

# Seriál – Letem grafovým světem I

Přestože matematika zahrnuje spoustu hezkých oblastí, mnohé z nich na střední škole moc nepotkáš. I proto se v PraSátku zavedla tradice seriálů na pokračování, kde se Ti snažíme představit právě některé z těchto odvětví. V těchto a následujících dvojích komentářích vždy najdeš jeden jeho díl a trojici úloh, k jejichž úspěšnému zdoání by Ti mělo stačit přečíst a pochopit obsah již vydaných částí. Kromě samotného výkladu látky v seriálu potkáš i několik cvičení (a návodů, jak na ně), kde si můžeš řešení zkusit „nanečisto“. Do celkového bodového hodnocení se Ti, na rozdíl od běžných sérií, započítají všechny soutěžní úlohy, které zašleš.

Jak už možná víš, tématem letošního (již osmnáctého) seriálu jsou grafy a budeme Tě jimi provázet my, Peter „ $\pi$ tr“ Korcsok a Martin „E.T.“ Sýkora. Pokud by se Ti v následujícím textu něco nelíbilo nebo bys něčemu nerozuměl(a), můžeš nás kontaktovat na chatu<sup>5</sup> na našich internetových stránkách nebo nám můžeš napsat e-mail. Přitom můžeš psát na „obecnou“ e-mailovou adresu [mks@mff.cuni.cz](mailto:mks@mff.cuni.cz) nebo přímo nám dvěma (to preferujeme) na adresy, které naleznáš na stránkách v sekci „Organizátoři“.

A o čem vlastně ta teorie grafů je? To je velmi dobrá otázka, ale odpověď na ni v tomto odstavci nečekej. Onou odpovědí by totiž měl být celý seriál, který Ti ukáže, co zhruba se v teorii grafů dá studovat. Rozhodně ale ani on nedokáže v plném rozsahu popsat tuto obrovskou oblast matematiky. Mohli bychom se zde teď rozpisovat, proč se vlastně matematici takzvanými grafy zabývají (mimo to, že je to pěkná matematika). Ale protože toho zatím o grafech moc nevíme, pustíme se raději do výkladu. A až se něco naučíme, tak si i řekneme, k čemu se to dá využít v reálném světě. Rovnou ale prozradíme, že pátá úloha letošní první série byla právě z teorie grafů.

Celý výklad je přitom rozdělen do tří dílů. Začátek prvního z nich právě pročítáš. Ve zbytku se naučíš naprosté základy teorie grafů, které uslyšíš a uvidíš ještě mockrát, ale které jsou zároveň naprosto zásadní pro další práci s grafy. Zbylé dva díly se Ti dostanou do rukou v jarní části semináře. Ve druhém díle si ukážeme něco, čemu se odborně říká „systém různých reprezentantů“, ale není potřeba se toho bát, a taky si zkusíme nějaké grafy nabarvit. Ve třetím díle pak naše pouť skončí studiem takzvaných průnikových grafů.

## Co to tedy ten graf je?

Na střední jsi už určitě potkal(a) mnoho grafů – třeba graf funkce  $y = x^2$  nebo  $y = \sin x$ . Pokud něco podobného očekáváš i tady, musíme Tě zklamat. Grafem totiž budeme rozumět něco úplně jiného, a sice poměrně abstraktní strukturu, kterou nejlépe popisuje následující definice. Věříme, že Tě moc nevyděsí.

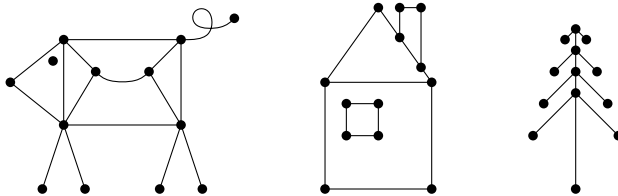
---

<sup>5</sup>Při psaní na chat ale dávej pozor, abys (ani omylem) nepomáhal(a) ostatním se soutěžní sérií.

**Definice 1.** Graf je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  představuje množinu vrcholů a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina hran.<sup>6,7</sup>

Množinu vrcholů grafu  $G$  budeme často psát jako  $V(G)$  nebo  $V_G$ , podobně pak množinu hran  $E(G)$  nebo  $E_G$ . Abychom se vyhnuli budoucím komplikacím, budeme uvažovat pouze grafy s neprázdnou a konečnou množinou vrcholů.

Protože tohle se dost špatně představuje a ještě hůř se s tím pracuje, často si při uvažování nad zapeklitým grafovým problémem pomáháme obrázky. Tam vrcholy jednoduše znázorníme puntíky a hrany budou představovat křivky s konci v patřičných puntíciích. Třeba tady jsou tři takové grafy na třinácti vrcholech.



A proč vlastně grafy zkoumáme? Mnoho věcí z běžného života se dá reprezentovat právě pomocí grafů. Stačí se podívat na mapu Českých drah nebo silniční síť – vrcholy jsou stanice nebo města a hrany představují přímé spojení mezi nimi. Dalším příkladem může být „graf přátelství“ určité skupiny lidí – každý člověk tam tvoří vrchol, přičemž spojení hranou budou ti, kteří se přátelí. Jindy grafy popisují vztahy mezi úplně abstraktními věcmi, třeba v teorii čísel – hrany mohou představovat dvojice soudělných čísel.

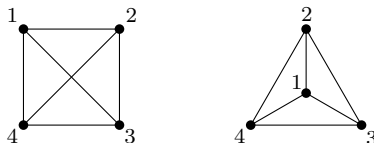
**Definice 2.** Doplněk grafu  $G = (V, E)$  je graf  $\overline{G} = (V, E')$ , kde  $E' = \binom{V}{2} \setminus E$ .

Tedy, volně řečeno, doplněk je něco jako „opačný“ graf – dvojice vrcholů je v  $\overline{G}$  spojena právě tehdy, když není spojena v  $G$ .

**Cvičení 3.** Rozmysli si, že doplněk doplňku je vlastně původní graf.

### Izomorfismus

Jak už bylo zmíněno, grafy si budeme poměrně často kreslit. Toto nakreslení ale zdaleka nemusí být jednoznačné. Třeba graf  $(V, E)$  s  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  a  $E = \binom{V}{2}$  může být nakreslen oběma z následujících způsobů.



Proto potřebujeme nějakou metodu, jak určit, kdy jsou dva obrázky tentýž graf.

<sup>6</sup>Tato písmena nejsou náhodná, pocházejí z anglických výrazů pro vrchol (*vertex*, v množném čísle *vertices*) a hranu (*edge*).

<sup>7</sup>Symbol  $\binom{X}{2}$  značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny  $X$ .

**Definice 4.** Grafy  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  nazveme *izomorfní*, pokud existuje vzájemně jednoznačné<sup>8</sup> zobrazení  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , kde pro každou dvojici vrcholů  $u, v \in V_1$  platí

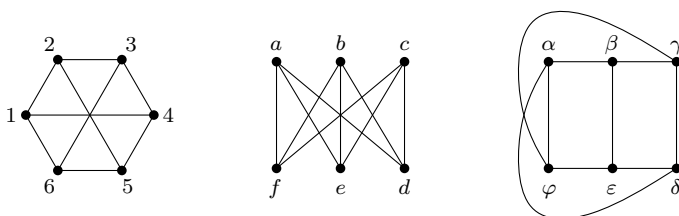
$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Tuto skutečnost značíme  $G_1 \cong G_2$  a funkci  $f$  pak také nazýváme *izomorfismem* mezi grafy  $G_1$  a  $G_2$ .

Když se trochu vzdálíme od formalismu, jde vlastně o nějaké „přejmenování“ vrcholů bez změny hran.

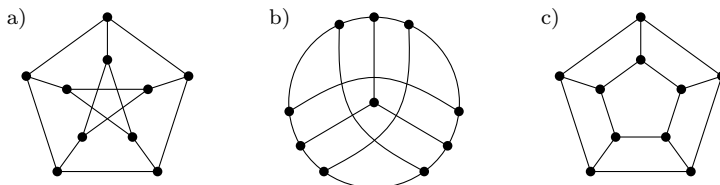
Hned můžeme prozradit, že pokud  $G_1 \cong G_2$  a zároveň  $G_2 \cong G_3$ , pak už nutně  $G_1 \cong G_3$ , stačí totiž vrcholy  $G_1$  „přejmenovat“ dvakrát za sebou.

**Příklad 5.** Grafy na následujících třech obrázcích jsou izomorfní.



*Řešení.* Abychom to ukázali, potřebujeme najít příslušné izomorfismy. Na to máme hned několik možností, například přiřazení  $1 \leftrightarrow a \leftrightarrow \alpha$ ,  $2 \leftrightarrow d \leftrightarrow \beta$ ,  $3 \leftrightarrow b \leftrightarrow \gamma$ ,  $4 \leftrightarrow e \leftrightarrow \delta$ ,  $5 \leftrightarrow c \leftrightarrow \epsilon$  a  $6 \leftrightarrow f \leftrightarrow \varphi$ . Určitě snadno ověříš (ale je k tomu potřeba trochu práce), že vyhovují výše popsané definici.  $\square$

**Cvičení 6.** Rozhodni, zda následující grafy jsou izomorfní.



## Podgrafy

Občas se nám bude hodit podívat se jenom na část grafu a jeho zbytek nás v tom momentě nebude zajímat. Tak si to rovnou pojmenujme.

**Definice 7.** Graf  $H$  je *podgrafem* grafu  $G$ , pokud  $V(H) \subseteq V(G)$  a  $E(H) \subseteq E(G)$ . Pokud navíc platí

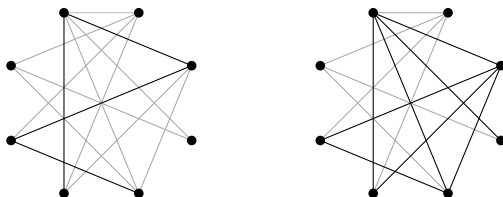
$$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2},$$

říkáme, že  $H$  je *indukovaným podgrafem*.

<sup>8</sup>Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  je *vzájemně jednoznačné*, pokud pro každé  $y \in Y$  existuje právě jedno  $x \in X$ , že  $f(x) = y$ . Často se mu také říká *bijektivní*.

Skutečnost, že  $H$  je podgrafem  $G$ , značíme obvykle  $H \subseteq G$ , v případě indukovaného podgrafu  $H \subseteq_{\text{ind}} G$ .

Tohle je opět nejlepší ukázat na obrázku:



Vlevo je vyznačen „obyčejný“ podgraf, vpravo pak ten indukovaný. Když definici volně přeložíme do češtiny, při vytváření indukovaného podgrafu smažeme několik vrcholů a všechny hrany, které je obsahovaly. Pokud ale odstraníme i některé z dalších hran, dostaneme už podgraf neindukovaný.

Dále by se nám někdy mohlo hodit pro graf  $G$  a množinu  $U \subseteq V(G)$  označit „tu část grafu  $G$ , která využívá jenom vrcholy  $U$ “ – podgraf indukovaný vrcholy  $U$  je podgraf  $H \subseteq_{\text{ind}} G$ , kde  $V(H) = U$ , a značíme ho  $G[U]$ .

A ještě si označme dva speciální podgrafy a jeden „nadgraf“. Pro graf  $G = (V, E)$ , jeho vrchol  $v$  a hranu  $e$  bude  $G - v = G[V \setminus \{v\}]$  a  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ . Navíc pokud  $e = \{u, v\}$  je dvojice nesousedních vrcholů grafu  $G$ , tak pod  $G + e$  budeme rozumět graf  $(V, E \cup \{e\})$ . Značku  $G + v$  neumíme rozumně zdefinovat, protože je víc možností, jak nový vrchol navázat.

## Pohled zblízka

Teď se trochu pozorněji podíváme na jednotlivé vrcholy a jejich „kamarády“.

**Definice 8.** Necht  $v$  je vrchol grafu  $G$ . Pak množinu všech vrcholů, které jsou spojeny hranou s  $v$ , nazýváme *sousedství* vrcholu  $v$  a značíme  $N_G(v)$ . Dále *stupněm* vrcholu  $v$  nazýváme počet sousedů, tedy  $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ .

Pokud bude jasné, který graf máme na mysli, dolní index ve značení můžeme vynechat.

**Definice 9.** Vrchol stupně nula nazýváme také *izolovaný vrchol* a vrchol stupně jedna *list*.

Mohlo by Tě napadnout, jestli můžeme vrcholům libovolně předepsat stupně a hledat pak graf, který tomuto předpisu vyhovuje. Odpověď je jednoduchá – nemůžeme. I o tom je následující věta.

**Věta 10.** (Princip sudosti) *Pro každý graf platí, že součet stupňů všech vrcholů je sudé číslo.*

*Důkaz.* Když se podíváme na libovolnou hranu, zjistíme, že ji v součtu stupňů započteme dvakrát – za každý její konec. Musí tedy platit

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|,$$

což je sudé číslo. □

**Cvičení 11.** Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož všechny vrcholy by měly navzájem různé stupně?

## Souvislost

Úplný úvod do teorie grafů máme zdárně za sebou, ale neusneme na vavřínech a směle se pustíme do dalších definic.

**Definice 12.** *Sledem v grafu  $G$  nazveme posloupnost  $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$  vrcholů a hran v grafu  $G$  takovou, že pro  $i = 1, 2, \dots, n$  platí  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ . Číslo  $n$  pak říkáme *délka* tohoto sledu. Speciálně tedy  $(v_0)$  je sled nulové délky.*

*Tahem v grafu  $G$  rozumíme sled v grafu  $G$ , jehož hrany se neopakují. Cestou v grafu  $G$  pak nazveme sled v grafu  $G$ , jehož vrcholy se neopakují.*

**Cvičení 13.** Rozmysli si, že každá cesta v grafu  $G$  je zároveň tah v grafu  $G$ .

**Cvičení 14.** Mějme graf  $G$  a v něm ne nutně různé vrcholy  $u$  a  $v$ . Rozmysli si, že v grafu  $G$  existuje cesta mezi vrcholy  $u$  a  $v$  právě tehdy, když mezi nimi existuje tah, a to nastane právě tehdy, když mezi nimi existuje sled.<sup>9</sup>

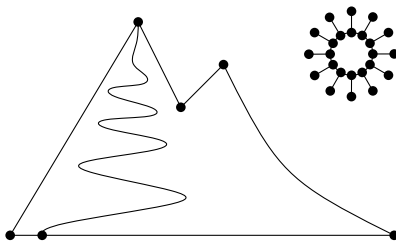
*Návod.* Jeden směr obou ekvivalencí je zřejmý z toho, že každá cesta je zároveň tah a každý tah je sled. Důkaz opačných implikací je v obou případech podobný. Naznačíme si ho tedy jen v případě první ekvivalence. Buď je daný tah mezi vrcholy  $u$  a  $v$  rovnou cestou, anebo je to cesta s jakýmsi „smyčkami“, které stačí vypustit, čímž z tahu uděláme cestu. □

Nyní bychom chtěli definovat takzvané souvislé grafy. To jsou ty grafy, v jejichž běžné ob-  
 rázkové reprezentaci jsou každé dva vrcholy spojeny čarou složenou z nějakých hran. Jistě si  
 snadno rozmyslíš, že následující definice říká formálním jazykem totéž.

**Definice 15.** Graf  $G$  nazveme *souvislým*, pokud v něm existuje tah mezi každou dvojicí jeho vrcholů.

Dále definujeme *komponentu souvislosti* v grafu  $G$  jako libovolný indukovaný podgraf grafu  $G$ , který je souvislý a který nelze rozšířit o žádný vrchol tak, aby se zachovala jeho souvislost.

Každý graf se pak rozkládá na několik komponent. Pokud je samotný graf souvislý, je tato komponenta právě jedna, v opačném případě jsou alespoň dvě.



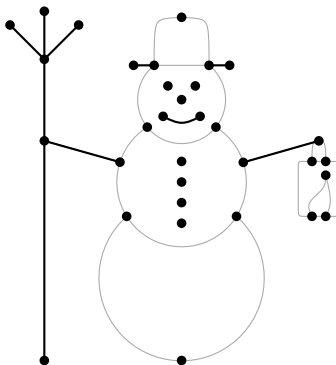
Slunce nad horami – graf se dvěma komponentami

**Cvičení 16.** Dokaž, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Platí to i obráceně – musí být doplněk souvislého grafu nesouvislý?

Dalším pojmem je termín most, který objasňuje následující definice.

**Definice 17.** Hranu  $e$  nazveme *mostem* v grafu  $G$ , pokud graf  $G - e$  má víc komponent než graf  $G$ .

<sup>9</sup>O tahu, sledu či cestě řekneme, že je mezi vrcholy  $x$  a  $y$  v grafu  $G$ , pokud  $v_0 = x$  a  $v_n = y$  (nebo naopak) a  $\{x, y\} \subseteq V(G)$ .



Graf se zvýrazněnými mosty

**Příklad 18.** Dokaž, že graf, který má stupně všech vrcholů sudé, neobsahuje most.

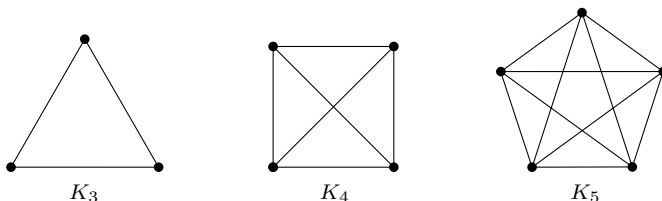
*Řešení.* Řešení je jednoduché a je vlastně jen důsledkem principu sudosti. Dokažme obměněnou implikaci<sup>10</sup>. Předpokládejme, že nějaký graf  $G$  obsahuje most  $e$ . Pak odebráním tohoto mostu vzniknou dvě nové komponenty souvislosti  $K$  a  $K'$ . Speciálně komponenta  $K$  je samostatný graf (jakožto podgraf  $G$ ), takže na ni můžeme aplikovat princip sudosti. Součet stupňů vrcholů v  $K$  je sudý. Buď jsou tedy všechny stupně sudé, nebo alespoň dva liché. V prvním případě má vrchol  $z$   $K$ , který je obsažen v mostu  $e$ , v grafu  $G$  lichý stupeň. Ve druhém případě alespoň jeden vrchol  $z$  těch vrcholů v  $K$ , které mají lichý stupeň, není obsažen v mostu  $e$ , a proto má lichý stupeň i v  $G$ . Tím jsme dokázali obměněnou implikaci a důkaz je tak hotov.  $\square$

## Nejznámější typy grafů

Nyní se podíváme na některé typy grafů, které si vysloužily vlastní pojmenování, protože se často vyskytují v různých problémech.

**Definice 19.** O grafu  $G = (V, E)$  řekneme, že je to *úplný graf na  $n$  vrcholech*, pokud  $|V| = n$  a  $E = \binom{V}{2}$ .

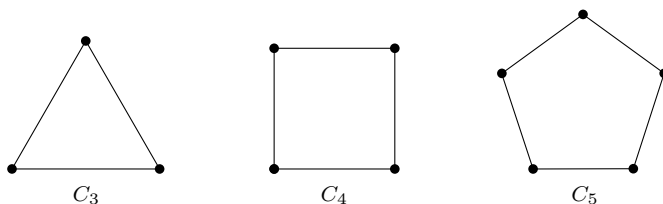
Úplný graf na  $n$  vrcholech tradičně značíme  $K_n$ . Pokud Ti z definice není jasné, jak takové grafy vypadají, snad Ti to pomohou objasnit následující obrázky.



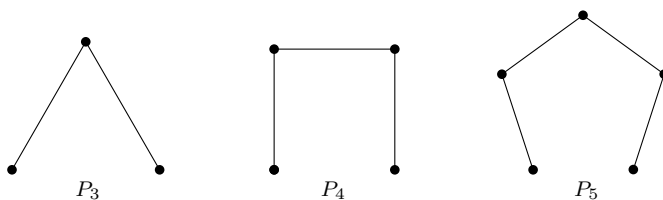
Dalšími základními typy grafů jsou kružnice na  $n$  vrcholech a cesta na  $n$  vrcholech.

<sup>10</sup>Obměněnou implikací k implikaci  $A \Rightarrow B$  rozumíme implikaci  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

**Definice 20.** *Kružnice na  $n$  vrcholech* (pro  $n \geq 3$ ) je graf  $C_n$  izomorfní grafu  $G = (V, E)$ , kde  $V = \{1, \dots, n\}$  a  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ .



**Definice 21.** *Cestou na  $n$  vrcholech* nazveme graf  $P_n$  izomorfní grafu  $G = (V, E)$ , kde  $V = \{1, \dots, n\}$  a  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ .

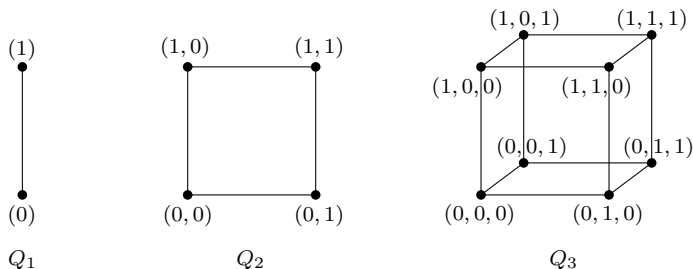


**Cvičení 22.** Pro která  $n \in \mathbb{N}$  je kružnice  $C_n$  izomorfní se svým doplňkem?

Následující grafy už sice nepatří mezi ty úplně základní, jsou ale hezké a zaslouží si své zvláštní jméno.

**Definice 23.** Graf nazveme  *$n$ -krychlí* ( $n \geq 0$ ), pokud jeho vrcholy jsou všechny  $n$ -tice nul a jedniček, přičemž dvě  $n$ -tice jsou spojeny hranou právě tehdy, když se liší na právě jedné pozici. Speciálně 0-krychle obsahuje pouze jediný vrchol.

Zavedené značení pro  $n$ -krychle je  $Q_n$  a z následujícího obrázku můžete získat představu, jak vlastně vypadají a proč je nazýváme krychlemi.

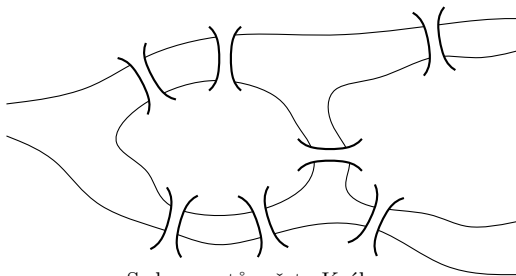


**Cvičení 24.** V závislosti na  $n$  urči, kolik vrcholů a kolik hran mají grafy  $K_n$ ,  $C_n$ ,  $P_n$  a  $Q_n$ .

### Eulerovské grafy

Dovol nám jednu krátkou historickou odbočku. V první polovině osmnáctého století mělo město Královec (dnes Kaliningrad), rozkládající se na obou březích řeky Pregole a dvou říčních ostrovech, dohromady sedm mostů (viz obrázek). Leonhard Euler jako první ukázal, že není možné

v rámci jedné procházky Královcem projít každý z mostů právě jednou (a to ani pokud nemusíme skončit tam, kde jsme začínali).



Sedm mostů města Královec

Tím se tedy dostáváme k další speciální třídě grafů – takzvaným eulerovským grafům. Ne- přesně řečeno to jsou ty grafy, které lze nakreslit jedním tahem bez zvednutí tužky z papíru tak, abychom začali a skončili ve stejném vrcholu a abychom každou hranu projeli právě jednou. Abychom si mohli říct přesnou definici, je třeba zavést několik základních pojmů.

**Definice 25.** O sledu (tahu) v grafu  $G$  řekneme, že je *uzavřený*, pokud  $v_0 = v_n$ , jinak je *otevřený*.

**Definice 26.** Tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany svého grafu, nazveme *eulerovským*.

Uzavřenou cestu takto definovat nemůžeme, protože z definice cesty v grafu nemůže požadovaná rovnost nastat. Proto místo toho definujeme *kružnici v grafu  $G$*  jako uzavřený tah v  $G$ , v němž se neopakují vrcholy (kromě prvního a posledního).

**Cvičení 27.** Rozmysli si, že každá kružnice v grafu  $G$  je zároveň uzavřeným tahem v grafu  $G$  a každý uzavřený tah v  $G$  je i uzavřeným sledem v  $G$ .

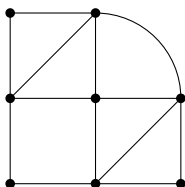
A nyní už toho víme dost na to, abychom si mohli pořádně definovat pojem eulerovských grafů.

**Definice 28.** O grafu řekneme, že je *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

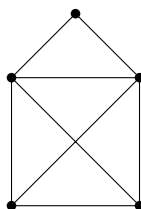
**Cvičení 29.** Které z následujících grafů jsou eulerovské?

a) Úplné grafy  $K_4, K_5, K_6$ .

b)



c)



Předcházející cvičení jsi jistě lehce rozlouskl(a). Možná by Tě ale zajímalo, jestli lze nějak jednoduše rozpoznat, jaký graf je eulerovský a jaký ne. Nebudeme Tě zbytečně napínat, odpověď na tuto otázku zní „Ano!“. Přesnou charakterizaci eulerovských grafů podává následující věta.

**Věta 30.** Graf  $G$  je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.



*Důkaz.* Nejprve si dokažme lehčí implikaci (tedy že daná podmínka je nutná). Pokud je graf eulerovský, existuje cesta mezi každými dvěma jeho vrcholy, a proto je souvislý. Navíc pokud jdeme po daném (uzavřeném) eulerovském tahu jedním směrem, do každého vrcholu vstoupíme tolikrát, kolikrát z něho vystoupíme, takže každý vrchol má sudý stupeň.

Ve zbytku důkazu předvedeme, že tato podmínka je zároveň podmínkou postačující. Nechtě tedy  $t = (v_0, e_1, \dots, v_n)$  je nejdelší možný tah v grafu  $G$  (pokud je takových tahů víc, vybereme libovolný z nich) a nechtě  $V'$  a  $E'$  jsou množiny vrcholů a hran obsažených v tahu  $t$ .

Dále si ukažme, že  $t$  je uzavřený. Kdyby nebyl, sousedil by jeho koncový vrchol s lichým počtem hran z  $E'$ . Ale stupeň všech vrcholů v  $G$  je sudý, proto můžeme tah alespoň o jednu hranu prodloužit, čímž dostáváme spor s tím, že má být nejdelší možný. Tah  $t$  je tedy skutečně uzavřený, takže  $v_0 = v_n$ .

Teď máme dva případy. Nejprve předpokládejme, že  $V \neq V'$ . Pak ze souvislosti grafu  $G$  plyne, že existuje hrana  $e = \{v_k, v'\}$ , kde  $v_k \in V'$  a  $v' \in V \setminus V'$ . Potom tah

$$t' = (v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

je delší než tah  $t$ , neboť má délku  $n + 1$ , čímž dostáváme spor s výběrem tahu  $t$ .

Už tedy víme, že  $V = V'$ . Stačí tak jen dokázat, že  $E = E'$ . Pro spor předpokládejme, že nějaká hrana  $f = \{v_k, v_l\}$ , kde  $v_k, v_l \in V'$ , nenáleží  $E'$ , ale náleží  $E$ . Pak má ale tah

$$t'' = (v_l, f, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

analogicky jako v minulém případě, délku  $n + 1$ . Tím jsme opět získali spor a důkaz je tak hotov.  $\square$

Možná Tě už ale napadla otázka, jaké grafy lze nakreslit jedním tahem s tím, že neskončíme v tom stejném vrcholu, ve kterém jsme začali. Takové grafy určitě znáš, je jim například poslední graf z předešlého cvičení. Formálně řečeno, jsou to grafy obsahující otevřený eulerovský tah. Těmto grafům budeme říkat *poloeulerovské*<sup>11</sup> a nalezení jejich charakterizace Ti přenecháme jako cvičení. Pokud bys nevěděl(a), jak na to, přeči si zadání následujícího cvičení, které dává na předchozí otázku odpověď bez důkazu. Náznak důkazu pak najdeš v návodu.

**Cvičení 31.** Ukaž, že graf  $G$  je poloeulerovský právě tehdy, když splňuje následující dvě podmínky.

- (i) Stupeň právě dvou jeho vrcholů je lichý, u ostatních je sudý.
- (ii)  $G$  je souvislý.

*Návod.* To, že dané podmínky jsou nutné, se dokáže podobně jako v předcházejícím důkazu. Pro důkaz opačné implikace si označme vrcholy s lichým stupněm  $u$  a  $v$ . Pokud jsou spojeny hranou  $e = \{u, v\} \in E$ , pak uvážime graf  $G' = G - e$ , v opačném případě graf  $G' = G + e$ , jenž má všechny vrcholy sudého stupně.  $G'$  má pak buď jednu nebo dvě komponenty, v nichž existují uzavřené eulerovské tahy. Zbytek už jistě hravě domyslíš sám (sama).  $\square$

A teď už budeš, stejně jako Euler, umět rozhodnout, jestli je možné se procházet po Královci a projít každý z mostů právě jednou. Když si místo obou břehů a obou ostrovů představíš vrcholy a místo mostů hrany, dostaneš něco jako graf. Některé vrcholy budou sice spojeny více hranami, ale důkazy předchozích vět a cvičení je možné zobecnit i pro takovéto „skorografy“<sup>12</sup>. Až si

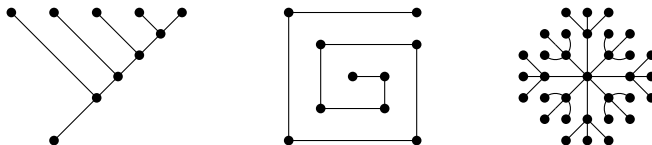
<sup>11</sup>Termín poloeulerovské grafy, na rozdíl od termínu eulerovské grafy, rozhodně není vžit a běžně používán.

<sup>12</sup>Povolíme-li volnější definici grafu, v níž umožníme spojení dvojice vrcholů více paralelními hranami, dostaneme definici *multigrafu*. Speciálně se někdy povolují i *smýčky*, tedy „hrany“ s oběma konci ve stejném vrcholu. Podobně jako pro grafy, také pro multigrafy platí spousta hezkých věcí, v tomto seriálu se jim ale věnovat nebudeme.

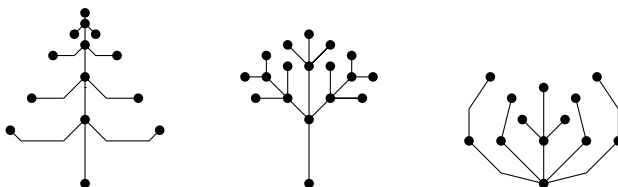
rozmysliš odpověď, nebudeš ji stejně moci využít, pokud se někdy v Kaliningradu vyskytněš. Z tehdejších mostů už totiž stojí jen dva, jeden byl přestavěn a několik dalších postaveno.

## Stromy

Zkus se teď podívat na následující obrázky a říct si, co mají společného.



Ano, hádáš správně, jsou to souvislé grafy, které neobsahují kružnici jako podgraf. Takovýmto grafům říkáme *stromy* a tradičně je značíme velkým písmenem  $T$ .<sup>13</sup> Pokud Tě zarazí, proč právě název „strom“, věz, že i opravdové stromy a křoviny jsou souvislé, ale neobsahují kružnice, jak ukazují následující obrázky.



Jistě s námi budeš souhlasit, že každý správný strom má listy (alespoň pokud bereme jehličí jako speciální formu listů). A právě o tom hovoří následující věta.

**Věta 32.** *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.*

*Důkaz.* Uvažme libovolný strom s alespoň dvěma vrcholy a označme jej  $T$ . Necht' posloupnost  $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$  je cesta v grafu  $T$  mezi vrcholy  $v_0$  a  $v_n$  taková, že žádná jiná cesta v grafu  $T$  není delší. Pak speciálně platí, že tuto cestu nejde prodloužit. Stejně tak nemůže vést žádná další hrana z jejích konců do zbytku cesty, proto mají vrcholy  $v_0$  a  $v_n$  stupeň jedna.  $\square$

Další věta hovoří o tom, že i když stromu odebereme nebo přidáme list, stromem být nepřestane. Její důkaz je lehký a plyne přímo z definice stromu, takže Ti jej rádi přenecháme jako jednoduché cvičení.

**Věta 33.** *Bud'  $G = (V, E)$  graf na alespoň dvou vrcholech a  $l$  list v  $G$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (1)  $G$  je strom.
- (2)  $G - l$  je strom.

Stromy jsou ale tak pěkné, že je lze ekvivalentně definovat mnoha způsoby. O některých z nich hovoří následující věta.

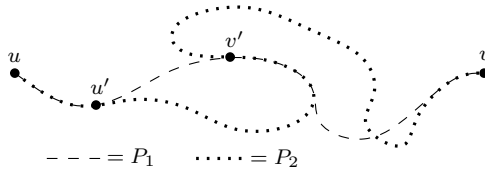
<sup>13</sup>Písmeno  $T$  opět pochází z anglického pojmu pro strom – *tree*.

**Věta 34.** Pro graf  $G = (V, E)$  jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1)  $G$  je strom.
- (2) Pro každé dva vrcholy  $u, v \in V$  existuje jediná cesta v  $G$  z  $u$  do  $v$ .
- (3)  $G$  je souvislý a odebráním libovolné hrany souvislým být přestane.
- (4)  $G$  je graf bez kružnic a přidáním libovolné hrany by v něm vznikla kružnice.
- (5)  $G$  je souvislý a  $|E| = |V| - 1$ .

*Důkaz.* Ekvivalenci všech tvrzení dokážeme postupně. Složením následujících implikací dostaneme všechny požadované vztahy.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Přímo z definice stromu víme, že nějaká cesta z  $u$  do  $v$  vede. Pokud by ale existovaly dvě ( $P_1$  a  $P_2$ ), nalezneme první místo od  $u$ , kde se tyto cesty rozdělí, a označíme ho  $u'$ . Z tohoto bodu se vydáme po cestě  $P_1$  a opět se zastavíme v momentě, kdy narazíme na vrchol  $v'$ , jenž je taky na cestě  $P_2$ . Úseky cest mezi vrcholy  $u'$  a  $v'$  označme  $P'_1$  a  $P'_2$ .



A teď si stačí uvědomit, že cesty  $P'_1$  a  $P'_2$  spolu sdílejí pouze své konce – vrcholy  $u'$  a  $v'$ . Jejich spojením tedy dostáváme kružnici, což je ale ve sporu s definicí stromu.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Mějme graf  $G$  a libovolnou hranu  $e = \{u, v\}$ . Potom posloupnost  $(u, e, v)$  je zjevně cesta mezi  $u$  a  $v$ . Pokud bychom odstraněním této hrany dostali souvislý graf, musí existovat nějaká druhá cesta mezi  $u$  a  $v$ , čímž dostáváme spor.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Souvislost grafu  $G$  už máme, stačí nám tedy ukázat, že neobsahuje kružnici. Pro spor předpokládejme, že tam existuje kružnice  $C$ , a označme  $e$  libovolnou její hranu. Ukážeme, že pak graf  $G - e$  je souvislý. Ze souvislosti víme, že každé dva vrcholy jsou v grafu  $G$  propojeny cestou. Mohou nastat dva případy:

1. Tato cesta hranu  $e$  nevyužívá, pak bez změny existuje taky v  $G - e$ .
2. Cesta prochází hranou  $e$ . Můžeme ji upravit na sled v  $G - e$  tím, že místo „kroku“ přes  $e$  „obejdeme“ zbytek kružnice  $C$ .

Každé dva vrcholy v  $G - e$  jsou tedy spojeny sledem, což k souvislosti stačí.

(2)  $\Rightarrow$  (4): Mějme graf  $G$  a libovolnou nehranu  $e = \{u, v\}$ . Víme, že mezi vrcholy  $u$  a  $v$  vede cesta, přidáním hrany  $e$  z ní tedy vytvoříme kružnici.

(4)  $\Rightarrow$  (1): Už máme, že  $G$  neobsahuje kružnici, ukažme tedy, že je také souvislý. Vezměme si libovolné dva vrcholy  $u$  a  $v$ . Pokud jsou přímo spojeny hranou, pak tato hrana je zároveň i cesta mezi nimi.

Předpokládejme tedy, že mezi  $u$  a  $v$  hrana není. Dle (4) přidání libovolné hrany vytvoří kružnici, speciálně tedy musí existovat i cesta mezi  $u$  a  $v$ , jinak by hrana  $\{u, v\}$  kružnici nevytvořila.

(1)  $\Rightarrow$  (5): Souvislost máme opět přímo z definice stromu a vztah počtu hran a vrcholů dokážeme indukci dle počtu vrcholů. Pro graf s jediným vrcholem triviálně platí, protože  $|V| = 1$  a  $|E| = 0$ .

O stromě s alespoň dvěma vrcholy už víme, že má alespoň dva listy. Označme  $l$  libovolný z nich, pak už taky víme, že  $G - l$  je opět strom, jenž má ale menší počet vrcholů. Teď můžeme uplatnit indukční předpoklad (tedy rovnost  $|E(G - l)| = |V(G - l)| - 1$ ), přičemž zároveň platí i  $|E(G - l)| = |E| - 1$  (s „odtržením“ listu jsme odebrali také jednu hranu) a  $|V(G - l)| = |V| - 1$ . Z těchto tří rovností dostaneme požadovaný vztah.

(5)  $\Rightarrow$  (1): Opět využijeme indukci dle počtu vrcholů. Jediný graf s jediným vrcholem je zároveň i strom. Pro větší grafy víme ze vztahu

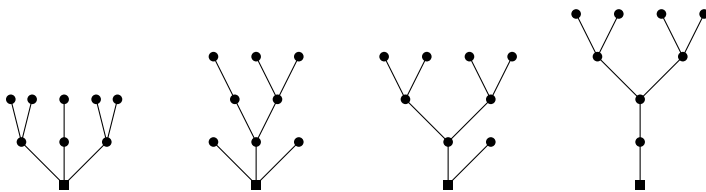
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E| = 2 \cdot |V| - 2,$$

že musí existovat alespoň jeden vrchol  $l$ , jenž má nanejvýš jednoho souseda. Pokud by ale neměl žádného, nemůže být graf souvislý, proto vrchol  $l$  má právě jednoho souseda a je tedy list.

Podívejme se na graf  $G - l$ : oproti grafu  $G$  má o jednu hranu a jeden vrchol méně, proto vztah  $|E(G - l)| = |V(G - l)| - 1$  platí, stejně tak je graf  $G - l$  souvislý (jinak by nebyl souvislý ani graf  $G$ ). Použitím indukčního předpokladu dostáváme, že  $G - l$  je strom, a tedy z předešlé věty plyne, že i  $G$  musí být strom.  $\square$

V přírodě má většina stromů svůj kořen. Jinak tomu nebude ani tady, protože někdy se nám při práci se stromy může hodit je zakořenit.

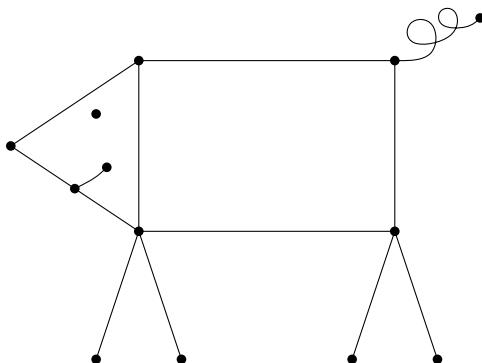
**Definice 35.** *Zakořeněným stromem* budeme rozumět dvojici  $(T, r)$ , kde  $T$  je strom a  $r$  jeden z jeho vrcholů, běžně označovaný jako *kořen*.<sup>14</sup>



Několik variant zakořenění jednoho stromu

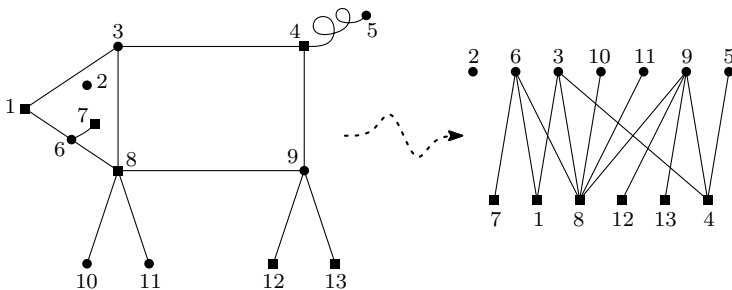
## Bipartitní grafy

Další poměrně rozsáhlou skupinou jsou takzvané *bipartitní grafy*. To jsou ty grafy, jejichž vrcholy se dají rozdělit do dvou skupinek tak, aby žádná hrana nevedla uvnitř některé z nich. Tyto skupinky také nazýváme *partity* grafu. Jeden takový graf je na následujícím obrázku.



<sup>14</sup>Písmeno  $r$  pochází, stejně jako minule, z anglického slova pro kořen – *root*.

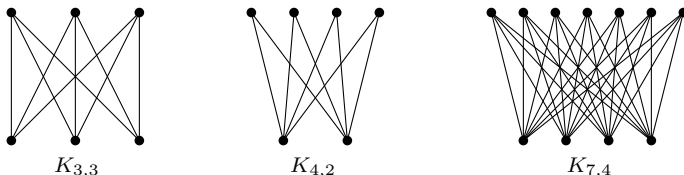
A jak tedy vypadá to rozdělení do skupinek?



Opět přidáním slovíčkem *úplný* budeme označovat ty bipartitní grafy, které mají všechny možné hrany. V zkrácené verzi je budeme značit  $K_{m,n}$ , kde  $m$  a  $n$  představují počty vrcholů v jednotlivých skupinkách. Možná už znáš (relativně starou) grafovou hříčku, ve které vystupuje úplný bipartitní graf  $K_{3,3}$ :

**Úloha 36.** V jistém kraji jsou tři domky a tři studny. Je možné spojit každý z těchto domků s každou ze studní, pokud se cesty nesmějí křížit?

Následující obrázek ukazuje několik dalších úplných bipartitních grafů.



### Charakterizace bipartitních grafů

Když už teď víme, co to bipartitní grafy vůbec jsou, můžeme se ještě podívat na způsoby, jak tuto vlastnost odhalit.

**Cvičení 37.** O následujících grafech rozhodni, jestli jsou bipartitní, nebo ne:

- a) cesty  $P_3, P_4, P_5, P_6$ ;
- b) kružnice  $C_3, C_4, C_5, C_6$ ;
- c) úplné grafy  $K_3, K_4, K_5, K_6$ ;
- d) krychle  $Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ ;
- e) stromy.

Pokud jsi toto cvičení poctivě vyřešil(a), část následujícího tvrzení Tě už asi nepřekvapí.

**Věta 38.** Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky jako podgraf.

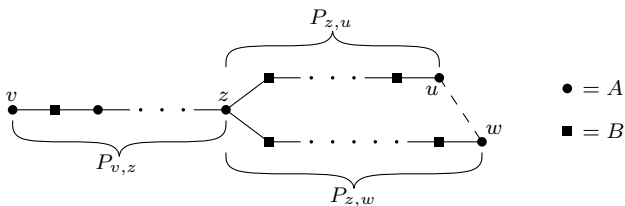
*Důkaz.* Jeden směr implikace je poměrně jednoduchý: označíme-li si vrcholy jedné partity  $A$  a druhé  $B$ , pak na libovolné kružnici se musejí tato písmena střídat, což přímo zajišťuje sudou délku kružnice.

Pro opačný směr předpokládejme, že máme graf bez lichých kružnic. Opět budeme označovat vrcholy písmeny  $A$  a  $B$ : začneme libovolným vrcholem  $v$ , který dostane  $A$ , pak všichni jeho sousedi budou  $B$ , všichni sousedi sousedů dostanou opět  $A$  a tak dále. Tak budeme postupovat, dokud buď nebudou označeny všechny vrcholy, nebo dokud nám nebude algoritmus přikazovat

„přejmenovat“ nějaký vrchol. V případě nesouvislého grafu nejprve označíme vrcholy jedné komponenty a následně budeme stejně pokračovat na dalších komponentách.

Pokud jsme označili všechny vrcholy, podařilo se nám určit partity a tím také dokázat, že graf je skutečně bipartitní. V opačném případě označme  $u$  vrchol, který měl dostat druhé písmeno, a  $w$  jeho souseda, jenž toto „dvojoznačení“ způsobil. Určitě platí, že oba tyto vrcholy mají stejné písmeno.

Když se teď zpětně podíváme na všechny vrcholy, které zapříčinily označení pro vrcholy  $u$  a  $w$ , dostaneme cesty  $P_{v,u}$  a  $P_{v,w}$  z vrcholu  $v$  do  $u$  a  $w$ . Označme ještě poslední společný vrchol obou cest  $z$ .



Jedna z možných situací

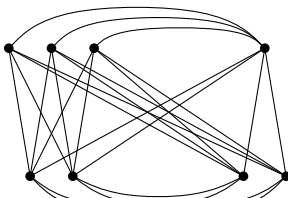
Cesty  $P_{z,u}$  a  $P_{z,w}$  vytváří spolu s hranou  $\{u, w\}$  kružnici  $C$ . Už víme, že vrcholy  $u$  a  $w$  jsou označeny stejným písmenem, proto mohou nastat pouze dva případy:

1. Vrchol  $z$  má stejné písmeno jako  $u$  a  $v$ , pak cesta  $P_{z,u}$  má sudý počet hran, stejně tak i cesta  $P_{z,w}$ . Spolu s hranou  $\{u, w\}$  má pak kružnice  $C$  lichý počet hran, což je spor s naším předpokladem.
2. Písmeno u vrcholu  $z$  se liší od písmen  $u$  a  $v$ , pak obě cesty  $P_{z,u}$  i  $P_{z,w}$  obsahují lichý počet hran, což spolu s hranou  $\{u, w\}$  dává opět lichý počet hran pro kružnici  $C$ . Znovu tedy dostáváme spor. □

Postup označování vrcholů písmeny, který jsme použili v důkazu, můžeme taky použít na libovolný graf, o němž potřebujeme určit, je-li bipartitní. Buď se nám podaří označit všechny vrcholy, nebo nalezneme nějakou lichou kružnici, která „nebipartitnost“ grafu potvrdí.

### Vícepartitní grafy

Bipartitní grafy se dají zobecnit na grafy  $k$ -partitní – vrcholy těchto grafů lze rozdělit na  $k$  disjunktních množin tak, aby konce každé hrany byly v různých množinách. Úplnost je u těchto grafů podobná jako u těch bipartitních –  $K_{n_1, \dots, n_k}$  označuje graf, který má  $k$  skupin vrcholů (velikostí  $n_1$  až  $n_k$ ) a každá dvojice vrcholů z různých skupinek je spojena hranou.



$K_{3,2,2,1}$

## Závěrem

Pokud jsi dočetl(a) až sem, můžeš si gratulovat, protože těmito odstavci první díl seriálu končí. Ještě než se ale odmlčíme, splatíme dluh, který vůči Tobě máme.

Asi sis všiml(a), že jsme na začátku slibovali udávání příkladů z reálného světa, které budou demonstrovat možnosti praktických aplikací teorie grafů. A také Ti asi neuniklo, že jsme se potom o téměř žádném využití nezmínili. Nyní přichází čas to napravit.

Jednoduchoučkým důsledkem principu sudosti je fakt, že vrcholů lichého stupně je v grafu sudý počet. Pokud tedy v grafu najdeme jeden vrchol lichého stupně, víme bez hledání, že alespoň jeden další vrchol má lichý stupeň. Pokud tedy na mapě v autoatlasu najdeš město, ze kterého vychází lichý počet silnic, můžeš ihned usoudit, že z nějakého jiného města také povede lichý počet silnic.<sup>15</sup> Navíc o daném systému měst a silnic můžeš s jistotou prohlásit, že nelze projet každou silnici právě jednou (a navštívit všechna města) tak, abychom se vrátili do města, ze kterého jsme vyjeli. Bez poznatku teorie grafů bys na něco takového přišel (přišla) asi poměrně těžko.

Dobře, uznáváme, že výše uvedené aplikace jsou možná hezké, ale asi by se bez nich dalo žít. Pokud by ses tedy chtěl(a) dozvědět o něčem, co má skutečně použitelné aplikace, nastuduj si třeba hledání nejkratší cesty v grafu.<sup>16</sup> Zatím jsme si řekli, co to je cesta. Neřekli jsme si ale, jak poznat, jestli mezi dvěma vrcholy vede, a pokud ano (a pokud jich je víc), jaká je nejkratší. Navíc se dá problém nalezení nejkratší cesty ještě zesložitit tím, že každé hraně přiřadíme číslo reprezentující délku dané hrany a délkou cesty budeme rozumět součet délek všech jejích hran. I takový problém ale je řešitelný a k řešení pomohla právě teorie grafů. To, že se řešení výše zmíněného problému dá použít pro řešení reálných problémů, je jasné – například pro hledání nejkratší cesty z jednoho města do druhého. A hlavně něco podobného dělá třeba IDOS, když Ti vyhledává nejrychlejší spojení.

Jako malou odměnu za vytrvalost nabízíme řešení některých cvičení, abys měl(a) možnost si zkontrolovat správnost svých výsledků:

**6.** Grafy na obrázcích a) a b) navzájem izomorfní jsou. Graf na obrázku c) naopak obsahuje kružnice na čtyřech vrcholech, které ale zbylé dva grafy neobsahují, proto s nimi izomorfní být nemůže.

**11.** Neexistuje. Musel by obsahovat izolovaný vrchol a zároveň vrchol sousedící se všemi ostatními vrcholy.

**22.**  $\overline{C_n} \cong C_n$  platí pouze pro  $n = 5$ .

**24.** Úplný graf  $K_n$  má  $n$  vrcholů a  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  hran, kružnice  $C_n$  má  $n$  vrcholů i hran a cesta  $P_n$  má  $n$  vrcholů a  $n - 1$  hran. Krychle  $Q_n$  obsahuje  $2^n$  vrcholů a hran má  $n \cdot 2^{n-1}$ .

**29.** Eulerovský je graf  $K_5$  a graf z obrázku b), zbylé grafy eulerovské nejsou.

**37.** Bipartitní jsou všechny cesty, krychle a stromy, dále ještě kružnice  $C_4$  a  $C_6$ , ostatní grafy bipartitní nejsou.

A to už je od nás pro tuto chvíli opravdu vše. Děkujeme Ti za pozornost a za to, žes měl(a) trpělivost a dočetl(a) text až sem. Přejeme Ti mnoho štěstí v soutěžní sérii a těšíme se na společné absolvování druhého dílu.

<sup>15</sup>To ovšem za předpokladu, že žádná silnice nekončí uprostřed pole.

<sup>16</sup>V seriálu se tímto tématem zabývat nebudeme. K nastudování doporučujeme knížku *Kapitoly z diskrétní matematiky* od profesorů Matouška a Nešetřila; samozřejmě lze také hledat na internetu. Zdrojů je mnoho.

# Seriál – Letem grafovým světem II

Vítáme Tě na začátku druhého dílu našeho seriálu. Pokud čteš tyto řádky, nejspíš to znamená, že jsme Tě jeho prvním dílem moc neodradili nebo ses nám rozhodl(a) dát ještě jednou šanci, což nás samozřejmě těší.

Jak jsme slíbili v úvodu první části, v tomto dílu si představíme „systém různých reprezentantů“, což je sice věc ne úplně grafová, ale zato má (nejen) v teorii grafů několik hezkých důsledků a aplikací. Pokud se ho už nemůžeš dočkat, budeš se muset vyzbrojit trochou trpělivosti. V první půlce tohoto dílu si totiž ještě ukážeme, jak umíme grafy barvit a k čemu nám to pomůže. Navíc uděláme krátkou odbočku k rovinným grafům.

## Barevnost grafu

Nebudeme to už dál natahovat, vezmeme rovnou do rukou štětec a kbelík s barvou a pustíme se do práce. Hlavním důvodem barvení grafů (samozřejmě kromě estetického cítění) je, že chceme odlišit „sousedící“ objekty (vrcholy nebo hrany), proto jim budeme přidělovat různou barvu.

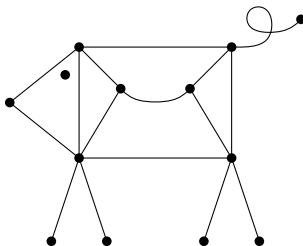
Nepochybujeme o tom, že znáš mnoho odstínů (především šedi), ale abychom Tě (i sebe) ušetřili vět typu „Vrchol  $u$  obarvíme tyrkysově-azurovou, protože olivově zelenou jsme už nabarvili vrchol  $v$ .“, budeme barvičky raději číslovat.

**Definice 1.** O grafu  $G$  řekneme, že je *vrcholově  $k$ -obarvitelný*, pokud existuje zobrazení  $b: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  splňující podmínku  $b(u) \neq b(v)$ , kdykoliv jsou vrcholy  $u$  a  $v$  spojeny hranou. *Vrcholovou barevností* grafu  $G$  pak rozumíme nejmenší  $k$ , pro které je  $G$  vrcholově  $k$ -obarvitelný, a značíme ji  $\chi(G)$ .<sup>1</sup>

My jsme už obarvování vlastně potkali v prvním dílu, i když jsme tomu říkali jinak. Vrcholově  $k$ -obarvitelné grafy totiž nejsou nic jiného než  $k$ -partitní grafy.

**Definice 2.** Graf  $G$  nazveme *hranově  $k$ -obarvitelným*, pokud existuje zobrazení  $b: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , kde  $b(e) \neq b(f)$  platí pro všechny dvojice hran  $e$  a  $f$  mající společný vrchol. *Hranová barevnost* grafu  $G$  je pak opět nejmenší  $k$  takové, že  $G$  je hranově  $k$ -obarvitelný. Značíme ji  $\chi'(G)$ .

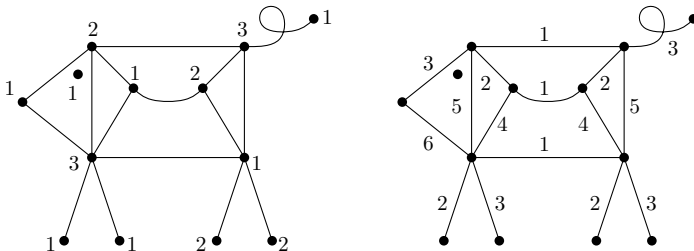
**Příklad 3.** Jakou vrcholovou a hranovou barevnost má graf  $G$  na obrázku?



<sup>1</sup>Podobně jako při značení v prvním díle, i tady pochází písmeno  $\chi$  (malé řecké písmeno *chí*) z anglického *chromatic number*.



*Řešení.* Protože hlavu prasátka tvoří tři vrcholy spojené každý s každým, musí být  $\chi(G) \geq 3$ . Podobně když se podíváme na vrchol mezi hlavou a předními nohami, zjistíme, že sousedí se šesti hranami, proto taky  $\chi'(G) \geq 6$ . Že tyto počty barev opravdu stačí, ukazují následující obrázky.  $\square$



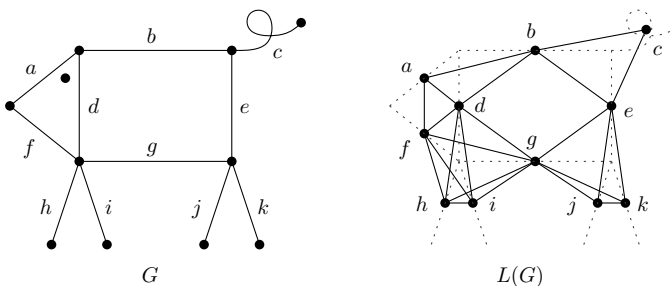
**Cvičení 4.** Jakou vrcholovou a hranovou barevnost mají grafy  $K_n$ ,  $C_n$ ,  $P_n$  a  $Q_n$  definované v prvním dílu?

Ve skutečnosti existuje ještě třetí varianta barvení. Bývá zvaná *totální* a občas značená  $\chi''$ . Při ní barvíme vrcholy i hrany zároveň, přičemž žádné sousedící hrany nesmějí sdílet společnou barvu a stejně tak hrana nesmí mít barvu svého koncového vrcholu. V páté úloze letošní první série jsme tedy chtěli dokázat, že  $\chi''(K_n) = n$ .

Když známe barvení hran, jsme už jen krůček od grafu, kde hrany „povýšíme“ na vrcholy.

**Definice 5.** Pro graf  $G$  definujeme *hranový graf*  $L(G)$ , jehož množina vrcholů je  $E(G)$  a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když jim odpovídající hrany v  $G$  měly společný vrchol.<sup>2</sup>

Aby sis lépe představil(a), jak vlastně hranový graf vypadá, máš tu názorný obrázek.



Určitě sis už promyslel(a), že platí  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ , a možná Tě vzápětí napadla otázka, co nového nám hranový graf přináší. Odpověď je poměrně jednoduchá – usnadní nám život při definici dalších hranových variant barevností a také při některých důkazech.

**Cvičení 6.** Které grafy  $G$  jsou izomorfní se svými hranovými grafy  $L(G)$ ?

<sup>2</sup>Původ písmena  $L$  je opět v anglickém výrazu *linegraph*.

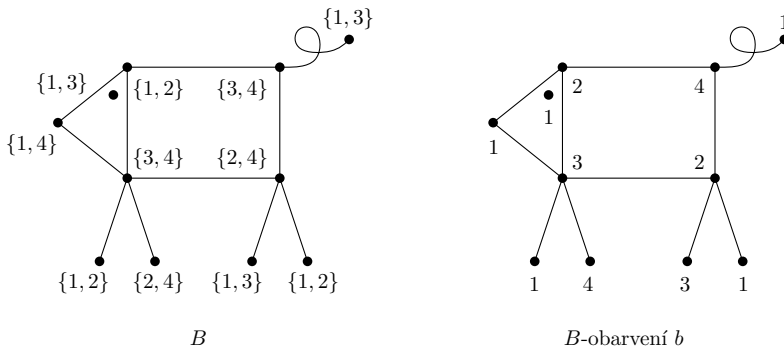
## Méně tradiční barevnosti

Obě dosud zmiňované barevnosti povolovaly barvit všechny vrcholy nebo hrany všemi barvami od 1 až po  $k$ . To nám ale nemusí vždy vyhovovat.

Představ si třeba město, kde se na radnici rozhodli vymalovat všechny domy tak, aby žádné dva sousední neměly stejnou barvu. Přitom ale chtěli umožnit obyvatelům ovlivnit, jakou barvu jejich dům dostane. Proto každý majitel domu měl možnost si vybrat libovolných  $k$  barev, jež směly být na jeho domku použity. Podobnou situaci řeší následující definice.

**Definice 7.** Nechť  $G$  je graf,  $X$  je dost velká množina barev a zobrazení  $B: V(G) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  je libovolné přiřazení množin barev vrcholům  $G$ .<sup>3</sup> Pak řekneme, že graf  $G$  je  $B$ -obarvitelný, pokud existuje zobrazení  $b: V(G) \rightarrow X$ , kde  $b(u) \neq b(v)$ , kdykoliv jsou vrcholy  $u$  a  $v$  spojeny hranou, a navíc je pro každý vrchol  $v$  splněna podmínka  $b(v) \in B(v)$ . Dále graf  $G$  nazveme  $k$ -vybíravým, pokud je  $B$ -obarvitelný pro každou funkci  $B$ , jež splňuje podmínku  $|B(v)| = k$  pro každý vrchol  $v$ . Nakonec *vybíravost* grafu  $G$  rozumíme nejmenší  $k$ , pro které je  $G$  vrcholově  $k$ -vybíravý, a často ji značíme  $\text{ch}(G)$ .<sup>4</sup>

Na tomto obrázku je znázorněno přiřazení množin barev  $B$  a jedno z možných  $B$ -obarvení  $b$ .



Pokud se Ti už povedlo strávit tuto definici, možná sis taky všiml(a) následujícího vztahu barevnosti a vybíravosti grafu.

**Lemma 8.** Pro každý graf  $G$  platí  $\chi(G) \leq \text{ch}(G)$ .

*Důkaz.* Nechť  $\text{ch}(G) = k$ . Pak je graf  $G$  z definice  $B$ -obarvitelný pro libovolné zobrazení  $B: V(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$  splňující  $|B(v)| = k$  pro každý vrchol  $v$ . Speciálně to tedy platí i pro funkci  $B$ , kde  $B(v) = \{1, \dots, k\}$  pro všechny vrcholy, čímž se dostáváme přímo k definici  $k$ -obarvitelnosti. Musí tedy platit  $\chi(G) \leq k = \text{ch}(G)$ .  $\square$

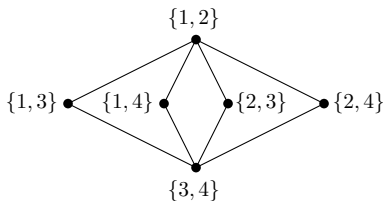
Přitom opačná nerovnost rozhodně platit nemusí.

**Příklad 9.** Existuje graf  $G$  splňující  $\chi(G) < \text{ch}(G)$ .

*Řešení.* Takovým grafem je například  $K_{4,2}$ . Jelikož je bipartitní, platí  $\chi(K_{4,2}) = 2$ . Jak ukazuje následující obrázek, umíme vrcholům přiřadit dvouprvkové množiny barev tak, abychom z nich platné obarvení nevybrali. Proto  $\text{ch}(K_{4,2}) > 2$ .

<sup>3</sup>Symbolem  $\mathcal{P}(X)$  označujeme množinu všech podmnožin množiny  $X$ .

<sup>4</sup>Písmeno  $\text{ch}$  pochází z anglického pojmu *choosability*; v literatuře se taky vyskytuje označení  $\chi_L$  – z anglického *list* (seznam).



Zadání jsme už sice splnili, ale ještě můžeme ukázat, že  $\text{ch}(K_{4,2}) = 3$ . Když totiž každému vrcholu přiřadíme seznam tří barev, můžeme obarvit vrcholy stupně čtyři libovolně a každému ze zbylých vrcholů stejně zůstane alespoň jedna možná barva.  $\square$

Ještě nám dovol v krátkosti zmínit jedno barvení. V angličtině se většinou označuje pojmem  $L(p, q)$ -labeling, což můžeme do češtiny překládat jako  $L(p, q)$ -značkování. Opět jde o zobrazení  $l: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , tentokrát ale máme podmínky dvě:

- (1) Kdykoliv jsou vrcholy  $u$  a  $v$  od sebe na vzdálenost jedna (tedy spojeny hranou), musí platit  $|l(u) - l(v)| \geq p$ .
- (2) Pro každou dvojici vrcholů  $u$  a  $v$  ve vzdálenosti dva ( $u$  a  $v$  mají společného souseda) musí platit  $|l(u) - l(v)| \geq q$ .

Hodnotou  $\lambda_{p,q}(G)$  pak označujeme minimální  $k$  potřebné k existenci  $L(p, q)$ -značkování grafu  $G$ . Sice se jím v tomto dílu zabývat nebudeme, ale v tom příštím Ti ukážeme jeho uplatnění v každodenním životě. Teď můžeme jen naznačit, že to má něco společného s rádiovým vysíláním.

## Rovinné grafy

Od barvení grafů teď na chvilku utečeme a povíme si něco o tzv. rovinných grafech. Jsou to grafy, o kterých se mluví a píše poměrně často, takže pokud by Ti náš stručný výklad nestačil, můžeš si o nich snadno dohledat více informací. Pokud Tě naopak rovinné grafy nezajímají a chtěl(a) bys raději obarvovat, zkus zatnout zuby a následující odstavce si přečti jen přecházejícím pohledem. Zanedlouho si totiž ukážeme, že rovinné grafy a obarvování k sobě mají velmi blízko.

**Definice 10.** O grafu  $G$  řekneme, že je *rovinný*, pokud ho lze zakreslit bez křížení hran.

Tato definice samozřejmě není formální, protože nikde nespécifikujeme, co to znamená „jít nakreslit bez křížení hran“. Intuitivní definice nám ale bude bohatě postačovat.<sup>5</sup> Abychom se vyhnuli případným nedorozuměním, měli bychom ale zdůraznit, že v definici předpokládáme, že grafy kreslíme do roviny (proto jim říkáme rovinné), a ne třeba na torus nebo Möbiovu pásku.

To, že nás zajímá, jak je to s grafy, které zakreslujeme do roviny, je zcela pochopitelné. (Už jen proto, že většinou kreslíme grafy na papír, který je rovný.) Jenže pomocí grafů často chceme reprezentovat objekty globálních rozměrů, například síť ropovodů na Zemi. Země je ale kulatá, takže je přirozené se rovněž ptát, jak vypadají grafy, které lze bez křížení nakreslit na povrch koule. Kupodivu se ukazuje, že jsou to právě rovinné grafy.

Proč? Máme-li graf nakreslený na kouli, můžeme předpokládat, že je nakreslený neprůsvitnou barvou na průhledné kouli. Potom kouli postavíme na rovinu tak, aby „horní bod“ koule nebyl obarven, a představíme si, že do tohoto bodu umístíme zdroj světla. Náš graf pak bude vrhat na rovinu stín – reprezentaci stejného grafu v rovině. Naopak máme-li graf v rovině, postavíme na rovinu kouli a nakreslíme na ni takový graf, aby se jeho stín rovnal obrazci na rovině. Přitom si určitě snadno rozmyslíš, že potom se buď hrany kříží v obou obrázcích, nebo ani v jednom.

<sup>5</sup>Pokud by Tě zajímala „pořádnější“ definice, můžeš se podívat třeba na Wikipedii.

Jinak řečeno, pokud umíme nějaký graf reprezentovat bez křížení hran v rovině, umíme to i na kouli – a naopak.

Pokud toužíš po matematických termínech, věz, že jsme v předchozím odstavci popsali známé zobrazení ze sféry do roviny zvané stereografická projekce.

S úsměvem na tváři se můžeme vrátit ke zkoumání rovinných grafů. Mějme graf a nějaké jeho *rovinné nakreslení*<sup>6</sup>. Toto nakreslení rozdělí rovinu hranami grafu na několik oblastí. Těmto oblastem budeme říkat *stěny*. Každé nakreslení má zřejmě jednu stěnu – tu „neomezenou okolo grafu“ – a případně nějaké další. Zajímavé je, že ať nakreslíme rovinný graf jakkoliv, vždy bude mít stejný počet stěn. To vyplývá z následující věty (tak, že ji postupně aplikujeme na jednotlivé komponenty souvislosti).

**Věta 11.** (Eulerova formule) *Nechť  $G = (V, E)$  je souvislý rovinný graf a nechť  $s$  je počet jeho stěn v nějakém rovinném nakreslení. Pak platí*

$$|V| - |E| + s = 2.$$

*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle počtu hran  $|E|$ . Pokud  $|E| = 0$ , pak nutně  $|V| = 1$  a  $s = 1$  a rovnost platí.

Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna rovinná nakreslení všech grafů takových, že  $|E| \leq n - 1$  pro nějaké  $n$  přirozené. Chceme ukázat, že pak platí i pro libovolný případ  $|E| = n$ . Rozlišíme přitom dva případy.

1. Graf  $G$  neobsahuje kružnice. Potom  $G$  je strom a  $|V| = |E| + 1$  a  $s = 1$ , takže tvrzení platí. (To, že  $s = 1$ , nebudeme formálně dokazovat a vystačíme si jen s tím, že je to „intuitivně jasné“.)
2. Graf  $G$  obsahuje alespoň jednu kružnici. Pak uvažme jednu hranu  $e$ , která leží na nějaké kružnici v  $G$ , a tu odmažeme. Tím získáme rovinné nakreslení grafu  $G - e$ , který má  $n - 1$  hran, a proto pro něj dokazovaný vzorec platí. Přitom jsme odebrali jednu hranu a počet vrcholů jsme nezměnili. Aby platila rovnost i pro graf  $G$ , museli jsme odebráním hrany ubrat i jednu stěnu. To ale skutečně nastane, protože odebráním hrany přestane být vnitřek kružnice samostatnou stěnou. (I zde se spokojíme s tím, že je tato skutečnost „zřejmá“, a nebudeme ji nějak podrobně dokazovat.)

□

Právě dokázaná věta má několik zajímavých důsledků. Jeden z nich je ten, že stejný vzorec platí i pro mnohostěny. Proč tomu tak je, můžeme nahlédnout následujícím způsobem. Vezmeme si libovolný mnohostěn a umístíme ho do nějaké koule tak, aby její střed ležel uvnitř daného tělesa. Potom promítneme vrcholy a hrany na povrch koule. (V řeči světélek, kterou jsme používali u stereografické projekce, umístíme zdroj světla do středu koule a výsledkem bude stín na jejím povrchu.) Výsledek pak zobrazíme stereografickou projekcí do roviny. Tím získáme graf, jehož vrcholy, hrany a stěny odpovídají po řadě vrcholům, hranám a stěnám mnohostěnu (odtud dokonce terminologie pro grafy pochází). Hrany tohoto grafu se navíc nebudou křížit a graf bude souvislý, takže pro něj, a tím pádem i pro mnohostěn, rovnost bude platit.

Dalším důsledkem je to, že existuje jen pět typů platónských těles<sup>7</sup> – pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. K důkazu se použije stejné zobrazení těles na rovinné grafy, jaké jsme použili v předchozím odstavci. Je ale třeba dokázat jedno pomocné (nikterak složité) tvrzení, které přesahuje rámec seriálu, takže Tě odkážeme na Kapitoly z diskrétní matematiky<sup>8</sup>, kde se můžeš dočíst víc podrobností.

<sup>6</sup>Rovinným nakreslením grafu budeme intuitivně rozumět obrázek bez křížení hran, kterým reprezentujeme daný graf.

<sup>7</sup>Platónské těleso neboli pravidelný mnohostěn je mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky takové, že se jich v každém vrcholu stýká stejný počet.

<sup>8</sup>Knihy od pánů Matouška a Nešetřila, kterou jsme doporučovali už minule.

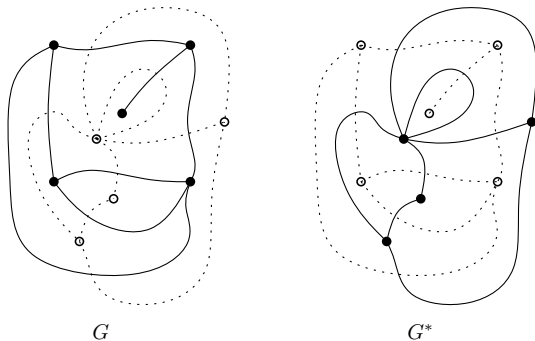
Ještě se nám budou hodit dva pojmy, které s rovinnými grafy úzce souvisejí.

**Definice 12.** Rovinné nakreslení grafu  $G$  nazveme *triangulací*, pokud všechny jeho stěny jsou tvořeny trojúhelníky<sup>9</sup>. Pokud budeme trojúhelníkovou hranici požadovat od všech stěn kromě vnější (té „neomezené“), budeme mluvit jenom o *skorotriangulaci*.

**Definice 13.** Mějme rovinné nakreslení grafu  $G$ . Pak jeho *duální graf*  $G^*$  má vrchol za každou stěnu grafu  $G$  a hrana spojuje dva vrcholy právě tehdy, když příslušné stěny sdílely společnou hranu.

V definici jsme si dovolili jednu nepřesnost. Pokud se například v grafu  $G$  vyskytuje most (hrana, jejíž odebrání způsobí ztrátu souvislosti), pak po obou „stranách“ tohoto mostu je ta samá stěna. V duálním grafu tedy vznikne hrana s oběma konci ve stejném vrcholu. Pokud sis četl(a) první díl opravdu pozorně, možná si vzpomeneš, že takoveto hraně jsme říkali smyčka. Stejně tak by se v duálním grafu mohly objevit paralelní hrany (pokud dvě stěny vzájemně sousedí více hranami), proto bychom v definici měli správně psát multigraf. Většinou ale budeme uvažovat grafy bez mostů a tudíž duální grafy bez smyček. Paralelní hrany nám při barvení grafů nezpůsobí žádnou komplikaci a při ostatních grafových úlohách se s nimi většinou taky nějak vypořádáme. Například často budeme navíc požadovat, aby duální graf byl opravdu grafem.<sup>10</sup>

Následující obrázek zobrazuje jedno rovinné nakreslení multigrafu  $G$  a jemu příslušný duální multigraf  $G^*$ .



Definice duálního grafu má navíc další drobný problém – není úplně jednoznačná. Jeden rovinný graf totiž může mít několik vzájemně neizomorfních duálních grafů, jež vznikly z různých rovinných nakreslení. Ve většině případů nám to ale stejně nebude vadit, protože si daný graf jednou nakreslíme a na zbylá nakreslení zapomeneme.<sup>11</sup> Trochu volněji tedy můžeme brát duální graf jako operaci „ $G$  s hvězdičkou“, kde budeme stále uvažovat to samé nakreslení.

## Barevnost rovinných grafů

Dovol nám další odbočku do historie. Pokud o ni nestojíš, můžeš následujících několik odstavců přeskočit.

Někdy kolem roku 1852 si Francis Guthrie všiml zajímavé skutečnosti – na obarvení mapy hrabství tehdejší Anglie mu vždy stačily čtyři barvy. Spolu se svým bratrem Fredericem toho

<sup>9</sup>Jak už sis určitě všiml(a), v teorii grafů se používají geometrické pojmy mírně jinak. Trojúhelník typicky znamená kružnici  $C_3$ .

<sup>10</sup>K tomu stačí požadovat, aby neměl vrcholy stupně dva ani takzvané *artikulace*, tedy vrcholy, jejichž odebrání rozdělí graf na více komponent.

<sup>11</sup>Většina skutečností stejně platí bez ohledu na konkrétní nakreslení grafu.

času studoval pod vedením slavného matematika Augusta de Morgana, proto za ním zašli s dotazem, zda čtyři barvy stačí pro libovolnou mapu. Až de Morgan rozšířil tento problém mezi matematickou společnost.

V grafové terminologii bychom mohli tuto domněnku (v současnosti již dokázanou) zapsat následovně.

**Věta 14.** (O čtyřech barvách) *Každý rovinný graf je 4-obarvitelný.*

Prvních „důkazů“ se věta dočkala až po více než 25 letech – roku 1879 od sira Alfreda Braye Kempeho a v roce 1880 od Petra Guthrie Taita. Žádný z nich ale nevydržel moc dlouho – Kempeho důkaz vyvrátil roku 1890 Percy Heawood a protipříklad k Taitovu důkazu našel Julius Petersen roku 1891. Oba pokusy o důkaz ale prospěly alespoň částečným řešením a umožnily objevení tehdy ještě neznámých tříd grafů.

Následujících několik desetiletí se o důkaz snažili mnozí matematici, zmínit můžeme kupříkladu Huga Hadwiger a jeho zobečňující domněnku z roku 1943, jež stále na svůj důkaz čeká.

První důkaz Věty o čtyřech barvách, jenž zatím nebyl vyvrácen<sup>12</sup>, představili roku 1976 pánové Kenneth Appel a Wolfgang Haken, s mírnou pomocí od Johna Kocha. Poměrně velká část důkazu je ale řešená jenom na počítači, proto se důkaz mnohým matematikům nelíbil.

O dvacet let později, roku 1996, přišli Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour a Robin Thomas s novým důkazem této věty, jenž je jednodušší a kratší, použití počítače se ale nevyhnuli. Povedlo se jim najít 633 „zakázaných konfigurací“, tedy grafů, jež se nemohou objevit v potenciálním minimálním protipříkladu (jinak by šly nahradit menším grafem, čímž bychom dostali ještě menší protipříklad). Na počítači pak ukázali, že by nutně každý minimální protipříklad některou z těchto konfigurací obsahoval. Tím ale dokázali, že žádný minimální protipříklad existovat nemůže a věta tedy platí :).

Snad nám promineš, že Ti žádný z těchto důkazů neukážeme, ale na to bychom potřebovali vybudovat daleko rozsáhlejší teorii, než je pro seriál vhodné. Místo toho ukážeme důkaz mírně slabší věty.

**Věta 15.** (O pěti barvách) *Každý rovinný graf je 5-obarvitelný.*

Tuto větu vlastně dostaneme jako důsledek věty následující.

**Věta 16.** (Thomassen) *Každý rovinný graf je 5-vybíravý.*

*Důkaz.* Mějme rovinné nakreslení grafu  $G$ , které doplníme na skorotriangulaci.<sup>13</sup> Navíc si označme vrcholy na vnější kružnici postupně  $v_1, \dots, v_k$ . Indukcí dle počtu vrcholů ukážeme, že  $G$  je  $B$ -obarvitelný, kdykoliv jsou splněny následující podmínky:

$$(1) |B(v_1)| = |B(v_2)| = 1 \text{ a } B(v_1) \cap B(v_2) = \emptyset,$$

$$(2) |B(v)| = 3 \text{ pro každý vrchol } v = v_3, \dots, v_k,$$

$$(3) |B(v)| = 5 \text{ pro všechny zbylé vrcholy } v.$$

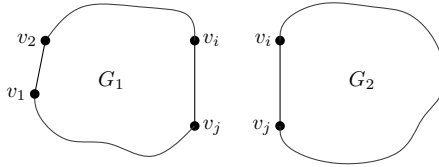
V případě nejvýše tří vrcholů musejí nutně všechny sousedit s vnější stěnou a pro každý máme dostatek možností na obarvení. Předpokládejme tedy, že vrcholy jsou alespoň čtyři.

1. Pokud existuje „tětiva“ vnější kružnice (tedy hrana  $\{v_i, v_j\}$  pro  $v_i$  a  $v_j$  nesousedící na kružnici), můžeme graf  $G$  podle této hrany rozdělit, čímž dostaneme dva menší grafy  $G_1, G_2$ . Právě jeden z nich obsahuje hranu  $\{v_1, v_2\}$ , ten označme  $G_1$ .

---

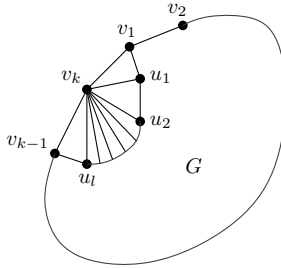
<sup>12</sup>Nejspíš tomu přispěl i fakt, že je natolik komplikovaný, že celý důkaz přečetlo a pochopilo poměrně málo lidí :).

<sup>13</sup>Toto určitě udelat můžeme, protože každé obarvení této skorotriangulace je také obarvením původního grafu.



Snadno nahlédneme, že graf  $G_1$  splňuje všechny tři podmínky, a proto existuje nějaké jeho  $B$ -obarvení  $b$ . Podobně je tomu u grafu  $G_2$ , tam ale není splněna podmínka (1), což snadno napravíme nastavením  $B(v_i) = \{b(v_i)\}$  a  $B(v_j) = \{b(v_j)\}$ . Indukce nám pak už i pro graf  $G_2$  zajistí takové  $B$ -obarvení, které se bude s obarvením  $G_1$  shodovat na jejich společných vrcholech. Spolu tedy dají platné  $B$ -obarvení grafu  $G$ .

2. Nechť tedy vnější kružnice žádnou tětivu nemá. Podívejme se na sousedství vrcholu  $v_k$  – tvoří ho popořadě vrcholy  $v_1, u_1, \dots, u_l, v_{k-1}$ . Protože jsme vycházeli ze skoro-triangulace, všechny hrany  $\{v_1, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{l-1}, u_l\}, \{u_l, v_{k-1}\}$  existují. Navíc žádný z vrcholů  $u_i$  nemůže ležet na vnější kružnici, jinak bychom dostali tětivu.



Označme  $X = B(v_k) \setminus B(v_1)$ , případně, pokud  $|X| = 3$ , jednu libovolnou barvu z  $X$  odstraňme. Když nyní odebereme z množin  $B(u_i)$  barvy z  $X$  (a případně ještě nějaké, aby zbyly pouze tři), splníme pro graf  $G - v_k$  všechny tři podmínky a indukce nám už zaručí existenci  $B$ -obarvení  $b$ . Musíme ale ještě dobarvit vynechaný vrchol  $v_k$ . Tady nám pomůže způsob, jak jsme upravili množiny  $B(u_i)$  – všechny jsou disjunktní s  $X$ , stejně tak barva vrcholu  $v_1$  v  $X$  není, proto jediný soused potenciálně nabarvený barvou z  $X$  je  $v_{k-1}$ . V  $X$  máme ale barvičky dvě, proto vrchol  $v_k$  určitě obarvit umíme.  $\square$

## Systém různých reprezentantů

Nyní na chvilku opustíme teorii grafů a popovídáme si o zajímavém praktickém problému. Představ si, že máš systém několika množin<sup>14</sup> a chceš z každé množiny vybrat jeden prvek tak, aby vybrané prvky byly navzájem různé. Výše slíbeným problémem pak je, jak rozhodnout, jestli je možné takovýto výběr provést. Nejprve si uvědomme, že někdy prvky vybrat lze, například ze systému  $\{a\}, \{b\}$ , a někdy ne, například ze systému  $\{a\}, \{a\}$ . Zabývat se touto otázkou tedy je nějakým způsobem zajímavé.

<sup>14</sup>*Systém množin* je něco jako množina množin, abychom se vyhnuli zmateným výrazům typu „množina všech podmnožin množiny přirozených čísel“. Navíc u systémů budeme povolovat i možné opakování jejich prvků, takže například  $\{\{a\}, \{a\}\}$  je dvouprvkový systém a budeme ho zkráceně zapisovat jako  $\{a\}, \{a\}$ .

Ač se to na první pohled možná nezdá, tento problém skutečně je praktický. Můžeme ho totiž přeformulovat například tak, že máme několik skupin lidí (třeba organizátory PraSete, přátele Meryl Streepové na Facebooku a sdružení zedníků v obci Petřvald) a chceme z každé skupiny vybrat jednoho zástupce, přičemž každý člověk smí zastupovat jen jednu skupinu. (Jinými slovy, vybraní lidé z různých skupin musejí být různí.)

Z každé množiny tedy vždy vybíráme jednoho zástupce neboli reprezentanta, a proto se možná vybraných prvků říká systém různých reprezentantů, někdy též zkráceně SRR. Pořádně definujeme SRR takto:

**Definice 17.** Necht  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  je nějaký systém konečných podmnožin množiny  $M$ . *Systémem různých reprezentantů* systému  $\mathcal{S}$  potom budeme rozumět kteroukoliv množinu  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  navzájem různých prvků množiny  $M$  takových, že  $x_i$  náleží  $S_i$  pro všechna  $1 \leq i \leq m$ .

Nyní se můžeme vrátit k problému, jestli daný systém množin má SRR. Poměrně snadno lze nahlédnout, že pokud pro systém  $\mathcal{S}$  existuje systém různých reprezentantů, pak pro všechny možné  $k$ -tice množin z  $\mathcal{S}$  musí platit, že počet prvků jejich sjednocení je roven alespoň  $k$ .<sup>15</sup> Pokud totiž  $\mathcal{S}$  má SRR, pak z definice SRR pro libovolnou  $k$ -tici množin z  $\mathcal{S}$  existuje  $k$  „jejich reprezentantů“. Získali jsme tedy nutnou podmínku existence SRR pro systém  $\mathcal{S}$ . Často se jí říká Hallova podmínka pro systém  $\mathcal{S}$ . Zajímavé je, že jde dokonce o podmínku postačující, jak říká tzv. Hallova věta.

**Věta 18.** (Hallova) *Systém množin  $\mathcal{S}$  má SRR právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku, tedy když pro každý jeho podsystém  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  platí  $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$ .*

*Důkaz.* Jednu implikaci už jsme dokázali v odstavci výše. Zbývá ukázat, že Hallova podmínka je postačující. Důkaz této implikace je poměrně pracný, ale nevyžaduje žádné speciální znalosti, tak se do něj rovnou pustíme. Budeme postupovat indukci podle počtu množin v systému  $\mathcal{S}$ . Tento počet si pro jednoduchost označíme  $k$ . Pro  $k = 0$  a  $k = 1$  implikace zjevně platí.

V indukčním kroku budeme ukazovat platnost implikace pro systém alespoň dvou množin, pokud víme, že implikace platí pro všechny „menší“ systémy, tedy systémy s menším počtem množin. Celou situaci si rozdělíme na dva případy.

1. Pro všechny vlastní podsystémy<sup>16</sup>  $\mathcal{S}$  platí Hallova podmínka dokonce s ostrou nerovností. Tedy pokud  $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$ , pak  $|\bigcup \mathcal{T}| > |\mathcal{T}|$  neboli  $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}| + 1$ . Pak si vybereme libovolnou množinu  $A \in \mathcal{S}$  a z ní její libovolný prvek  $a$ . (To, že žádná množina v  $\mathcal{S}$  není prázdná, a tím pádem z ní lze nějaký prvek vybrat, si můžeš rozmyslet jako jednoduché cvičení.) Uvažme systém  $\mathcal{S}'$ , který z  $\mathcal{S}$  vznikne odebráním množiny  $A$  a prvku  $a$  z každé zbylé množiny. Nyní ověříme, že pro systém  $\mathcal{S}'$  platí Hallova podmínka. Víme totiž, že v  $\mathcal{S}'$  je méně množin než v  $\mathcal{S}$ , takže z indukčního předpokladu bychom pak věděli, že pro  $\mathcal{S}'$  existuje SRR. Zjevně  $a$  nenáleží do tohoto SRR, takže přidáním  $a$  bychom snadno získali SRR systému  $\mathcal{S}$ .

Libovolný podsystém  $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$  lze vyjádřit jako  $\{S_1 \setminus \{a\}, S_2 \setminus \{a\}, \dots, S_m \setminus \{a\}\}$ , kde jednotlivé  $S_i$  jsou prvky  $\mathcal{S}$ . Proto z našeho dodatečného předpokladu platí

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m| \geq m + 1.$$

<sup>15</sup>Tuto podmínku můžeme ekvivalentně přeformulovat tak, že pro každý jeho podsystém  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  je počet prvků, které se vyskytují alespoň v jedné množině z  $\mathcal{T}$ , větší nebo roven počtu množin v  $\mathcal{T}$ . Pro zkrácení budeme tuto podmínku zapisovat jako  $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$ .

<sup>16</sup>*Podsystémem* systému  $\mathcal{S}$  nazveme systém, ve kterém se vyskytuje každý jeho prvek nejvýše tolikrát, kolikrát se vyskytuje v systému  $\mathcal{S}$ . *Vlastním podsystémem* pak rozumíme podsystém, který není prázdný a nerovná se systému  $\mathcal{S}$ .



Přítom

$$|(S_1 \setminus \{a\}) \cup (S_2 \setminus \{a\}) \cup \dots \cup (S_m \setminus \{a\})| = |(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \setminus \{a\}| \geq m,$$

takže pro  $S'$  Hallova podmínka platí.

2. Existuje vlastní podsystem  $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$  takový, že  $|\bigcup \mathcal{T}| = |\mathcal{T}|$ . Pro tento systém zjevně platí Hallova podmínka – nerovnost platí pro všechny podsystemy  $\mathcal{S}$ , takže platí i pro všechny podsystemy  $\mathcal{T}$ . Z  $\mathcal{T}$  tedy lze vybrat SRR o velikosti  $|\mathcal{T}|$ . Ze zbylých  $|\mathcal{S}| - |\mathcal{T}|$  množin bychom chtěli vybrat dalších  $|\mathcal{S}| - |\mathcal{T}|$  prvků tak, abychom získali SRR pro  $\mathcal{S}$ . To uděláme podobně jako v minulém případě – uvážíme  $S'$ , který z  $\mathcal{S}$  vznikne odebráním všech množin z  $\mathcal{T}$  a následným odebráním všech jejich prvků ze zbylých množin. Dále ukážeme, že  $S'$  má SRR.

Analogicky jako v minulém případě můžeme uvážit libovolný podsystem  $\mathcal{T}' \subseteq S'$  a vyjádřit jej jako  $\{S_1 \setminus (\bigcup \mathcal{T}'), S_2 \setminus (\bigcup \mathcal{T}'), \dots, S_m \setminus (\bigcup \mathcal{T}')\}$ , kde jednotlivé  $S_i$  jsou prvky  $S$ . Pak můžeme vyjádřit počet jeho prvků následovně:<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} |\bigcup \mathcal{T}'| &= |(S_1 \setminus (\bigcup \mathcal{T}')) \cup (S_2 \setminus (\bigcup \mathcal{T}')) \cup \dots \cup (S_m \setminus (\bigcup \mathcal{T}'))| \\ &= |(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \setminus (\bigcup \mathcal{T}')| \\ &= |(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \cup (\bigcup \mathcal{T}')| - |\bigcup \mathcal{T}'|. \end{aligned}$$

Přítom první množina („před znaménkem mínus“) je sjednocením  $m + |\mathcal{T}'|$  množin z  $S$ , pro který platí Hallova podmínka, a tedy počet jejich prvků je alespoň  $m + |\mathcal{T}'|$ . Z dodatečného předpokladu ale platí  $|\bigcup \mathcal{T}'| = |\mathcal{T}'|$ , takže počet prvků v  $\bigcup \mathcal{T}'$  je větší nebo roven  $m + |\mathcal{T}'| - |\mathcal{T}'| = m$ , a tím pádem  $S'$  splňuje Hallovu podmínku.  $\square$

**Poznámka.** Další možnou aplikací SRR a Hallovy věty je řešení následujícího problému: Máme několik žen a několik mužů. Ženy jsou vybíravé a každá má seznam mužů, které je ochotna si vzít. Muži vybíraví nejsou a s radostí se ožení s každou dámou, které se líbí. Za jakých podmínek jde všechny ženy provdat tak, aby všechny byly šťastné? (To, že se skutečně jedná jen o přeformulování problému, který řeší Hallova věta, Ti opět necháme jako cvičení.) Díky této aplikaci se větě v angličtině říká *Hall's marriage theorem* (Hallova sňatková věta) a Hallové podmínce *Marriage condition* (sňatková podmínka).

A proč si o Hallově větě vůbec povídáme v seriálu o grafech? Protože ji lze ekvivalentně formulovat jako větu z teorie grafů.

**Věta 19.** (Hallova, grafová varianta) *Nechť  $G = (A \cup B, E)$  je bipartitní graf, jehož všechny hrany jsou tvaru  $\{a, b\}$ , kde  $a \in A$  a  $b \in B$ . Dále předpokládejme, že pro každou podmnožinu vrcholů  $A$  (označme ji  $P_i$ ) platí, že počet vrcholů, které jsou hranou spojeny alespoň s jedním z vrcholů z  $P_i$  (tuto množinu označme  $N(P_i)$ ), je větší nebo roven počtu vrcholů v  $P_i$ . Jinak řečeno, pro všechna  $P_i$  platí  $|N(P_i)| \geq |P_i|$ . Pak lze z  $E$  vybrat několik hran tak, že každý z vrcholů z  $A$  bude jednou z těchto hran spojen s jedním vrcholem v  $B$  a navíc budou tyto body různé.<sup>18</sup>*

*Důkaz.* Víme-li, že platí kombinatorická varianta Hallovy věty, můžeme pro libovolný graf  $G$  splňující podmínky grafové varianty uvážit systém  $|A|$  množin, které pojmenujeme stejně jako vrcholy v  $A$  a pro každé  $x \in A$  bude množina  $x$  definována jako  $N(\{x\})$ . Pak je pro

<sup>17</sup>Při poslední rovnosti využíváme toho, že pro libovolné dvě množiny  $M, N$  platí  $|M \setminus N| = |M \cup N| - |N|$ .

<sup>18</sup>Tomu říkáme, že v  $G$  existuje párování pokrývající vrcholy z  $A$ .

vzniklý systém množin splněna Hallova podmínka, a tedy existuje SRR. Z  $E$  tudíž můžeme vybrat několik hran, z nichž každá bude spojovat vrchol  $x$  s reprezentantem množiny  $x$ . Tím získáme hledané párování. Vidíme tedy, že z platnosti kombinatorické varianty vyplývá platnost té grafové. Protože kombinatorickou verzi už dokázanou máme, platí i grafová varianta.  $\square$

Naopak pokud platí grafová verze a máme systém množin  $S$  splňující podmínky kombinatorické verze, můžeme uvážit graf  $G = (A \cup B, E)$ ,  $A = S$  (vrcholy z  $A$  mají stejná jména jako množiny v  $S$ ) a  $B$  jsou prvky všech množin z  $S$ . Navíc hranu nakreslíme jen mezi  $S_i$  a vrcholy  $y$  z  $B$ , pokud  $y \in S_i$ . Graf  $G$  pak splňuje podmínky grafové varianty Hallovy věty, a tedy v něm existuje párování pokrývající vrcholy z  $A$ . Toto párování nám přitom vybírá SRR pro  $S$ , takže z platnosti grafové varianty plyne platnost kombinatorické varianty, a tím pádem jsou obě věty ekvivalentní.<sup>19</sup>

V textu jsme použili pojem párování. Abychom tomuto slovu dali význam, uvedeme si jednu definici.

**Definice 20.** *Párováním* v grafu  $G$  rozumíme podmnožinu jeho hran takovou, že žádné dvě hrany z této podmnožiny nemají společný vrchol. *Perfektní párování* v grafu je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy.

Párování si tedy můžeme představit tak, že každý vrchol buď nespojuje s žádným jiným, nebo jej spojí právě s jedním vrcholem. (Čímž vrcholy „popáruje“.) Perfektní párování pak „popáruje“ všechny vrcholy. Vybaven(a) touto znalostí se můžeš vrhnout na následující cvičení:

**Cvičení 21.** Necht graf  $G$  splňuje podmínky Hallovy věty a navíc  $|A| = |B|$ . Ukaž, že potom v  $G$  existuje perfektní párování.

A abychom si ukázali, že Hallovu větu lze uplatnit i tam, kde bychom to na první pohled nečekali, ukážeme si, že každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec. Předtím si ale musíme oba pojmy definovat.

**Definice 22.** *Latinským čtvercem* rozumíme čtvercovou mřížku  $n \times n$  vyplněnou čísly  $1, \dots, n$  tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito právě jednou. *Latinským obdélníkem* rozumíme mřížku  $k \times n$ ,  $k \leq n$  (budeme se na ni koukat tak, že má  $k$  řádků a  $n$  sloupců) vyplněnou čísly  $1, \dots, n$  tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito nejvýše jednou a do každého políčka je vepsáno právě jedno číslo.

Rovnou uvádíme jeden z mnoha latinských čtverců  $5 \times 5$ .

2	4	5	3	1
5	1	2	4	3
1	3	4	2	5
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2

**Tvrzení 23.** *Každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec.*

*Důkaz.* Ukažme, že každý latinský obdélník  $k \times n$ ,  $k < n$  lze doplnit na latinský obdélník  $(k + 1) \times n$ . To k důkazu stačí, protože pak můžeme doplňovat řádky postupně, až dostaneme latinský čtverec  $n \times n$ . K důkazu využijeme grafovou variantu Hallovy věty.

<sup>19</sup>Přesněji (pro hnidopichy) – byly by ekvivalentní, kdybychom grafovou variantu formulovali jako ekvivalenci. My jsme ji pro jednoduchost vyslovili jen jako implikaci, ale určitě si rozmyslíš, že i její opačná implikace je ekvivalentní s příslušnou implikací kombinatorické verze.

Mějme latinský obdélník  $k \times n$ ,  $k < n$ . Následným způsobem si definujeme graf  $G = (V, E)$ . Množina vrcholů bude  $V = A \cup B$ , kde  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  představuje množinu sloupců našeho obdélníku a  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ . Hranu nakreslíme mezi vrcholy  $a_i$  a  $j$  právě tehdy, když  $j$  není obsaženo v  $i$ -tém sloupci. Jiné hrany do grafu nepřidáme.

Z definice vyplývá, že stupeň vrcholu  $a_i$  je počet čísel, která se nevyskytují v  $i$ -tém sloupci. Pro všechna  $i$  je tedy tento stupeň  $n - k$ . Stupeň vrcholu  $j$  je potom počet sloupců, ve kterých není  $j$  obsaženo. Avšak  $j$  je obsaženo v každém z  $k$  řádků právě jednou a v žádném sloupci se nenachází dvakrát. Je tedy obsaženo v  $k$  sloupcích, a proto je stupeň  $j$  pro všechna  $j$  také roven  $n - k$ .

Máme tedy bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň  $n - k$ . Ukažme, že  $G$  splňuje podmínky Hallovy věty. Vezměme libovolnou  $m$ -prvkovou podmnožinu  $A$  a označme ji  $X$ . Pak z  $X$  vychází přesně  $m(n - k)$  hran, které vedou do  $N(X)$ . Každý vrchol v  $N(x)$  má ale stupeň  $n - k$ , takže může z těchto hran „přijmout“ nejvýše  $n - k$ . Proto musí být v  $N(X)$  alespoň  $m$  vrcholů, čímž máme splněny podmínky Hallovy věty.

Navíc triviálně  $|A| = |B|$ , tudíž existuje perfektní párování grafu  $G$ . Nyní můžeme doplnit další řádek obdélníku tak, že na jeho  $i$ -tou pozici umístíme číslo, které je v grafu  $G$  spárováno s  $a_i$ . Vzniklý obdélník pak zůstane latinský.  $\square$

Ještě můžeme prozradit, že pokud nalezneme dostatek latinských čtverců splňujících podmínku ortogonality<sup>20</sup>, umíme z nich nepřímo vytvořit kód odolný vůči několika málo chybám při přenosu. Tímto bychom se ale příliš vzdálili od grafů, proto se jimi víc zabývat nebudeme.

## K závěru

Těmito řádky se s Tebou rozloučíme. Těší nás, že jsme Tě neztratili někde v průběhu a že ses zdárně dočetl(a) až sem.

Podobně jako v prvním dílu, i teď nabízáme řešení cvičení pro kontrolu:

4.  $\chi(K_n) = n$ ,  $\chi'(K_n) = n$  pro liché  $n$  a  $n - 1$  pro sudé  $n$ ;  $\chi(C_n) = \chi'(C_n) = 3$  pro liché  $n$  a 2 pro sudé  $n$ ;  $\chi(P_n) = \chi'(P_n) = 2$ ;  $\chi(Q_n) = 2$ ,  $\chi'(Q_n) = n$ .

6. Jsou to právě kružnice.

Věříme, že se Ti tento díl líbil, a přejeme hodně štěstí v soutěžní sérii. Doufáme v opětovné setkání nad závěrečným dílem, kde se podíváme na mladý, ale hezký svět průnikových grafů.

---

<sup>20</sup>Volně řečeno: dva čtverce jsou *ortogonální*, pokud „průchodem“ všech souřadnic čtverce a zapsáním dvojic hodnot z obou čtverců na daném místě dostaneme všech  $n^2$  možných dvojic.

# Seriál – Letem grafovým světem III

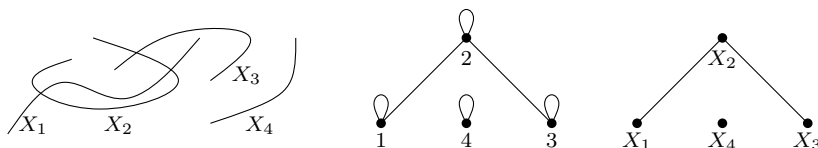
Vítáme Tě u třetího dílu seriálu o teorii grafů. Tentokrát se ponoříme do studia takzvaných průnikových grafů. Než to ale uděláme, dovolíme si Tě před něčím varovat, nebo lépe řečeno na něco Tě upozornit. Průnikové grafy jsou poměrně obsáhlé a výhradně vysokoškolské téma, takže mnoho poznatků o nich značně přesahuje rámec našeho seriálu. Zároveň se jedná o velmi teoretické téma, které sice má svá uplatnění (například při značkování map nebo v biologii při rekonstrukci genomu), ale ta opět většinou přesahují rámec seriálu natolik, že si je nebudeme schopni nijak podrobně popsat. Tento díl tedy považuj za jakousi stručnou sondu do světa průnikových grafů, o kterých se budeme bavit, protože nám přijdou zajímavé, a ne proto, že bychom díky nim chtěli uspět v matematické olympiádě nebo udělat dojem na kamarády nematematiky. Dost už ale bylo řečí kolem, pusíme se do toho!

## Základy aneb průnikové grafy pro zelenáče

**Definice 1.** Mějme systém (ne nutně různých) množin  $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Potom můžeme následujícím způsobem definovat *průnikový graf  $G$  systému  $\mathcal{X}$* : vrcholy  $G$  jsou  $1, 2, \dots, n$  a hrana je mezi vrcholy  $i$  a  $j$  právě tehdy, když  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ . O grafu pak řekneme, že je *průnikový*, pokud je izomorfní průnikovému grafu nějakého systému množin.

**Poznámka 2.** V takovém grafu vzniknou smyčky, ale my je budeme ignorovat. Dále se budeme dopouštět drobných nekorektností – například, pokud tím nedojde ke zmatení, budeme vrcholy označovat stejně jako příslušné množiny; dokonce často budeme vrcholy a množiny zaměňovat.

Na následujícím obrázku můžeš vidět systém množin bodů v rovině a jeho průnikový graf nejprve se smyčkami (důsledně podle definice) a pak bez smyček, jak jej budeme chápat ve zbytku textu.



Důsledná a volnější interpretace definice průnikového grafu

Definice průnikových grafů se na první pohled může zdát trochu odtažitá. Nejedná se ale o nic složitějšího – s průnikovými grafy jsme se už setkali. Konkrétně hranový graf  $L(G)$  grafu  $G$  je průnikovým grafem systému hran grafu  $G$ , kde hrany bereme v souladu s definicí jako dvojice vrcholů, a ne jako křivky na papíře. Ba co víc, každý graf, který jsme v dosavadním průběhu seriálu zmínili, byl průnikový. Platí totiž dokonce následující věta.

**Věta 3.** Každý graf je průnikový.

*Důkaz.* Mějme graf  $G = (V, E)$ . Pro každý vrchol  $v \in V$  definujeme  $S_v = \{e \in E \mid v \in e\}$ . Z definice  $S_v$  snadno nahlédneme, že pro všechna  $u \neq v \in V$  platí  $\{u, v\} \in E$  právě tehdy, když  $S_u \cap S_v \neq \emptyset$ .  $\square$

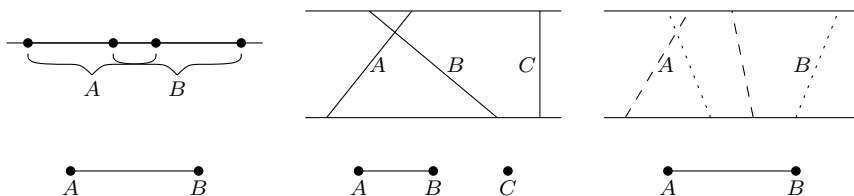
Z předchozí věty si můžeme odnést několik zajímavých závěrů. Zaprvé to je fakt, že každý graf lze reprezentovat jako průnikový, takže zkoumat tuto třídu grafů může být užitečné. Zadruhé fakt, že obecné průnikové grafy nejsou nijak zvlášť zajímavé – jsou to prostě všechny grafy. Dává tedy smysl nějakým způsobem omezit systém množin, jež pronikáme, například na přímky v rovině, koule v prostoru nebo tříprvkové podmnožiny přirozených čísel. Poté můžeme zkoumat, jaké třídy grafů lze reprezentovat různými typy systémů množin. A právě tím se budeme na následujících stránkách zabírat i my.

Nejprve si definujeme několik základních tříd průnikových grafů.

**Definice 4.** O grafu řekneme, že je

- (1) *průnikový graf intervalů* (na přímce), nebo též zkráceně *intervalový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček na jedné předem dané přímce.
- (2) *permutační*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček propojujících dvě předem dané různé rovnoběžné přímky.<sup>1</sup> Koncové body těchto úseček se přitom musejí lišit.
- (3) *lichoběžníkový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému lichoběžníků takových, že pokud protáhneme dvě rovnoběžné strany jednoho z nich na přímky, bude na každé z obou vzniklých přímk ležet právě jedna strana každého lichoběžníku.

K lepšímu pochopení Ti snad pomůže následující obrázek.



Příklad intervalového, permutačního a lichoběžníkového grafu

Nyní vyslovíme a dokážeme jedno tvrzení, které dává výše definované třídy grafů do souvislosti. Jeho důkaz je ale poměrně jednoduchý, takže si ho můžeš provést sám (sama) jako cvičení.

**Věta 5.** Každý intervalový graf a stejně tak každý permutační graf je zároveň lichoběžníkovým grafem.

<sup>1</sup>Těmto grafům říkáme permutační, protože systém úseček vlastně popisuje permutaci (neboli zpřeházení) několika prvků. De facto pak bereme tyto prvky za vrcholy a hranu kreslíme mezi ty vrcholy, jejichž pořadí permutace prohodila.

*Důkaz.* Nejprve si dokažme část o intervalových grafech. Máme nějaký systém intervalů na přímce a chceme najít systém lichoběžníků, které se protínají „stejným způsobem“ jako dané úsečky. Můžeme volit například speciální případ lichoběžníků – obdélníky – a sice takové, že jedna jejich strana vždy splývá s jedním daným intervalem a druhá má nějakou pevnou délku  $d$ . Tyto obdélníky se pak protínají stejně jako zadané úsečky a definují lichoběžníkový graf.

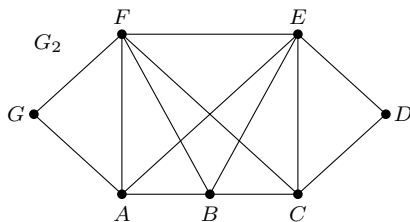
Dále si dokažme část o grafech permutačních. Máme nějaký systém úseček odpovídajících definici a podobně jako v předchozí části z něj chceme „vyrobit“ systém rovnoběžníků.<sup>2</sup> Idea je ta, že úsečka je vlastně „nekonečně úzký rovnoběžník“ a my tedy tyto úsečky jen nepatrně rozšíříme a tím z nich vytvoříme opravdové rovnoběžníky, které mají vhodné průsečíky. Podrobněji řečeno, z dané úsečky  $a$  vyrobíme rovnoběžník tak, že vezmeme všechny body ve vzdálenosti maximálně  $l$  od  $a$  a tuto množinu pronikneme s pásem vymezeným dvěma danými přímkami. Zbývá jen určit, jak velké má být  $l$ , aby se lichoběžníky protínaly tak, jak chceme (a jestli takové vůbec existuje).

Každé dvě úsečky od sebe mají nějakou vzdálenost – buď se protínají, a pak je nulová, nebo ne, a pak je kladná. Těchto vzdáleností je konečně mnoho, takže existuje nejmenší z těch kladných. Označme ji  $k$ . Rozmysli si, že pak libovolné kladné  $l < \frac{k}{2}$  vyhovuje – není to těžké. Tím je důkaz hotov.  $\square$

**Cvičení 6.** V posledním odstavci důkazu je poměrně malá, ale zásadní chyba, kvůli které je důkaz špatně. Najdi a oprav ji – jedná se skutečně o chybu, ne jen o vypuštění posledního kroku.

Pokud nemáš tušení, v čem je problém, napovíme Ti, že v opomenutí jednoho speciální případu. Své řešení si stejně jako v minulých dílech budeš moci ověřit na konci tohoto textu.

V porovnávání lichoběžníkových, permutačních a intervalových grafů ale můžeme pokračovat. Z první úlohy 3. seriálové série víme, že existuje souvislý permutační graf, který není intervalový. Někjaký takový graf označme  $G_1$ . Dále existuje i graf, který je intervalový, ale není permutační. Jako příklad takového grafu lze uvést graf  $G_2$  na následujícím obrázku.



Příklad intervalového grafu, který není permutační

Pokud Ti vadí absence důkazu vlastností grafu  $G_2$ , můžeš si ho provést sám (sama) jako cvičení, jež nevyžaduje žádnou složitou teorii, pouze jistou dávku zkoušení nebo dobrý nápad.<sup>3</sup> Avšak není na něm nic moc zajímavého a jedná se spíš o rozebírání možností, takže ho klidně můžeš, stejně jako my, vynechat.

**Cvičení 7.** Ukaž, že graf  $G_2$  je intervalový, ale není permutační.

A k čemu vlastně grafy  $G_1$  a  $G_2$  jsou? Zaprvé nám říkají, že ani jedna z tříd intervalových či permutačních grafů neobsahuje tu druhou. Zadruhé pak snadno najdeme graf, který je lichoběžníkový, ale není ani permutační, ani intervalový. Takovým grafem je například graf se dvěma komponentami, z nichž jedna je izomorfní  $G_1$  a druhá  $G_2$ .

O permutačních grafech navíc platí jedno poměrně zajímavé tvrzení s velmi pěkným důkazem, které Ti ponecháme jako cvičení. Až ho vyřešíš, budeš se moci pustit do barvení průnikových grafů.

<sup>2</sup>Každý rovnoběžník je lichoběžníkem.

<sup>3</sup>Nápověda k němu je uvedena na konci textu.

**Cvičení 8.** Ukaž, že třída permutačních grafů je rovna třídě doplňků permutačních grafů, tedy že libovolný graf  $G$  je permutační právě tehdy, když jeho doplněk  $\bar{G}$  je permutační.

Pokud chceš malé pošouchnutí, rozmysli si, že stačí ukázat jeden směr, tedy že doplněk libovolného permutačního grafu je permutační. Větší nápovědu (vlastně už skoro řešení) si opět můžeš přečíst na konci seriálu.

## Průnikové grafy a barevnost

Dovol nám se na chvíli vrátit k barvení grafů. Sice to nejspíš není po přečtení definic úplně zřejmé, ale průnikové grafy částečně s barevností souvisejí – a to jednak společnými aplikacemi v běžném životě, jednak tím, že poskytují nástroj, jak určovat barevnost grafu.

Nejspíš poměrně dobře znáš způsob, jakým se překrývají okna na pracovní ploše počítače. Vzdalme se mírně od různých oblých tvarů oken a představme si je všechny jako obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s okraji obrazovky. Když se podíváme na průnikový graf těchto obdélníků, můžeme z něho získat několik informací – třeba jeho barevnost nám určuje maximální počet vrstev oken.

Neměli bychom také zapomenout na dluh z minulého dílu, kde jsme si (pouze) zadefinovali skutečně netradiční způsob barvení –  $L(p, q)$ -značkování.<sup>4</sup> Tam jsme od sousedních vrcholů požadovali „rozdíl“ barev alespoň  $p$  a od těch „sousedících ob jeden vrchol“ rozdíl alespoň  $q$ .

K čemu je takováto zrůda dobrá a proč ji zmiňujeme zrovna teď? Protože s něčím podobným se potkáš i Ty téměř každý den. Představ si třeba mobilní síť, která pokrývá většinu území (nejen) České republiky. K tomu je potřeba určité množství vysílačů, přičemž každý z nich zajišťuje signál v jiné lokalitě. Přesto existuje spousta míst, na kterých je možné chytit signál dvou nebo i více vysílačů zároveň. Pokud by všechny vysílaly na stejné frekvenci, navzájem by se rušily a my bychom z toho nic neměli. Pro bezpečný provoz se musejí vždy lišit alespoň o určitou hodnotu, stejně tak by se měly (o něco méně) lišit i vysílače, které mají společného souseda.

Pokud si tedy vezmeme území pokrytá jednotlivými vysílači jako výchozí množiny a vytvoříme průnikový graf tohoto systému, pak přiřazení vysílacích frekvencí vysílačům odpovídá vhodnému obarvení našeho grafu. A když minimální rozdíly frekvencí označíme jako  $p$  a  $q$ , dostáváme se právě k slibovanému  $L(p, q)$ -značkování.

Dále jsme v rámci cvičení zjistili, že barevnost úplného grafu  $K_n$  je právě  $n$ . Je ale možné nalézt graf, jehož barevnost je vysoká, přestože se v něm nevyskytuje žádný výrazně velký úplný podgraf?

**Věta 9.** Pro každé přirozené číslo  $k$  existuje průnikový graf úseček v rovině, jehož barevnost je alespoň  $k$ , ačkoli neobsahuje trojúhelník jako podgraf.

Třeba pro  $k = 3$  to není až tak těžké dokázat – stačí vzít kružnici  $C_5$ , na jejíž obarvení potřebujeme alespoň tři barvy. Pro větší hodnoty  $k$  to už tak snadno nejde, pomůžeme si ale novým pojmem.

**Definice 10.** Součástíku nazveme trojici  $S = (R, \mathcal{U}, Z)$ , kde  $R$  je obdélník se stranami rovnoběžnými s osami roviny (rámeček součástíky),  $\mathcal{U}$  je nějaká množina úseček v rámečku  $R$  a  $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$  je množina zářezů – po dvou disjunktních obdélníků orientovaných stejně jako rámeček, jejichž okraj je součástí právě hranice rámečku  $R$ . Navíc vyžadujeme následující vlastnosti:

- (i) Průnikový graf úseček  $\mathcal{U}$  neobsahuje trojúhelník.
- (ii) Pokud úsečka protíná nějaký zářez, tak protíná jeho horní a dolní okraj, speciálně tedy nekončí uvnitř.
- (iii) Každé dvě úsečky protínající stejný zářez jsou disjunktní.

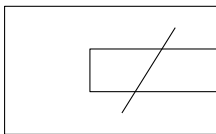
---

<sup>4</sup>Pokud si tento pojem chceš připomenout, podívej se na stranu 25 předchozích komentářů.

Jak taková součástka vypadá a hlavně to, jak se s ní pracuje, bude zřejmé z následujícího důkazu. A jak je v teorii grafů dobrým zvykem, dokážeme si mírně složitější větu, která nám ale umožní použít matematickou indukci.

**Věta 11.** *Pro každé přirozené číslo  $k$  existuje součástka  $S_k$  taková, že pro libovolné dobré obarvení průnikového grafu úseček  $S_k$  existuje zářez protnutý úsečkami  $k$  různých barev.<sup>5</sup>*

*Důkaz.* Pro  $k = 1$  nám stačí vzít následující součástku:

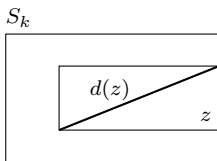


$S_1$

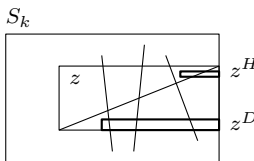
Po zbytek důkazu předpokládáme, že věta platí pro nějaké  $k$ . Takže existuje součástka  $S_k = (R, \mathcal{U}_k, Z)$ , z níž chceme vytvořit součástku  $S_{k+1}$ . Pro každý zářez  $z$  označme  $d(z)$  jeho diagonálu z levého dolního do pravého horního rohu. Pokud bychom se pokusili přidat  $d(z)$  mezi úsečky, porušili bychom třetí podmínku. Vytvořme proto nové zářezy  $z^D$  a  $z^H$  tak, aby

- (i) zářez  $z^D$  protínal právě úsečky protínající zářez  $z$  (ale už ne úsečku  $d(z)$ ), volíme ho tedy jako úzký zářez „při spodním okraji“ zářezu  $z$ ,
- (ii) zářez  $z^H$  protínal právě úsečku  $d(z)$ , bude to proto krátký zářez v pravém horním rohu. Jelikož nesmíme zapomenout na druhou podmínku, zářez  $z^H$  neumístíme přímo na horní okraj zářezu  $z$ , ale o kousek níž.

Následující obrázky by měly tyto pojmy trochu přiblížit.



Nová úsečka  $d(z)$



Nové zářezy  $z^D$  a  $z^H$

Definujme dále součástku  $S^*$  předpisem

$$S^* = \left( R, \mathcal{U}^* = \mathcal{U}_k \cup \{d(z) \mid z \in Z\}, \bigcup_{z \in Z} \{z^D, z^H\} \right).$$

Snad není potřeba dokazovat, že  $S^*$  je skutečně součástkou. Určitě taky platí, že pro každé dobré obarvení úseček  $\mathcal{U}^*$  nalezneme zářez  $z$  původní  $S_k$ , jenž obsahuje<sup>6</sup> alespoň  $k + 1$  různobarevných úseček z  $\mathcal{U}^*$ . Z indukčního předpokladu totiž existuje zářez  $z$  součástky  $S_k$ , jenž protíná  $k$  různobarevných úseček, diagonála  $d(z)$  se ale kříží se všemi těmito úsečkami, a proto musí dostat novou barvu.

Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme dosáhli cíle, protože máme skupinu  $k + 1$  úseček, jež musejí mít vzájemně různé barvy. Ale ještě tomu tak není. Aby nám správně fungovala indukce,

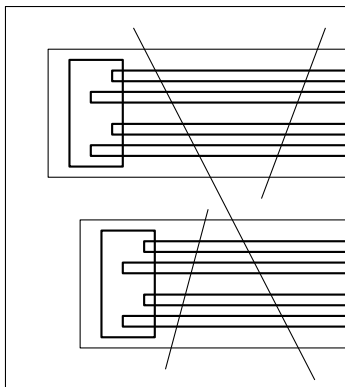
<sup>5</sup>Tady bychom správně měli barvit vrcholy průnikového grafu, ale i v důkazu se nám bude hodit barvit přímo úsečky reprezentující vrcholy. Rozmysli si, že ve skutečnosti je to to samé.

<sup>6</sup>Tady výjimečně povolujeme i úsečky, které začínají nebo končí uvnitř nebo na okraji zářezu.

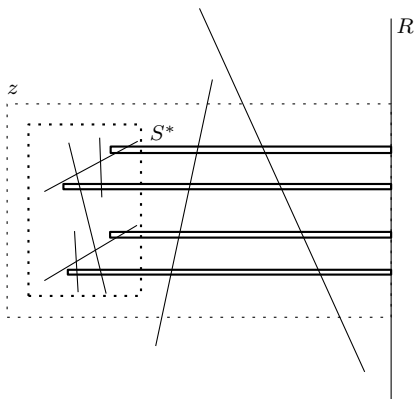


musíme opravdu zaručit, aby všech  $k + 1$  úseček protínalo jediný zářez. Speciálně se dle třetí podmínky nesmějí protínat navzájem.

Vytvoříme tedy součástku  $S_{k+1}$  ze součástky  $S_k$  tím, že do každého zářezu nakreslíme jednu zmenšenou kopii součástky  $S^*$  tak, aby byla nalevo od všech úseček protínajících daný zářez. Původní zářezy  $S_k$  smažeme a místo nich „prodloužíme“ zářezy každé kopie  $S^*$  až na pravý okraj rámečku. Můžeme dostat něco podobného následujícímu obrázku.



Sestrojení součástky  $S_{k+1}$



Detail na jeden zářez původní  $S_k$

Ponechme stranou dost technické a ničím nezajímavé dokazování, že „místa máme dostatek“. Dál si stačí uvědomit, že „vlepením“ kopie  $S^*$  nepřidáme žádné nové křížení úseček, proto první a třetí podmínka zůstávají v platnosti. No a pokud nějaká úsečka protínala zářez  $z$ , po této operaci protne všechny zářezy vzniklé prodloužením zářezů dané kopie  $S^*$ , proto  $S_{k+1}$  splňuje i druhou podmínku a je skutečně součástkou.

K čemu nám to všechno vlastně pomůže? Už víme, že v  $S^*$  nalezneme zářez  $z$  (původní) součástky  $S_k$  takový, že na obarvení všech úseček z  $U^*$  protínajících  $z^D$  nebo  $z^H$  potřebujeme  $k + 1$  barev (pojmenujme tyto úsečky  $U_z^*$ ). Když se pak podíváme na stejný zářez  $z$  v originální (velké) součástce  $S_k$ , nalezneme množinu „velkých“ úseček  $U_z$ , na jejichž obarvení potřebujeme alespoň  $k$  barev. Tyto úsečky ale protínají jak nový zářez  $z^D$ , tak i  $z^H$ .

Teď si už stačí jenom uvědomit, že na obarvení množiny  $U_z^*$  potřebujeme alespoň o jednu barvu víc a příslušná úsečka s „barvou navíc“ musí protnout právě jeden ze zářezů  $z^D$  a  $z^H$ . Ten pak obsahuje úsečky  $k + 1$  různých barev, čímž jsme splnili podmínky znění věty.  $\square$

## Boxicity grafu

Již jsme si ukázali intervalové grafy, což jsou průnikové grafy intervalů na reálné ose. Dále jsme si krátce představili průnikové grafy obdélníků v rovině, jejichž strany jsou rovnoběžné s  $x$ -ovou a  $y$ -ovou osou – protože tyto grafy nemají žádný ustálený název, pojmenujme je například *obdélníkové grafy*. Podobným způsobem bychom mohli definovat grafy *kvádrové*, *hyperkvádrové* a kopolu dalších.

Jaké vztahy platí mezi těmito třídami? Odpověď Ti ponecháváme do následujícího cvičení.

**Cvícení 12.** Promysli si, že intervalové grafy jsou zároveň obdélníkové a ty jsou zároveň kvádrové. Pokračuje to tak i k vyšším dimenzím?

To nás přivádí k otázce, kolik rozměrů potřebujeme, abychom daný graf  $G$  uměli reprezentovat jako průnikový graf vhodných hyperkvádrů.

**Definice 13.** *Boxicitou*<sup>7</sup> grafu  $G$  nazýváme minimální dimenzi  $d$ , pro kterou je  $G$  reprezentovatelný jako průnikový graf  $d$ -dimenzionálních kvádrů, přičemž všechny jejich hrany jsou rovnoběžné s některou z  $d$  os prostoru. Tuto hodnotu často značíme  $\text{box}(G)$ .

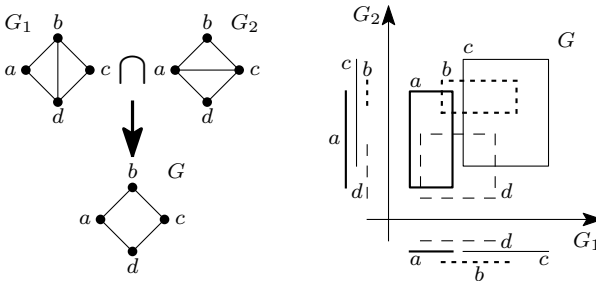
Na začátek si zkusme všimnout jednoho faktu. Není to těžké tvrzení, ale rozhodně vyžaduje chvílku rozmýšlení a trochu představivosti.

**Pozorování 14.** *Pro každý graf  $G$  platí*<sup>8</sup>

$$\text{box}(G) = \min \left\{ d \mid \text{existují intervalové grafy } G_1, \dots, G_d: G = \bigcap_{i=1}^d G_i \right\}.$$

Obsah tohoto podivného tvrzení Ti snad přiblíží následující příklad.

**Příklad 15.** Boxicita kružnice  $C_4$  je dva, protože není intervalovým grafem, ale umíme ji dostat jako průnik dvou intervalových grafů. Na základě této znalosti je snadné sestavit příslušný obdélníkový graf, jak vidno na obrázku.



Kružnice  $C_4$  jako průnik dvou intervalových grafů

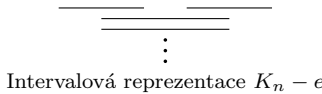
Možná Tě napadlo, má-li každý graf konečnou boxicitu. Odpověď je poměrně snadná.

**Věta 16.** *Pro každý graf  $G = (V, E)$  s  $n$  vrcholy platí  $\text{box}(G) \leq \binom{n}{2}$ .*

*Důkaz.* Nechť  $G_e$  označuje úplný graf  $K_n$  bez hrany  $e$ , tedy  $G_e = K_n - e$ . Pak zřejmě platí

$$G = \bigcap_{e \in \binom{V}{2} \setminus E} G_e.$$

Teď už stačí, pokud si všimneme, že každý graf  $G_e$  je intervalový, což ukazuje následující obrázek.



Protože „nehran“ může být nejvýše  $\binom{n}{2}$ , z předchozího tvrzení dostaneme požadovanou nerovnost. □

Tento odhad boxicity ale umíme výrazně zlepšit.

<sup>7</sup>Do češtiny bychom to mohli přeložit například jako *krabičkovost* grafu, ale držíme se raději běžného názvosloví.

<sup>8</sup>Pokud máme několik grafů  $G_i = (V, E_i)$  na stejné množině vrcholů, pak grafem  $\bigcap_i G_i$  rozumíme graf  $G = (V, \bigcap_i E_i)$ .

**Věta 17.** Pro každý graf  $G = (V, E)$  s  $n = |V|$  vrcholy platí  $\text{box}(G) \leq \frac{n}{2}$ .

*Důkaz.* Větu dokážeme indukcí podle  $n$ . Pokud má graf nanejvýš tři vrcholy, pak je určitě intervalový, a tedy  $\text{box}(G) = 1$ . Dál proto budeme uvažovat pouze grafy s alespoň čtyřmi vrcholy.

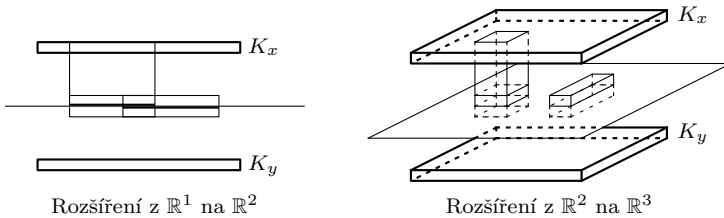
Pokud je graf  $G$  úplný, pak je intervalový a má boxicitu 1. V opačném případě existuje nehrana  $\{x, y\}$ . Víme, že graf  $G' = G \setminus \{x, y\}$  splňuje indukční předpoklad, proto

$$\text{box}(G') \leq \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1.$$

Pro graf  $G'$  tedy existuje reprezentace  $\mathcal{R}'$  pomocí hyperkvádrů v prostoru  $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ .

Vytvoříme reprezentaci  $\mathcal{R}$  pro graf  $G$  v prostoru  $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ : každý hyperkvádr z  $\mathcal{R}'$  přeneseme do  $\mathcal{R}$ , přičemž mu „přidáme nový rozměr“ – necht v tomto rozměru zabírá právě interval  $\langle -1, 1 \rangle$ . (Něco podobného jsme dělali při důkazu, že intervalové grafy jsou zároveň lichoběžníkové.) Tímto zařídíme přesné zkopírování grafu  $G'$ . Potřebujeme ale ještě doplnit dva hyperkvádry pro vrcholy  $x$  a  $y$ .

Pro vrchol  $x$  vytvoříme hyperkvádr  $K_x$ , jenž v „novém“ rozměru zabírá právě interval  $\langle 9, 10 \rangle$  a ve všech ostatních rozměrech „přesahuje“ každý objekt v  $\mathcal{R}'$ . Pokud vrchol  $x$  sousedí v  $G$  s vrcholem  $u$ , pak hyperkvádr  $K_u$  z  $\mathcal{R}'$  odpovídající vrcholu  $u$  musíme „natáhnout“ tak, aby se s  $K_x$  protínal. K tomu nám stačí rozšířit interval v „novém“ rozměru až po 10. Pro vrchol  $y$  budeme postupovat podobně, jen ho umístíme na interval  $\langle -10, -9 \rangle$ .



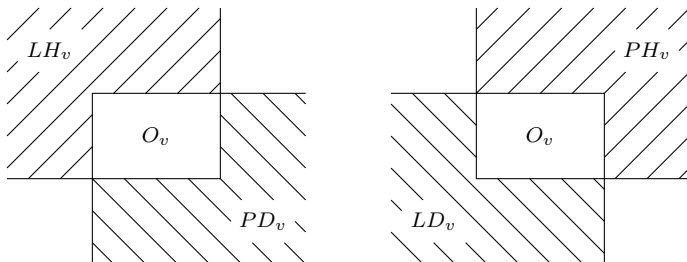
Po těchto úpravách skutečně dostaneme reprezentaci  $\mathcal{R}$  grafu  $G$ , která využívá pouze  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  rozměrů. □

Předchozí důkaz nebyl těžký, jen vyžadoval notnou dávku představivosti. Před důkazem následující věty se ale raději pořádně nadechni.

**Věta 18.** Každý bipartitní graf s boxicitou nejvýše dva lze reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou směrů.

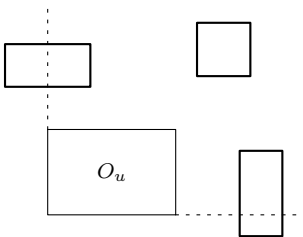
*Důkaz.* Mějme bipartitní graf  $G = (A \cup B, E)$  s partitami  $A$  a  $B$  a jeho reprezentaci  $\mathcal{R}$  pomocí obdélníků. Pro každý vrchol  $v \in A \cup B$  označme  $O_v$  obdélník odpovídající vrcholu  $v$  a dále si definujme „čtvrtroviny“<sup>9</sup>  $LH_v$ ,  $PH_v$ ,  $LD_v$  a  $PD_v$  dle následujících obrázků:

<sup>9</sup>Značení je zvoleno jako zkratky pro levá horní, pravá horní, levá dolní a pravá dolní čtvrtrovina.



Definice čtvrtrovin  $LH_v$ ,  $PH_v$ ,  $LD_v$  a  $PD_v$

Pomocí těchto čtvrtrovin si teď uspořádáme vrcholy v obou partitách: o vrcholech  $u, v \in A$  řekneme, že  $u$  je „před“  $v$  (budeme to značit  $u <_A v$ ) právě tehdy, když  $O_v \cap PH_u \neq \emptyset$  – možné vzájemné polohy obdélníků pro vrcholy  $u$  a  $v$  jsou vidět na následujícím obrázku. Pro vrcholy  $x, y \in B$  bude podmínka mírně jiná:  $x <_B y$  právě tehdy, když  $O_y \cap PD_x \neq \emptyset$ .



Možné pozice pro  $O_v$ , pokud  $u <_A v$

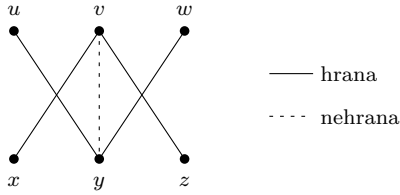
Obě tato (zatím pouze částečná) „uspořádání“<sup>10</sup> splňují několik vlastností, vypíšeme je ale jenom pro to první (druhé splňuje něco velmi podobného). Většina z nich je docela snadná, jejich důkaz Ti proto ponecháme jako cvičení.

- (1) Pro libovolné vrcholy  $u, v \in A$  platí  $O_u \cap O_v = \emptyset$ .
- (2) Dva vrcholy  $u, v \in A$  splňují  $u <_A v$  právě tehdy, když  $O_u \cap LD_v \neq \emptyset$ .
- (3) Pokud pro různé vrcholy  $u, v \in A$  platí  $u <_A v$ , pak určitě neplatí zároveň i  $v <_A u$ .
- (4) Neexistuje žádná skupina vrcholů  $v_1, \dots, v_k \in A$ , pro kterou platí

$$v_1 <_A v_2 <_A \dots <_A v_{k-1} <_A v_k <_A v_1.$$

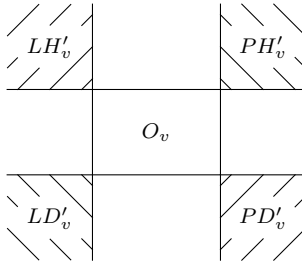
Jak jsme už naznačili, toto uspořádání nemusí být úplné, což znamená, že mohou existovat vrcholy  $u, v \in A$ , pro které nenastává  $u <_A v$  ani  $v <_A u$ . Opět není moc těžké (i když trochu práce to dá) si promyslet, že vždy umíme nějaké tyto vztahy doplnit tak, abychom potom už žádnou takovouto „neporovnatelnou“ dvojici vrcholů v partitě  $A$  nenašli a aby přitom byly stále zachovány podmínky (1) až (4). A totéž samozřejmě provedeme i s uspořádáním  $<_B$ . Pro tato rozšířená uspořádání pak nemůže nastat situace na obrázku (vrcholy  $u, v, w \in A$  splňují  $u <_A v <_A w$  a pro vrcholy  $x, y, z \in B$  platí  $x <_B y <_B z$ ; vrcholy, mezi nimiž není zakreslená hrana ani nehrana, spojeny být mohou, ale nemusejí):

<sup>10</sup>Přestože existuje i pojem *uspořádání* a tyto vztahy mezi vrcholy nesplňují všechny jeho podmínky, dovol nám tady menší nekorektnost. Následující vlastnosti nám stejně zaručí, že relace  $<_A$  i  $<_B$  umíme rozšířit tak, aby uspořádáními opravdu byly.



Tato situace nemůže nastat

Proč to platí? Radši si vezmi do ruky tužku a papír, jestli jsi to ještě neudělal(a). Z faktu, že  $u <_A v$ , víme, že  $v \not<_A u$ , a tedy  $O_u \cap PH_v = \emptyset$ ; podobně  $O_w \cap LD_v = \emptyset$ . Označme si ještě „zmenšené“ čtvrtroviny dle obrázku:



Definice čtvrtrovin  $LH'_v$ ,  $PH'_v$ ,  $LD'_v$  a  $PD'_v$

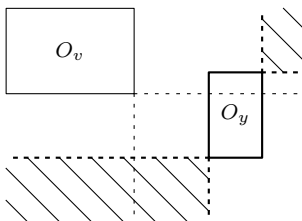
Předpokládejme, že vrcholy  $u$  a  $y$  jsou spojeny hranou, stejně tak jsou spojeny i vrcholy  $w$  a  $y$ . Z tohoto plyne, že  $O_u \cap O_y \neq \emptyset$  a  $O_w \cap O_y \neq \emptyset$ . Po krátkém hledání možných poloh pro  $O_y$  (chceme, aby vrcholy  $v$  a  $y$  nesousedily, proto  $O_v$  a  $O_y$  musejí být disjunktní) dostaneme, že musí platit

$$O_y \cap (LH'_v \cup PD'_v) \neq \emptyset.$$

Podobně díky existenci hran  $\{b, x\}$  a  $\{b, z\}$  dostáváme vztah

$$O_v \cap (PH'_y \cup LD'_y) \neq \emptyset.$$

Když si ale tyto dva vztahy spojíme, narazíme na problém, jak napovídá následující obrázek.



Jedna z možných pozic pro  $O_y$  a plocha, kterou pak  $O_v$  musí proniknout

Posledním krokem důkazu je ukázat, že pokud žádná šestice vrcholů netvoří zmiňovanou konstelaci, pak skutečně umíme celý graf reprezentovat pomocí úseček dvou směrů. Tuto část jsme se rozhodli nechat na Tobě jako druhou úlohu soutěžní série.  $\square$

## A něco na rozloučenou

Teď už nadešel čas celý seriál ukončit. Věříme, že se Ti líbil a alespoň některá jeho část Tě zaujala. Omezený prostor seriálu nám umožnil většinu oblastí pouze nafuknout, zatímco mnoho dalších hezkých (ale i pokročilejších) vlastností a aplikací se nám sem už nevešlo. Pokud bys přesto chtěl(a) vědět víc, neváhej nás oslovit nebo se podívat do některé z knih uvedených na konci.

Samozřejmě nemůžeme vynechat slíbenou nápovědu ani tradiční řešení a návody ke cvičením pro kontrolu:

**6.** Chyba je v tom, že jsme opomněli případ, kdy se všechny úsečky protínají. Pak by všechny vzdálenosti byly nulové, a žádná minimální kladná by tedy neexistovala. Snadno ale nahlédneme, že v tomto případě by vyhovovalo dokonce libovolné kladné  $l$ .

**7.** To, že je graf  $G_2$  intervalový, ukážeme velmi snadno, stačí zkonstruovat daný systém intervalů. To, že není permutační, se ukáže poněkud obtížněji. Zkus kreslit systém úseček reprezentujících vrcholy grafu  $G_2$  v tomto pořadí:  $D, C, B, A, G, F$ . Na závěr nebude možné umístit úsečku  $E$ .

**8.** Generující systém pro doplněk lze zkonstruovat například překlopením jedné z rovnoběžek. A pokud se Ti líbí dívat se na permutační grafy pomocí permutací, stačí vzít permutaci  $\pi$ , která odpovídá původní graf, a definovat permutaci  $\sigma$  splňující  $\sigma(j) = \pi(n - j)$ . Není těžké ukázat, že této permutaci odpovídá právě doplněk původního grafu.

Ač jsme Tě celou dobu prováděli seriálem pouze my dva, není tento text jen naší prací. Možná ještě větší zásluhu než kdokoli z nás má na vzniku seriálu Kuba Krásenský, kterému tímto děkujeme za to, že prováděl jazykové a věcné korektury a pomohl vybrousit celý text do mnohem čitelnější podoby. Dále dlužíme díky Tondovi Češíkovi a Olinovi za to, že opravili naše typografické chyby a postarali se o perfektní grafickou podobu celého textu, a Martině, která dohlížela na naše obrázky. V neposlední řadě bychom pak rádi poděkovali všem ostatním organizátorům, kteří se svými poznámkami na tvorbě seriálu aktivně podíleli, a také Tobě za to, že sis jej přečetl(a) a dal(a) celé naší společné práci nějaký smysl. Doufáme, že, že Ti onen smysl neunikl a ze seriálu sis něco odnesl(a).

Prějeme Ti mnoho úspěchů jak v poslední seriálové, tak i ve zbylých dvou jarních sériích.

## Literatura a další zdroje

Již v předešlých dílech jsme zmiňovali některá místa, kde se o grafech a jejich světě můžeš hodně dozvědět. Zde bychom Tě rádi odkázali na pár knížek, které více nebo méně známe a můžeme je tedy pro další studium doporučit. A protože teorie grafů je poměrně mladý obor (alespoň ve srovnání s jinými oblastmi matematiky), hranice poznání se tady posouvají docela rychle. Je tedy možné, že za pár let budou tyto knihy zastaralé a jejich místo zaberou nové.

- [1] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2009.
- [2] J. Demel: *Grafy a jejich aplikace*, Academia, 2002.
- [3] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer, 2010.
- [4] B. Bollobás: *Modern Graph Thoery*, Springer, 1998.
- [5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: *Graph Theory*, Springer, 2008.

Kromě toho můžeš samozřejmě využít i nepřehledné množství různých webových stránek – Wikipedii počínaje a stránkami různých vědců a časopisů konče. Většinou stačí pojmenovat, co zrovna chceš najít (ideálně anglicky), a to pak zadat do svého oblíbeného vyhledávače.