Kongruence

3. podzimní série Termín odeslání: 8. prosince 2014

Poznámka: Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Úloha 1. (3 body)
Když si Kuba hrál se svým oblíbeným přirozeným číslem, zjistil zajímavou věc. Nejenže dané číslo bylo palindrom[1] a dávalo po dělení čtyřmi zbytek 1 a po dělení dvaceti pěti zbytek 22, ale dokonce bylo nejmenším číslem, které všechny předchozí body splňuje. Které číslo to bylo?

Úloha 2. (3 body)
Nalezněte všechny čtveřice nezáporných celých čísel a, b, c, d, které řeší rovnici

$$10^a + 5^b = 3^c + 7^d.$$

Úloha 3. (3 body)
Dokažte, že pro každé přirozené číslo a existuje přirozené číslo $n > 1$ takové, že $n \mid a^n + 1$.

Úloha 4. (5 bodů)
Nalezněte přirozené n takové, že

$$11^{n+1} + 10^{12n+6} + 11^{4n+2} \equiv 1 \pmod{1000121}.$$

Prozradíme, že 1000121 je prvočíslo.

Úloha 5. (5 bodů)
Dokažte, že $1^1 + 11^{11} + \cdots + 1111111111^{1111111111}$ (sčítanců je deset) je dělitelné 100.

Úloha 6. (5 bodů)
Sedmiciferné přirozené číslo nazveme *spořádané*, pokud je každá z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 v jeho desítkovém zápisu obsažena právě jednou. Existují dvě různá spořádaná čísla taková, že jedno dělí druhé?

Úloha 7. (5 bodů)
Nalezněte všechny posloupnosti přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které pro každé prvočíslo p a každé přirozené číslo n splňují vztah

$$a_n^p \equiv n \pmod{a_p}.$$

Úloha 8. (5 bodů)
Mějme libovolné prvočíslo $p \geq 7$. Dokažte, že pak existuje přirozené číslo n a celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nesoudělná s p taková, že

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &\equiv x_2^2 \pmod{p},\\ x_2^2 + y_2^2 &\equiv x_3^2 \pmod{p},\\ &\vdots\\ x_n^2 + y_n^2 &\equiv x_1^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

[1] Palindromem rozumíme číslo, které se v desítkové soustavě čte stejně zepředu jako zezadu, např. 226747622.