Kružnice

2. podzimní série Termín odeslání: 10. listopadu 2014

Úloha 1. (3 body)
Nakreslete v rovině dvanáct kružnic tak, aby se každá z nich dotýkala právě pěti dalších.

Úloha 2. (3 body)
Filip si nakreslil trojúhelník ABC a na jeho nejdelší straně BC našel body K a L tak, aby platilo $|AB| = |BK|$ a $|AC| = |CL|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Úloha 3. (3 body)
Helča si pro změnu nakreslila trojúhelník DEF s vnitřními úhly $|\sphericalangle FDE| = 70°$, $|\sphericalangle DEF| = 60°$ a $|\sphericalangle EFD| = 50°$. Poté sestrojila přímky o, p a q, které byly po řadě osami úseček EF, FD a DE. Dále zobrazila bod D v osové souměrnosti podle přímky o, bod E podle přímky p a konečně bod F podle přímky q. Získala tak body D', E' a F'. Jaké jsou vnitřní úhly trojúhelníka $D'E'F'$?

Úloha 4. (5 bodů)
Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Pro každý vnitřní bod X úsečky AD sestrojme bod Y tak, aby platilo $|\sphericalangle YBC| = 2|\sphericalangle XBC|$, $|\sphericalangle YCB| = 2|\sphericalangle XCB|$ a body X, Y ležely ve stejné polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že hodnota $|YC| - |YB|$ nezávisí na volbě bodu X.

Úloha 5. (5 bodů)
Dokažte, že v tečnovém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se kružnice s průměry AD a BC dotýkají.

Úloha 6. (5 bodů)
Olin si vzal iracionální číslo $x \in (0, 1)$. Na kružnici o obvodu 1 zvolil libovolně bod X_1 a poté postupně ve směru hodinových ručiček vyznačil body $X_2, \ldots, X_n$ tak, aby délka oblouku mezi každými dvěma po sobě jdoucími byla x. Nakonec mezi body $X_1, \ldots, X_{n-1}$ našel X_a a X_b – sousedy bodu X_n. Dokažte, že $a + b \le n$.

Úloha 7. (5 bodů)
Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

(i) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,

(ii) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají.

Úloha 8. (5 bodů)
Je dána jednotková sféra. Najděte reálné číslo x takové, že pro každé $l < x$ lze na sféru nakreslit tři neprotínající[1] se oblouky hlavních kružnic[2] délky l, ale pro žádné $L > x$ už to možné není.

---

[1] Nesmějí se ani dotýkat.

[2] Hlavní kružnice je kružnice ležící na sféře, jejíž střed je zároveň středem sféry.