	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>32,37</b>	32
96.	Jan	Erhart	3 GFXSaldyLI	9	-	-	-	14	3	-	-	-	-	4	-	-	<b>31,36</b>	223
97.	Tomáš	Flaschka	2 G Hlučín	12	5	4	-	9	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>30,29</b>	30
98.	Lenka	Kopfová	0 CZŠSL HnM	16	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>29,10</b>	29
99.	Peter Kulcsár	Szabó	2 GHSelyhoKM	9	14	-	0	5	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>28,80</b>	29
100.	Viktor	Němeček	3 GJMasar JI	19	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>28,11</b>	338
101.	Lukáš	Černý	2 NPorg	-	-	-	-	-	13	15	-	-	-	-	-	-	<b>28,05</b>	28
102.	Barbora	Hudcová	4 PORG PH	10	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>27,31</b>	92
103.	Lucie	Roškotová	2 G Turnov	9	7	-	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>26,96</b>	27
104.	Ondrej	Bínovský	3 GAnMeTr	-	-	-	-	-	-	-	-	11	-	15	-	-	<b>26,46</b>	26
105.	Kryštof	Kolář	2 GJarošeBO	5	-	5	9	5	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>25,29</b>	25
106.	Ondřej	Zeman	3 G Lovosice	-	-	-	-	17	7	-	-	-	-	-	-	-	<b>23,40</b>	23
107.	David	Ucháč	1 VOŠDoprPH	14	3	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>23,27</b>	23
108.	Matěj	Seidl	2 PORG PH	-	-	-	-	12	9	-	-	-	2	-	-	-	<b>23,22</b>	23
109.	Henrieta	Michelová	2 GAllejKošic	11	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>22,94</b>	163
110.	Tereza	Koberová	3 G Chrudim	9	8	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>22,70</b>	23
111.	Emese	Szabó	3 GZKMJ Gal	13	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>21,93</b>	22
112.	Martin	Konečný	2 GStrážnice	13	4	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>21,92</b>	22
113.	Marek	Štěpán	3 SPŠE Fren	10	-	-	-	-	11	-	-	-	-	-	-	-	<b>21,69</b>	22
114.	Michaela	Bieliková	4 G Sereď	11	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>20,58</b>	163
115.	David	Peňáz	2 GNeumannŽR	12	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>20,06</b>	20
116.	Victoria María	Nájares Romero	0 GZborovPH	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>19,76</b>	20
117.	Libor	Drozdek	3 G Holešov	-	-	-	-	-	20	-	-	-	-	-	-	-	<b>19,71</b>	42
118.	Tomáš	Velich	2 GJHroncaBA	12	2	0	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>19,36</b>	19
119.	Vojtěch	Linhart	3 SlovanG OL	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>18,15</b>	18
120.	Martin	Minasjan	4 GKepleraPH	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>17,82</b>	133
121.	Jana	Vráblíková	2 GLesníZlín	14	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>17,70</b>	18
122.	Veronika	Holubová	3 PORG PH	8	3	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>17,67</b>	18
123.	Zuzana	Drázdová	3 GCON ČesBud	-	-	-	-	13	-	-	-	-	5	-	-	-	<b>17,28</b>	124
124.	Vojtěch	Juříček	2 G Kralupy	12	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>16,83</b>	44
125.	Matěj	Coufal	1 G HavlBrod	-	-	-	-	14	3	-	-	-	0	-	-	-	<b>16,48</b>	16
126.	Ludmila	Šimková	4 GPáronitra	5	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15,47</b>	78
127.	Tereza	Rašková	3 GTomkovaOL	15	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15,43</b>	15
128.	Otto	Hollmann	4 GUBalvanJN	7	6	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15,00</b>	15
129.	Pavel	Souček	2 G Nymburk	-	9	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,75</b>	15
130.–131.	Radim	Bárta	3 GJarošeBO	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,47</b>	14
130.–131.	Jan	Knížek	3 G Strakon	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,47</b>	14
	132.	Tran Vi Thanh	Pham	4 GNeumannŽR	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,08</b>	150
133.–136.	Petr	Červenka	2 GNadKavaPH	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,05</b>	14
133.–136.	Jozef	Mišt	2 GAHŠ VKrtíš	14	0	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	<b>14,05</b>	14
133.–136.	Jakub	Starý	2 VOŠKutHora	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,05</b>	14
133.–136.	Jakub	Ševčík	2 GKukučPopr	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14,05</b>	14
137.	Nicholas	Čapek	4 GBNěmcovHK	11	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>13,78</b>	129
138.	Barbora	Pešlová	3 G Vimperk	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>13,41</b>	133
139.–141.	Matyáš	Medek	4 GMozartovaPA	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>13,00</b>	13
139.–141.	Jakub	Schinko	2 GNadKavaPH	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>13,00</b>	13
139.–141.	Lukáš	Zib	2 GPísnickPH	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>13,00</b>	13
142.	Jakub Josef	Slavík	1 BiskG Brno	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>12,64</b>	13

143.	Martin	Šourek	3 G	CoubTábor	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12,45	12
144.–146.	Jakub	Hrubý	2 G	Chrudim	12	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,89	12
144.–146.	Martin	Kutiš	2 G	Humpolec	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,89	12
144.–146.	Peter Pavel Arthur	Petráš	2 ŠpMNDaG BA		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,89	12
147.	Adéla	Šedová	2 G	JungmanLT	8	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,82	12
148.	Pavína	Hartmanová	2 G	Broumov	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,76	30
149.	Borek	Požár	0 G	Rakovník	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,66	12
150.–152.	Tomáš	Beneš	2 G	VráLevice	9	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,39	11
150.–152.	Martin	Chabada	2 G	Bardejov	9	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,39	11
150.–152.	Marek	Černý	3 G	Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,39	11
153.	Michaela	Biová	3	MendelG OP	7	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,02	11
154.–155.	Robert	Keřlík	4	GOPavla PH	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,00	11
154.–155.	Tomáš	Valovič	4	GAHŠ VKrtiš	8	2	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11,00	11
156.–157.	Petra	Kratochvílová	2	GHustopeče	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,72	11
156.–157.	Daniel	Krejbych	2 G	Litomyšl	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,72	11
158.	Cedrik	Horčička	3 G	ČesLípa	9	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,64	11
159.–160.	Jiří	Čech	3 G	Strakon	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,30	10
159.–160.	Vít	Fojtík	3	ÚstavníPH	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,30	10
161.	Katarína	Behinská	2 G	GolNitra	8	0	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,08	10
162.	Timotej	Šujan	2 G	JarošeBO	-	-	-	-	8	0	0	-	-	-	2	-	-	-	-	-	10,02	10
163.–166.	Dominik	Hodan	1	GNadAlejPH	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,00	10
163.–166.	Věra	Tesařová	1	MasG Plzeň	10	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,00	10
163.–166.	The Minh	Tran	1	PČGKarVary	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,00	10
163.–166.	Kateřina	Volková	1	MG Vsetín	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10,00	10
167.–169.	Denisa	Kolenčíková	3	GNámostovo	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9,17	9
167.–169.	Jan	Krůza	3	GVPavlovic	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9,17	9
167.–169.	Tomáš	Vaniček	3 G	Jirov ČB	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9,17	9
170.	Daniel	Kočík	4	GŠroKošice	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9,00	9
171.	Hana	Daňková	1	G Vimperk	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,48	8
172.	Jan	Lukáč	3 G	ČKrumlov	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,46	8
173.	Lenka	Vincenová	0	GTomkovaOL	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,34	8
174.–175.	Matěj	Kosma	2	SOŠDoprOS	8	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,17	8
174.–175.	Dennis	Ryšánek	2	SPŠÚžlabPH	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,17	8
176.–178.	Antonie	Brožová	4		8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,00	8
176.–178.	Jakub	Kříž	4	SPŠ PB	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,00	8
176.–178.	Matěj	Sháněl	4	G VysMýto	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,00	8
179.	Vendula	Kotyzová	4	WichtG OS	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,76	11:
180.	Marie	Koutná	4	GTNovákBO	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,00	7
181.–184.	Levente	Berky	3	GZKMJ Gal	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,79	7
181.–184.	Kristýna	Davídková	1	OA Liberec	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,79	7
181.–184.	Anna	Filipová	3	G Kolín	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,79	7
181.–184.	Jana	Menšíková	1	G Frýdlant	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,79	7
185.–186.	Alena	Košáková	2	G Strakon	7	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,76	7
185.–186.	Ronald	Luc	2	GJarošeBO	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,76	7
187.	Tomáš	Konečný	1	GJirsikaČB	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,75	14:
188.–190.	Stanislav	Kruml	3	G Chotěboř	6	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,53	6
188.–190.	Barbora	Kubicová	3	PORG PH	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,53	6
188.–190.	Vít	Maroščík	3	G Bohumín	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,53	6
191.	Valentína	Straková	4	G Sered'	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,36	68
192.–194.	Matej	Kašťák	2	G Hlohovec	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,27	5
192.–194.	Marina	Pogarčenko	2	GJungmanLT	5	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,27	5



<b>192.–194.</b> Tomáš	Šácha	2 SPŠEB Břeclav	– 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>5,27</b>	5
<b>195.–196.</b> Irena	Bačinská	4 ŠpMNDaG BA	0 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>5,00</b>	5
<b>195.–196.</b> Jaromír	Kuchyňka	4 GStrážnice	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>5,00</b>	5
197. Václav	Krchňák	2 GJarošeBO	0	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>4,96</b>	69
198. Karel	Vlachovský	2 MasG Plzeň	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>4,90</b>	82
<b>199.–200.</b> Petr	Ĝintar	3 MendelG OP	4 0 0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>4,23</b>	4
<b>199.–200.</b> Silvia	Nepšinská	3 GJChalBR	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>4,23</b>	4
201. Ondřej	Broža	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>4,00</b>	4
202. Jaroslav	Cerman	2 GJilemnice	4 0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>3,65</b>	4
<b>203.–204.</b> Ondřej	Havlík	3 MSOŠ Klob	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>2,88</b>	3
<b>203.–204.</b> Rostislav	Lukosz	3 G Bohumín	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>2,88</b>	3
205. Jana	Lepšová	4 G Dobruška	– 3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>2,58</b>	79
206. Marcela	Fialová	4 SOŠ Kolín	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>2,00</b>	2
207. Dušan	Klíma	2 GRychnovKn	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>1,91</b>	2
208. Kateřina	Fuková	1 GOhradníPH	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>0,00</b>	0

adresa: Korespondenční seminář  
 KAM MFF UK  
 Malostranské náměstí 25  
 118 00 Praha 1  
 web: <http://mks.mff.cuni.cz/>  
 e-mail: [mks@mff.cuni.cz](mailto:mks@mff.cuni.cz)