Iracionální čísla

2. jarní série — Termín odeslání: 10. března 2014

Pokud prohlašujete, že je nějaké číslo iracionální, své tvrzení zdůvodněte. Výjimkou jsou čísla, jejichž iracionalita je zmíněna v úvodním textu.

Úloha 1. (3 body)
Do každého políčka tabulky 2×3 napište iracionální číslo tak, aby součet v každém řádku i sloupci byl racionální.

Úloha 2. (3 body)
Rozhodněte, zda existují tři iracionální čísla taková, že součet každých dvou z nich je racionální, a své tvrzení dokažte.

Úloha 3. (3 body)
Šavlík si nějakou dobu hrál s kladnými čísly a pak tvrdil, že se mu podařilo najít takové číslo x, že pro každé přirozené číslo n dávalo číslo[4] $\lfloor x \cdot 10^n \rfloor$ po dělení 10 stejný zbytek jako n. Je možné, že Šavlíkovo číslo bylo iracionální?

Úloha 4. (5 bodů)
E.T. má konečnou množinu reálných čísel takovou, že součet všech jejích prvků je racionální. Dokažte, že počet jejích neprázdných podmnožin, které mají iracionální součet všech prvků, je sudý.

Úloha 5. (5 bodů)
David dostal k narozeninám dvě kladná reálná čísla a, b, jejichž součin je 100 a jejichž součet je celé číslo, které dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Dokažte, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ musí být iracionální.

Úloha 6. (5 bodů)
Pepa se jednou nudil a řekl si, že napíše iracionální číslo, za jehož desetinnou čárkou budou pouze nuly, jedničky a dvojky. Kopii hotového čísla dal Olinovi a Filipovi. Olin všechny svoje nuly přepsal na jedničky, Filip všechny jedničky své kopie změnil na dvojky. Mohlo se stát, že Olin i Filip měli po přepsání racionální čísla?

Úloha 7. (5 bodů)
Mějme tři kladná iracionální čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 1$. Je-li některé z těchto tří čísel větší než $\frac{1}{2}$, každé z nich vynásobíme dvěma a následně největší číslo o jedna zmenšíme. Takto pokračujeme, dokud nejsou všechna tři čísla menší než $\frac{1}{2}$. Může se nám při nějaké volbě a, b, c stát, že nikdy neskončíme a budeme pokračovat do nekonečna?

Úloha 8. (5 bodů)
Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro každé iracionální číslo i je $P(i)$ také iracionální.

[4] Číslo $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.