

Teorie čísel

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 10. ÚNORA 2014

ÚLOHA 1.

(5 BODŮ)

Najděte všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, které splňují rovnosti

$$\begin{aligned}m^{m+n} &= n^{12}, \\n^{m+n} &= m^3.\end{aligned}$$

ÚLOHA 2.

(5 BODŮ)

Čísla $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 40\}$ splňují kongruenci

$$41a - 40 \cdot 6^a + 41b - 40 \cdot 6^b \equiv 41c - 40 \cdot 6^c + 41d - 40 \cdot 6^d \pmod{1640}.$$

Dokažte, že čísla a, b se v nějakém pořadí rovnají číslům c, d .

ÚLOHA 3.

(5 BODŮ)

Dá se ukázat, že číslo $p = 2^{127} - 1$ je prvočíslo.³ S využitím tohoto faktu dokažte, že 2014 je kvadratický zbytek modulo p .

³Milou zajímavostí je, že nejen $2^{127} - 1$ je Mersennovo prvočíslo, ale dokonce $127 = 2^7 - 1$ je také Mersennovo prvočíslo.