Letem grafovým světem

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. PROSINCE 2014

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Mějme graf G takový, že každý jeho vrchol má stupeň alespoň s, kde s je nějaké nezáporné celé číslo. Ukažte, že pak G obsahuje cestu na $s+1$ vrcholech jako podgraf.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Pro čísla n a k splňující $0 \leq k \leq n$ určete, kolik podgrafů grafu Q_n je izomorfních s grafem Q_k.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Nechť $T_1, T_2, \dots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají alespoň jeden společný vrchol. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \dots, k$.

Letetem grafovým světem

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(57; 47; 3,93; 5,0)

Mějme graf G takový, že každý jeho vrchol má stupeň alespoň s, kde s je nějaké nezáporné celé číslo. Ukažte, že pak G obsahuje cestu na $s+1$ vrcholech jako podgraf.

(Martin „E.T." Sýkora)

ŘEŠENÍ:
Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje $s \geq 0$ celé a nejaký graf taký, že stupeň každého vrcholu je aspoň s, ale neexistuje v ňom cesta na $s+1$ vrcholoch. Uvažujme ľubovolnú najdlhšiu cestu P v našom grafe. Musí mať $k \leq s$ vrcholov. Posledný vrchol tejto cesty má stupeň aspoň s, a preto z neho vedie aspoň s hrán do rôznych vrcholov. V ceste P je okrem neho maximálne $s-1$ vrcholov, preto aspoň jedna hrana vedie do vrcholu zatiaľ nepoužitého. O túto hranu môžeme našu cestu predĺžiť a dostaneme novú, dlhšiu, cestu P', čo je spor s tým, že cesta P je najdlhšia.

POZNÁMKY:
K úlohe sa dalo pristupovať rôzne. Väčšina riešiteľov prišla na intuitívne riešenie postupným predlžovaním cesty od 0 do $s+1$ vrcholov, čo si často vyžiadalo dlhšie a ťažkopádnejšie formulácie. Tí, ktorí sa s úlohou viac vyšantili a vyriešili ju sporom alebo použili chytrú indukciu, dostali $+i$.

(Marta Kossaczká)

Úloha 2.

(37; 26; 2,22; 2,0)

Pro čísla n a k splňující $0 \leq k \leq n$ určete, kolik podgrafů grafu Q_n je izomorfních s grafem Q_k.

(Peter „πtr" Korcsok)

ŘEŠENÍ:
Označme si vrcholy grafu Q_n rovnako ako v seriáli – ako n-tice núl a jednotiek. Kľúčom k celému riešeniu je ukázať, že pre ľubovoľný podgraf G grafu Q_n izomorfný s grafom Q_k existuje takých k pozícií, že n-tice príslušiace vrcholom G sa na týchto pozíciách menia (všetkých 2^k možností), ale všade inde sú pre všetky vrcholy rovnaké.

Majme nejaký podgraf $G \subseteq Q_n$, ktorý je izomorfný grafu Q_k, a príslušný izomorfizmus $f\colon V(Q_k) \to V(G)$. Vezmime si vrchol $v = (0,\dots,0)$ grafu Q_k, a BUNV[1] predpokladajme, že $f(v) = (0,\dots,0)$,[2] pre iné prípady musíme na príslušných pozíciách vo zvyšku tohto riešenia zameniť nuly a jednotky. V grafe Q_k má v práve k susedov, preto aj vrchol $f(v)$ musí v G susediť s k susedmi – každý z nich obsahuje práve jednu jednotku, opäť BUNV nech je to vždy jedna z prvých k pozícií. Ukážeme, že potom každý vrchol grafu G môže mať jednotky iba na týchto k pozíciách. Využijeme na to indukciu podľa počtu jednotiek.

[1] Bez ujmy na všeobecnosti.

[2] Pozor, v má k núl, ale $f(v)$ ich má n.

Uvažujme ľubovoľný vrchol u grafu Q_k. Pokiaľ má maximálne jednu jednotku, máme to už dokázané priamo z toho, ako sme doteraz vrcholy v G vyberali. Predpokladajme teda, že sme tvrdenie dokázali pre všetky vrcholy Q_k s maximálne l jednotkami, a skúmajme ľubovoľný vrchol u grafu Q_k obsahujúci $l+1$ jednotiek. Označme si ešte V množinu všetkých vrcholov Q_k, ktoré majú maximálne l jednotiek, $f(V)$ potom bude množina vrcholov $f(v)$ pre všetky $v \in V$.

Vrchol u má opäť k susedov, z toho $l+1$ má o jednu jednotku menej (dostaneme ich zmenou práve jednej jednotky na nulu) a zvyšok má o jednotku viac (tie vzniknú zmenou práve jednej nuly na jednotku). Medzi vrcholmi z V má teda práve $l+1$ susedov. To isté ale musí platiť aj pre vrchol $f(u)$, teda musí mať $l+1$ susedov medzi vrcholmi $f(V)$.

Ak by ale vrchol $f(u)$ mal jednotku mimo prvých k pozícií, prechodom po hrane (a teda zmenou jednej pozície) sa do $f(V)$ dostaneme iba raz (alebo dokonca vôbec, ak by tých jednotiek „mimo“ bolo viac), pretože podľa indukčného predpokladu majú všetky vrcholy z $f(V)$ jednotky iba na prvých k pozíciách. Zároveň si ale môžeme všimnúť, že všetky vrcholy Q_n, ktoré majú l a menej jednotiek na prvých k pozíciách (a nuly všade inde), už v množine $f(V)$ sú (dostali sa tam pri predošlých krokoch indukcie), $f(u)$ musí teda nutne obsahovať $l+1$ jednotiek na prvých k pozíciách. Teraz už musíme iba spočítať, koľkými spôsobmi vieme takýto podgraf vybrať. Pretože máme $\binom{n}{k}$ možností pre výber „premenlivých“ pozícií a potom 2^{n-k} možností pre hodnoty na zvyšných pozíciách, rôznych podgrafov nájdeme práve $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

POZNÁMKY:

Vo väčšine riešení ste správne určili počet podgrafov, častokrát ste ale dostatočne (alebo vôbec) nedokazovali, že tento počet je naozaj správny. Vtedy ste mohli získať maximálne tri body.

Čo sa týka prístupu k hľadaniu podgrafov, objavili sa v zásade tri spôsoby: prvý podobný tomu v našom riešení, druhý potom skúmal, koľko podgrafov obsahuje jeden konkrétny vrchol. Pri tom treťom ste sa snažili nájsť rekurzívne vyjadrenie hľadaného počtu podgrafov. Všetky tieto metódy sú zhruba rovnako dobré, zakaždým ale bolo potrebné dokazovať, že žiadny ďalší podgraf tam už nájsť nemôžeme. Ten posledný spôsob má ale jednu zásadnú nevýhodu – pre väčšie hodnoty n a k potrebujeme spočítať viac hodnôt alebo musíme z rekurzívneho zápisu nájsť správny vzorec.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 3.

(51; 25; 2,16; 1,0)

Nechť $T_1, T_2, \ldots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají alespoň jeden společný vrchol. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Tvrzení dokážeme indukcí podle k. Pokud $k = 1$, pak máme jediný podstrom, pro který je závěr triviálně splněn. Mějme nyní podstromy $T_1, \ldots, T_{k+1}$ stromu T takové, že každé dva z nich mají neprázdný průnik, a předpokládejme, že pro k podstromů tvrzení platí. Graf $P = T_1 \cap \cdots \cap T_k$ tedy obsahuje aspoň jeden vrchol. Navíc je P souvislý, neboť s každými dvěma vrcholy musí do P patřit i ona jediná cesta, která je spojuje (libovolné dva vrcholy z P náleží každému T_i, $i = 1, \ldots, k$, a T_i je souvislý). Tedy P je rovněž strom.

Zvolme libovolný vrchol $p \in P$. Pokud $p \in T_{k+1}$, jsme hotovi. Nechť tedy $p \notin T_{k+1}$. Najděme vrchol $t_0 \in T_{k+1}$, do kterého vede z p nejkratší cesta (takový vrchol je určitě jen jeden, neboť v opačném případě bychom dostali dvě různé cesty vedoucí mezi dvěma vrcholy grafu T_{k+1} – jednu uvnitř T_{k+1} a jednu mimo T_{k+1}). Cesta z p do t_0 prochází kromě samotného t_0 zřejmě pouze vrcholy mimo T_{k+1}. Z libovolného $t \in T_{k+1}$ vede přitom v rámci T_{k+1} cesta do t_0. Z toho vyplývá, že každá cesta z p do nějakého vrcholu T_{k+1} prochází vrcholem t_0. Dále víme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ existuje nějaký vrchol $t_i \in T_i \cap T_{k+1}$. Jelikož $p \in T_i$, leží cesta z p do t_i celá v T_i. Tedy i $t_0 \in T_i$, takže t_0 je hledaný společný vrchol všech $k+1$ podstromů.

Tvrzení je tímto dokázáno pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(Martina Vaváčková)

Alternativní řešení:

Zvoľme si ľubovoľný vrchol r ako koreň stromu T, *výškou* $h(v)$ nejakého vrcholu v potom budeme označovať počet hrán na (jedinej) ceste medzi r a v. Rovno si môžeme všimnúť, že každý vrchol v rôzny od r susedí s práve jedným vrcholom u s výškou $h(v) - 1$, vrchol u sa občas označuje ako *rodič* vrcholu v. Existenciu tohto vrcholu nám zaistí fakt, že nejaká cesta z r do v viesť musí, jednoznačnosť dokážeme sporom. Ak by totiž takéto vrcholy existovali dva, dostaneme dve cesty (obe dlhé $h(v)$ hrán), ktoré sa líšia minimálne v predposlednom vrchole, čo v strome nastať nesmie.

Ďalej si označme $r_1, \ldots, r_k$ vrcholy s najnižšou výškou v stromoch $T_1, \ldots, T_k$ – to budú korene týchto podstromov. Nakoniec vyberme ten vrchol r_i spomedzi $r_1, \ldots, r_k$, ktorý má najvyššiu výšku (z prípadných viacerých možností vyberieme ľubovoľne). Ukážeme, že r_i patrí do všetkých stromov $T_1, \ldots, T_k$.

Predtým ale musíme dokázať, že pre ľubovoľný strom T' s koreňom r' a ľubovoľný jeho vrchol v je výška vrcholov na ceste od r' k v rastúca. Ak by sa totiž výška pri pohybe po nejakej hrane $\{x, y\}$ nezmenila (alebo by dokonca klesla), musela by existovať cesta medzi koreňom r a vrcholom y, ktorá ale nevyužíva vrchol x. Tým ale opäť dostávame spor s jedinečnosťou cesty v strome.

Zvoľme teraz ľubovoľný strom T_j odlišný od T_i. Zo zadania vieme, že majú neprázdny prienik, my ale navyše ukážeme, že v tomto prieniku je aj r_i. Označme v ľubovoľný vrchol z prieniku oboch stromov. Podľa spôsobu výberu koreňov podstromov určite vieme, že $h(v) \geq h(r_i)$ aj $h(v) \geq h(r_j)$. Pretože navyše r_i má najvyššiu výšku medzi koreňmi, musí tiež platiť nerovnosť $h(r_i) \geq h(r_j)$. Teda keď sa teraz vydáme z v vždy hranou k rodičovi, musíme nutne dostať jedinú cestu k r_i (v strome T_i) a časom tiež k r_j (v strome T_j). Vrchol r_i preto leží na ceste z v do r_j, a teda aj v strome T_j.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Poznámky:

Myšlenka úlohy nebyla obtížná, jen bylo potřeba správně argumentovat v řešení. Mnozí z vás se bohužel nechali unést jasným výsledkem a v řešení (často pomocí různých náčrtků) vysvětlovali, že to prostě jinak dopadnout nemůže. Tím si vysloužili krásnou kulatou nulu, v lepším případě jeden bod. Dva body jsem dávala těm, kteří tvrzení ukázali aspoň pro tři podstromy, a tři body těm, kteří si navíc uvědomili, že to pro tři nestačí, a uvedli záznak důkazu pro více podstromů. Čtyři až pět bodů si pak vysloužila skoro správná, respektive správná řešení. Sešlo se několik velmi pěkných přístupů, které si vysloužily kladný imaginární bod. *(Martina Vaváčková)*