Iracionální čísla

2. jarní série — Termín odeslání: 10. března 2014

Pokud prohlašujete, že je nějaké číslo iracionální, své tvrzení zdůvodněte. Výjimkou jsou čísla, jejichž iracionalita je zmíněna v úvodním textu.

Úloha 1. (3 body)
Do každého políčka tabulky 2×3 napište iracionální číslo tak, aby součet v každém řádku i sloupci byl racionální.

Úloha 2. (3 body)
Rozhodněte, zda existují tři iracionální čísla taková, že součet každých dvou z nich je racionální, a své tvrzení dokažte.

Úloha 3. (3 body)
Šavlík si nějakou dobu hrál s kladnými čísly a pak tvrdil, že se mu podařilo najít takové číslo x, že pro každé přirozené číslo n dávalo číslo[1] $\lfloor x \cdot 10^n \rfloor$ po dělení 10 stejný zbytek jako n. Je možné, že Šavlíkovo číslo bylo iracionální?

Úloha 4. (5 bodů)
E.T. má konečnou množinu reálných čísel takovou, že součet všech jejích prvků je racionální. Dokažte, že počet jejích neprázdných podmnožin, které mají iracionální součet všech prvků, je sudý.

Úloha 5. (5 bodů)
David dostal k narozeninám dvě kladná reálná čísla a, b, jejichž součin je 100 a jejichž součet je celé číslo, které dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Dokažte, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ musí být iracionální.

Úloha 6. (5 bodů)
Pepa se jednou nudil a řekl si, že napíše iracionální číslo, za jehož desetinnou čárkou budou pouze nuly, jedničky a dvojky. Kopii hotového čísla dal Olinovi a Filipovi. Olin všechny svoje nuly přepsal na jedničky, Filip všechny jedničky své kopie změnil na dvojky. Mohlo se stát, že Olin i Filip měli po přepsání racionální čísla?

Úloha 7. (5 bodů)
Mějme tři kladná iracionální čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 1$. Je-li některé z těchto tří čísel větší než $\frac{1}{2}$, každé z nich vynásobíme dvěma a následně největší číslo o jedna zmenšíme. Takto pokračujeme, dokud nejsou všechna tři čísla menší než $\frac{1}{2}$. Může se nám při nějaké volbě a, b, c stát, že nikdy neskončíme a budeme pokračovat do nekonečna?

Úloha 8. (5 bodů)
Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro každé iracionální číslo i je $P(i)$ také iracionální.

[1] Číslo $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.

Povídání ke druhé jarní sérii

Tématem druhé jarní série jsou iracionální čísla. Většina z vás je už určitě zná ze školy, jistě však nebude na škodu si o nich něco připomenout. V běžném životě často pracujeme s čísly přirozenými a celými. K tomu, abychom mohli bez problémů dělit, byla zavedena čísla racionální. To jsou všechna čísla, která se dají napsat ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde a je celé a b přirozené. Jsou-li navíc a a b nesoudělná, je tento zápis jednoznačný a říkáme, že zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru.

Všechna racionální čísla se v desítkové soustavě (ale i v jiných soustavách) dají vyjádřit pomocí desetinného zápisu, který je buď ukončený (tj. za desetinnou čárkou je pouze konečně mnoho číslic), nebo periodický (tj. od určitého místa za desetinnou čárkou se opakuje stále stejná konečná posloupnost číslic). Periodu obvykle značíme „nadčarou“. Uvedeme několik příkladů racionálních čísel: $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{41}{80} = 0{,}5125$, $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ $\frac{116}{495} = 0{,}2\overline{34}$. Není těžké si rozmyslet, že součet, rozdíl, součin i podíl dvou racionálních čísel je opět racionální (u podílu musíme předpokládat, že dělitel není roven nule).

Na kladná racionální čísla můžeme pohlížet jako na délky úseček – udávají vzdálenost dvou bodů. Přirozeně vyvstává otázka, zdali existují i vzdálenosti, které se nedají zapsat jako podíl dvou celých čísel. Odpověď znali už staří Řekové, kteří uměli dokázat, že takové vzdálenosti opravdu existují. Příkladem je délka úhlopříčky ve čtverci o straně 1, jak uvidíme později. Tato čísla – spolu s čísly k nim opačnými – nazýváme iracionální.

Racionální čísla spolu s iracionálními tvoří čísla reálná. Iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel, což je ekvivalentní tomu, že mají neukončený neperiodický desetinný rozvoj. Řadí se mezi ně slavná čísla jako π, udávající poměr obvodu a průměru kružnice, nebo Eulerovo číslo e. Kromě těchto čísel, o kterých je relativně obtížné dokázat, že opravdu jsou iracionální, existují i taková, o kterých to jde dokázat relativně snadno.

Tvrzení. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální. Existují tedy dvě celá čísla p, q taková, že $\sqrt{2} = p/q$. Po umocnění na druhou a následném vynásobení q^2 dostaneme, že musí platit $2q^2 = p^2$. Jelikož p, q jsou celá čísla, musí být v prvočíselných rozkladech p^2, q^2 dvojka v sudé mocnině. To ale znamená, že na levé straně poslední rovnice je dvojka v liché mocnině, zatímco na pravé straně v sudé. Tato rovnost tedy nemůže platit pro žádná celá p, q, a proto je $\sqrt{2}$ iracionální.

Výše uvedený důkaz lze zobecnit. Zjistíme tak, že pokud přirozené číslo není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, pak už je jeho odmocnina nutně iracionální. Podobně lze důkaz upravit i pro vyšší odmocniny.

Přestože je obecně velmi těžké dokázat iracionalitu nějakého čísla, ukazuje se, že v jistém smyslu je iracionálních čísel mnohem více než racionálních.[2] Není těžké si rozmyslet a dokázat, že součet či součin nenulového racionálního čísla s iracionálním je vždy iracionální. Tento fakt

[2] Jak porovnat velikosti nekonečných množin? Toto téma je zajímavé, leč velmi rozsáhlé a nesouvisející s touto sérií. Zvídavý čtenář se o něm může dozvědět v knihovně na našich internetových stránkách: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf*

můžete ve svých řešeních bez důkazu používat. O součtu či součinu dvou iracionálních čísel však nelze obecně nic říct (např. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionální, ale $\sqrt{2}+(10-\sqrt{2})$ je racionální).

Na závěr si ukážeme ještě jeden příklad, jak dokázat, že je nějaké číslo iracionální.

Úloha. Dokažte, že číslo 0,1234567891011 ..., ve kterém za desetinnou čárku postupně píšeme všechna přirozená čísla, je iracionální.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že toto číslo je racionální. Jeho desetinný rozvoj zjevně není ukončený, proto musí být periodický. Nechť má tedy periodu délky n a předperiodu délky m. Za desetinnou čárkou však umíme najít posloupnost alespoň $m+n$ nul za sebou (například v čísle 10^{m+n}). Z těchto nul je nejvýše m v předperiodě a alespoň n za ní, takže perioda musí být složena ze samých nul. Podobně ale umíme najít i posloupnost $m+n$ jedniček, dvojek, ... , čímž dostáváme spor. Původní předpoklad tedy neplatí a číslo 0,1234567891011 ... je skutečně iracionální.

Nyní už víte vše, co potřebujete, tak směle do řešení další série!

Iracionální čísla

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1. (74; 72; 2,92; 3,0)

Do každého políčka tabulky 2×3 napište iracionální číslo tak, aby součet v každém řádku i sloupci byl racionální. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Jak zvolit iracionální čísla tak, aby jejich součet byl racionální? Nabízí se hledat nulové součty a do sloupců umístit opačná čísla. Jedním z vyhovujících příkladů je následující tabulka:

$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

Víme, že násobíme-li iracionální číslo racionálním, výsledek bude iracionální. Proto $-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ i $-2\sqrt{2}$ jsou iracionální čísla. Součty v řádcích i sloupcích jsou nulové a do všech políček jsme umístili iracionální čísla, úloha je tedy vyřešena.

Poznámky:

Správně vyplněnou tabulku poslali téměř všichni řešitelé. Někteří nepřipsali ani slovo, naštěstí převládala více či méně podrobně okomentovaná řešení. Mnoho řešitelů si trochu přidělávalo práci, když k iracionálnímu číslu přičítali ještě nějaké přirozené, aby dostali nenulový součet. Jako by se snad báli nuly! Raději proto připomenu, že i nula je racionální číslo, vždyť ačkoli nelze dělit nulou, nulu můžeme podělit jakýmkoli jiným číslem. *(Bára Kociánová)*

Úloha 2. (65; 47; 2,22; 3,0)

Rozhodněte, zda existují tři iracionální čísla taková, že součet každých dvou z nich je racionální, a své tvrzení dokažte. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Předpokládejme, že nějaká taková tři iracionální čísla existují, říkejme jim a, b, c. Čísla $a+b$, $b+c$, $a+c$ jsou z předpokladu racionální, tedy i jejich součet $2(a+b+c)$ je racionální číslo.

Na druhou stranu, součet racionálního čísla $a+b$ s iracionálním číslem c je číslo iracionální. Součin racionálního čísla 2 s iracionálním číslem $a+b+c$ je rovněž iracionální. A to je spor, neboť číslo $2(a+b+c)$ nemůže být zároveň racionální a iracionální.

Žádná tři taková čísla tudíž neexistují.

Poznámky:

Většina z vás si s úlohou hravě poradila. Ovšem našli se i tací, kteří se v úloze zamotali – nejčastěji při pokusu rozložit číslo na „racionální“ a „iracionální“ složku. Každé iracionální číslo

samozřejmě lze napsat jako součet racionálního a iracionálního – například

$$\begin{aligned}\frac{2}{7}+\sqrt[3]{5} &= 0+\left(\sqrt[3]{5}+\frac{2}{7}\right)\\ &= \frac{3}{7}+\left(\sqrt[3]{5}-\frac{1}{7}\right)\\ &= -\frac{5}{7}+\left(\sqrt[3]{5}+1\right)\\ &= \cdots\end{aligned}$$

Takový zápis však není jednoznačný, což byl kámen úrazu ve všech řešeních, jež se touto cestou pustila. *(Alča Skálová)*

Úloha 3.

(56; 48; 2,57; 3,0)

Šavlík si nějakou dobu hrál s kladnými čísly a pak tvrdil, že se mu podařilo najít takové číslo x, že pro každé přirozené číslo n dávalo číslo[3] $\lfloor x \cdot 10^n \rfloor$ po dělení 10 stejný zbytek jako n. Je možné, že Šavlíkovo číslo bylo iracionální? *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:

Buď $x = \overline{a{,}a_1a_2a_3\ldots}$, kde $\overline{a_1a_2\ldots}$ je desetinný rozvoj čísla x. Podmínka ze zadání říká, že $a_i \equiv i \pmod{10}$. Pro libovolné i tak platí

$$a_i \equiv i \equiv i+10 \equiv a_{i+10} \pmod{10}.$$

Jelikož jsou a_i a a_{i+10} cifry, musejí se rovnat. Proto je rozvoj čísla x periodický s periodou 10, a číslo x tak nemůže být iracionální.

Poznámky:

Tato úloha byla celkem jednoduchá, šlo hlavně o to uvědomit si, co vlastně říká na první pohled trochu nehezky vypadající podmínka v zadání. To většina řešitelů dříve či později udělala a zasloužila si plný počet bodů. Většina ukázala racionalitu tím, že přesně určila desetinný rozvoj, který by mohl být $,\overline{1234567890}$. To ovšem platí, pouze pokud x je kladné, což bylo naštěstí uvedeno v zadání. Můžete si rozmyslet, jak by rozvoj vypadal pro záporná x. Body jsem strhával hlavně za to, že jste nedostatečně zdůvodnili, proč musí desetinný rozvoj vypadat přesně takhle. Vždycky je lepší své řešení o jednu větu prodloužit a vše pečlivě zdůvodnit než zbytečně přicházet o body. Bohužel se našli i takoví, kteří správně našli desetinný rozvoj čísla x, poté však tvrdili, že toto číslo je iracionální. Těm bych doporučil, aby si znova pečlivě přečetli úvodní text k sérii. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

(40; 35; 4,15; 5,0)

E.T. má konečnou množinu reálných čísel takovou, že součet všech jejích prvků je racionální. Dokažte, že počet jejích neprázdných podmnožin, které mají iracionální součet všech prvků, je sudý. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Nejprve si ukažme, že součet racionálního čísla s iracionálním je iracionální. Postupujme sporem a předpokládejme, že $a, c \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $a+b=c$. Pak ale $b = c-a$, kde na levé straně je iracionální číslo a na pravé rozdíl dvou racionálních čísel, který je racionální. A to je spor, kterého jsme chtěli dosáhnout.

[3] Číslo $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.

Nyní si označme E.T.-ho množinu M a uvědomme si, že nás zajímají jen neprázdné podmnožiny (dle zadání), které se navíc nerovnají množině M (protože ta má racionální součet prvků). V dalším textu pak budeme tyto podmnožiny označovat pojmem *zajímavá podmnožina*.[4]

Nyní uvažme libovolnou zajímavou podmnožinu množiny M s iracionálním součtem prvků a označme ji A. Pak s přihlédnutím k prvnímu odstavci a faktu, že součet všech prvků v M je racionální, musí být součet prvků v množině[5] $M \setminus A$ iracionální. Dále víme, že doplňkem zajímavé podmnožiny je opět zajímavá podmnožina. Navíc platí $M \setminus (M \setminus A) = A$ a $A \neq M \setminus A$, takže můžeme všechny zajímavé podmnožiny s iracionálním součtem prvků popárovat tak, že každé přiřadíme její doplněk, a proto je jich sudý počet.

Poznámky:
Toto řešení je zapsáno velmi podrobně. Například poznámku o tom, že „doplněk doplňku je původní podmnožina“, není potřeba v řešeních uvádět, protože párování „doplňků“ je známé, a není třeba dokazovat, že to opravdu je párování. Pokud ale obecně někdy párujete, je dobré ověřit si, že žádnému prvku nedáte do dvojice ten samý prvek, nebo pokud jednomu přiřadíte druhý, tak že druhému přiřadíte zase ten první.

Úlohu jsem ale opravoval mírně, takže si většina řešení vysloužila plné bodové ohodnocení. Body jsem nejčastěji strhával za chybné tvrzení, že iracionálních čísel musí být v dané množině sudý počet, aby se po dvou vykrátila. Jednoduchým protipříkladem je například množina $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\}$. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Úloha 5.

(50; 45; 3,96; 5,0)

David dostal k narozeninám dvě kladná reálná čísla a, b, jejichž součin je 100 a jejichž součet je celé číslo, které dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Dokažte, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ musí být iracionální.

(David Hruška)

Řešení:
Nechť a, b jsou kladná reálná čísla vyhovující podmínkám zadání. Existuje tedy nezáporné celé číslo k takové, že $a + b = 4k + 2$. Dále budeme upravovat zadaný výraz tak, abychom ho mohli zredukovat za pomoci zadaných podmínek:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{4k + 2 + 2\sqrt{100}} = \sqrt{4k + 22}.$$

Zkoumané číslo je tedy druhou odmocninou z kladného celého čísla $4k + 22$, které je dělitelné dvěma, ale není dělitelné čtyřmi. To znamená, že toto celé číslo není druhou mocninou celého čísla a jeho druhá odmocnina je podle textu k této sérii číslo iracionální. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámky:
Tvrzení se podobně dalo dokázat sporem, jenom si někteří řešitelé nedali pozor na to, že musí pro spor uvažovat obecné racionální číslo $\frac{p}{q}$. Tím se postup trochu komplikoval, a proto jsem v autorském řešení zvolil raději druhou variantu. Při opravování jsem narazil na zajímavý problém, zda zkoumaný součet může být celočíselný, pokud bychom druhou podmínku oslabili na $a + b = 2k$. Můžete si to vyzkoušet rozřešit jako cvičení. *(Filip Hlásek)*

[4] Podmnožiny, které se nerovnají původní množině, se běžně označují jako vlastní podmnožiny. Pojmem „zajímavá“ (který ustálený rozhodně není) tedy myslíme zkratku za „vlastní neprázdná“.

[5] Symbolem $M \setminus A$ značíme doplněk množiny A vzhledem k množině M, což je množina, která obsahuje ty prvky z M, které neobsahuje A (a žádné jiné).

Úloha 6. (34; 27; 3,94; 5,0)

Pepa se jednou nudil a řekl si, že napíše iracionální číslo, za jehož desetinnou čárkou budou pouze nuly, jedničky a dvojky. Kopii hotového čísla dal Olinovi a Filipovi. Olin všechny svoje nuly přepsal na jedničky, Filip všechny jedničky své kopie změnil na dvojky. Mohlo se stát, že Olin i Filip měli po přepsání racionální čísla? *(Pepa Tkadlec)*

PRVNÍ ŘEŠENÍ:

Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že Olinovo číslo O aj Filipovo číslo F sú racionálne, kým Pepovo číslo P je iracionálne. Ak má byť O (resp. F) racionálne, tak má buď ukončený desatinný rozvoj, alebo je periodické.

Žiadne z čísel nemôže mať ukončený desatinný rozvoj, pretože ani Olin, ani Filip neprepisujú žiadne cifry na nuly, a teda od istého desatinného miesta by muselo mať P už iba nuly a bolo by racionálne.

Druhá možnosť je, že sú obe čísla O a F periodické. Všimnime si, že O má dvojky na tých istých miestach ako P. Keďže O je periodické, tak od istého miesta sa v ňom zoskupenia dvojok opakujú periodicky, a teda sa musia opakovať aj v P. Označme dĺžku tejto periódy r. Podobne F má nuly na tých istých miestach ako P. Číslo F je periodické, preto od istého miesta sa v ňom zoskupenia núl opakujú periodicky, musia sa teda aj v P opakovať. Dĺžku tejto periódy označíme t. Potom ale od istého miesta (po skončení dlhšej z predperiód čísel O a F) sa v Pepovom čísle budú nuly aj dvojky opakovať s periódou rt. Na zvyšných miestach môžu byť už iba jednotky, a teda aj tie sa budú opakovať s periódou rt. Pepovo číslo je teda periodické, preto nemôže byť iracionálne a dostávame spor.

DRUHÉ ŘEŠENÍ:

Označme x_0 číslo, ktoré má za desatinnou čiarkou jednotky iba na tých miestach, kde má Pepovo číslo nuly, a na ostatných miestach bude mať nuly. Podobne x_1 je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má P jednotky, a inde má nuly, a x_2 je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má P dvojky, a inde má nuly. Potom, keď si odmyslíme celé časti čísel, pretože tie aj tak nič nemenia na racionálnosti, platí

$$\begin{aligned} P &= x_1 + 2x_2, \\ O &= x_0 + x_1 + 2x_2, \\ F &= 2x_1 + 2x_2, \\ \tfrac{1}{9} &= x_0 + x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Ďalej postupujme sporom. Predpokladáme, že O aj F sú racionálne a P je iracionálne. Keďže O je racionálne, tak aj $O - 1/9 = x_2$ je racionálne. Číslo F je racionálne, a preto aj $(F - 2x_2)/2 = x_1$ je racionálne. Konečne súčet racionálnych čísel $x_1 + 2x_2 = P$ je racionálny a dostávame spor.

POZNÁMKY:

Prevažná väčšina riešení bola správna, či už postupovala jedným alebo druhým spôsobom. Občas niekto zabudol zmieniť predperiódy, alebo čo sa deje s číslom pred desatinnou čiarkou, ale za takéto chybičky krásy sme body nestrhávali. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 7. (17; 9; 2,65; 2,0)

Mějme tři kladná iracionální čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 1$. Je-li některé z těchto tří čísel větší než $\frac{1}{2}$, každé z nich vynásobíme dvěma a následně největší číslo o jedna zmenšíme. Takto pokračujeme, dokud nejsou všechna tři čísla menší než $\frac{1}{2}$. Může se nám při nějaké volbě a, b, c stát, že nikdy neskončíme a budeme pokračovat do nekonečna? *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:
Najdeme a, b, c taková, že budeme moci udělat nekonečně mnoho kroků. Taková vhodná čísla, zapsaná v binární číselné soustavě, jsou například tato:

$$a = 0{,}101001000100001\ldots,$$
$$b = 0{,}0101001000100001\ldots,$$
$$c = 0{,}0000100110011100\ldots.$$

Číslo a vzniklo postupným zvyšováním počtu nul mezi jednotlivými jedničkami, b je stejné, ale posunuté o jednu cifru doprava, tedy $b = a/2$. Číslo c je takové, že má jedničku přesně tam, kde ji nemá a ani b, tedy $c = 1 - a - b$.

Číslo a má neperiodický binární rozvoj, tedy je iracionální. Stejně tak je iracionální číslo $b = a/2$ (součin racionálního a iracionálního) a číslo $c = 1 - 3a/2$ (rozdíl racionálního a iracionálního). Nyní stačí sledovat, co se s čísly stane při jednom kroku. Při vynásobení čísla dvojkou se v binárním zápise jen posune dvojková čárka[6] o jednu pozici doprava. Následným odečtením jedničky pouze smažeme onu jednu jedničku před dvojkovou čárkou. Nyní už je jasné, že v každém kroku bude právě jedno číslo větší než $1/2$, a tedy se nikdy nezastavíme.

Poznámky:
Opět bylo dokázáno, že nekonečno dělá problémy. Hodně z vás tvrdilo, že taková čísla neexistují, protože by byla jen součtem nějakých racionálních čísel. To sice ano, ale pokud je součet nekonečný, pak se i z racionálních čísel může stát číslo iracionální. Důkazem toho může být například $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot 10^{-i}$, kde p_i je i-tá číslice v desetinném zápise čísla π. Tento součet je roven π, tedy je iracionální, ale všechny členy součtu jsou racionální. *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Úloha 8.

(7; 4; 2,71; 3,0)

Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro každé iracionální číslo i je $P(i)$ také iracionální. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Je-li polynom $P(x)$ konstantní, pak nutně $P(x) = i$ pro nějaké iracionální číslo i. Takovýto polynom zřejmě splňuje podmínku ze zadání.

Předpokládejme dále, že polynom $P(x)$ ze zadání existuje, má stupeň $n \geq 1$ a platí

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Naším prvním cílem bude ukázat, že čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou všechna racionální.

Podmínku ze zadání budeme dále využívat také v její obměně: je-li $P(q)$ racionální, je i q racionální. Je známým faktem, že svými hodnotami v $n+1$ bodech je polynom stupně n již jednoznačně určen. Zvolme proto $n+1$ různých racionálních čísel $r_0, r_1, \ldots, r_n$ z oboru hodnot $P(x)$ jakožto funkce; pro ta existují (nutně různá) racionální čísla $q_0, q_1, \ldots, q_n$ taková, že $P(q_j) = r_j$ pro $0 \leq j \leq n$. Na tuto sadu rovností můžeme pohlížet jako na soustavu $n+1$ lineárních rovnic o $n+1$ neznámých $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Tato soustava má vzhledem k výše uvedeným skutečnostem (polynom $P(x)$ existuje a je těmito rovnicemi jednoznačně popsán) právě jedno řešení. Řešíme-li takovouto soustavu rovnic, dospějeme k výsledku jen pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních celých čísel, proto jsou i čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vskutku racionální.

V případě $n = 1$ je patrné, že racionalita koeficientů již stačí pro splnění podmínky ze zadání, protože pro libovolná racionální čísla a_0, a_1 ($a_1 \neq 0$) a iracionální číslo i je $a_1 i + a_0$ iracionální. Pro $n \geq 2$ však žádný polynom nevyhovuje, jak dále dokážeme.

[6] Jde o analogii desetinné čárky v desítkovém zápise.

Předně poznamenejme, že polynom $P(x)$ vyhovuje zadání právě tehdy, když vyhovuje polynom $rP(x)$, kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. Díky tomu můžeme předpokládat, že čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou dokonce celá (kdyby nebyla, tak polynom vynásobíme součinem jejich jmenovatelů). Nechť p je prvočíslo, které nedělí a_n, a d celé číslo nedělitelné p, pro které je d/p v oboru hodnot $P(x)$. Máme $P(q) = d/p$ pro nějaké racionální číslo q, které si zapíšeme jako u/v, kde u, v jsou nesoudělná celá čísla. Rovnost si rozepíšeme a upravíme:

$$a_n\left(\tfrac{u}{v}\right)^n + a_{n-1}\left(\tfrac{u}{v}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \tfrac{u}{v} + a_0 = \tfrac{d}{p},$$
$$p \cdot \left(a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + a_1 u v^{n-1} + a_0 v^n\right) = dv^n.$$

Jelikož je levá strana poslední rovnosti dělitelná p a $p \nmid d$, je $p \mid v$. Pravá strana je tedy dělitelná p^n, což spolu s $n > 1$ implikuje

$$p \mid a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + a_1 u v^{n-1} + a_0 v^n.$$

Všechny sčítance s v jsou také dělitelné p, takže $p \mid a_n u^n$ a vzhledem k volbě p je $p \mid u$. To je ale ve sporu s nesoudělností čísel u, v, číslo d/p tedy nemůže mít racionální vzor a polynom $P(x)$ nemůže splňovat podmínku ze zadání.

Poznámky:
Všechna správná řešení stejně jako výše uvedené nejprve ukazovala, že nekonstantní polynom vyhovující zadání musí mít racionální koeficienty, a posléze nějak argumentovala skrze dělitelnost. Prezentovaný vzorový postup mi přišel jako vhodný kompromis mezi stručností a srozumitelností; povšimněte si, že v podstatě jde jen o variaci na důkaz iracionality $\sqrt{2}$ (neboli faktu, že 2 nemá racionální vzor v polynomu x^2), který byl uveden v úvodním textu!

(Alexander „Olin“ Slávik)