Do nekonečna a ještě dál 2

2. seriálová série — Termín odeslání: 8. února 2016

Úloha 1. (5 bodů)
Dokažte z axiomů teorie množin platnost formule

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)\big((c \in b) \Leftrightarrow (\exists d \in a)(c \subset d)\big).$$

Úloha 2. (5 bodů)
Je dána funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kdykoli zvolíme reálná čísla $a < b$ a množina $\{f(x) : a < x < b\}$ má největší prvek, nazveme tento prvek *lokálním maximem* funkce f. Dokažte, že množina všech lokálních maxim funkce f je spočetná.

Úloha 3. (5 bodů)
O množině $X \subset \omega_1$ řekneme, že je *šikovná*, pokud

(i) X je nespočetná,
(ii) pro každou spočetnou množinu $Y \subset X$ je $\bigcup Y$ prvkem X.

Dokažte, že průnik dvou šikovných množin je opět šikovná množina.

Do nekonečna a ještě dál 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Dokažte z axiomů teorie množin platnost formule

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)\big((c \in b) \Leftrightarrow (\exists d \in a)(c \subset d)\big).$$

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Nejprve převedeme formuli do běžné řeči, abychom věděli, co vlastně dokazujeme. Pro každou zadanou množinu a máme nalézt nějakou množinu b. Tato množina přitom bude složena právě z těch množin c, které jsou podmnožinami některého prvku $d \in a$. Jinými slovy se snažíme sestrojit množinu

$$b = \bigcup\{\mathcal{P}(d) : d \in a\}.$$

Použitím axiomů ukážeme, že taková množina opravdu existuje, tedy že se nejedná o vlastní třídu. Existují dva základní způsoby, jak to udělat:

POMOCÍ SCHÉMATU AXIOMŮ NAHRAZENÍ:
Využijeme axiom nahrazení podobně jako v příkladu na straně 31, když jsme dokazovali existenci kartézského součinu. Naším cílem bude vytvořit z množiny a, kterou lze zapsat také jako $\{d : d \in a\}$, množinu $\{\mathcal{P}(d) : d \in a\}$ tím, že každý prvek nahradíme jeho potencí. To, že potence každého prvku existuje, víme díky axiomu potence. Příslušným třídovým zobrazením bude formule $\psi(x, y)$ definovaná jako $y = \mathcal{P}(x)$. Jsou splněny předpoklady axiomu nahrazení, tj. jedná se skutečně o zobrazení? Ano, protože potence množiny je určena jednoznačně – to plyne z axiomu extensionality.

Díky schématu axiomů nahrazení použitého s formulí $y = \mathcal{P}(x)$ tedy vytvoříme z množiny a množinu $\{\mathcal{P}(d) : d \in a\}$. Na ni už stačí jen aplikovat axiom sjednocení.

POMOCÍ SCHÉMATU AXIOMŮ VYDĚLENÍ:
Také můžeme ke konstrukci přistoupit tak, že nejprve vytvoříme nějakou množinu, která b obsahuje, a na závěr použijeme axiom vydělení. Díky axiomům sjednocení a potence lze vytvořit množinu $B = \mathcal{P}(\bigcup a)$. Z jakých množin je vzniklá množina B složena? Tvrzení $c \in B$ platí právě tehdy, když je $c \subset \bigcup a$, tedy když je tvořena z prvků prvků a. My ale nechceme, aby byla složena z libovolných prvků prvků a; každá množina c má obsahovat prvky pouze jediného prvku množiny a (tento prvek je v dokazované formuli označován jako d).

Je nicméně vidět, že každý prvek b leží rovněž v B. Je proto možné použít axiom vydělení s formulí $\varphi(x)$ definovanou jako $(\exists d \in a)(x \subset d)$. Ten zjevně ve výsledné množině nechá pouze prvky, které v ní chceme.

Poznámky:
Došlá řešení byla většinou víceméně správná a oba přístupy se vyskytovaly zhruba stejně často. U prvního mnoho z Vás opomnělo zdůvodnit jednoznačnost pomocí axiomu extensionality, za což jsem ovšem nakonec body nestrhával. Výraznějším prohřeškem byla snaha zkonstruovat množinu pomocí „postupného sjednocování“ – někteří výslovně zmínili axiom dvojice. Takový přístup by fungoval v případě, že by množina a byla konečná, ale co když bude dokonce nespočetná? V takovém případě je nutné použít axiom nahrazení místo postupného přidávání prvků.

Řešením, která byla sepsána bezchybně a nezvykle přehledně, jsem uděloval imaginární bod.

(Kuba Krásenský)

Úloha 2.

Je dána funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kdykoli zvolíme reálná čísla $a < b$ a množina $\{f(x) : a < x < b\}$ má největší prvek, nazveme tento prvek lokálním maximem funkce f. Dokažte, že množina všech lokálních maxim funkce f je spočetná.

(Mirek Olšák)

Řešení:
Nejprve si uvědomíme jednu pomocnou skutečnost – že množina $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, tj. množina dvojic racionálních čísel, je spočetná. V prvním díle seriálu jsme totiž dokázali jak spočetnost $\mathbb{Q}$, tak spočetnost spočetného sjednocení spočetných množin. Kdyby se nám tedy podařilo sestrojit prosté zobrazení z množiny všech lokálních maxim do $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, máme vyhráno.

Vezměme proto nějaké lokální maximum y funkce f. Víme, že k němu existuje nějaký interval (a, b) takový, že je y největším prvkem množiny $\{f(x) : a < x < b\}$. Zvolme tedy nějaký takovýto interval. V něm nalezneme alespoň jedno x_0 takové, že $f(x_0) = y$. Díky hustotě racionálních čísel umíme nalézt taková racionální čísla p, q, aby $a < p < x_0 < q < b$. Zjevně je y i největším prvkem množiny $\{f(x) : p < x < q\}$, protože se jedná o podmnožinu původní množiny, která navíc obsahuje $f(x_0)$.

Každému lokálnímu maximu tedy umíme přiřadit nějaký interval s racionálními krajními body. Toto přiřazení je přitom prosté, jelikož interval (p, q) nemůže mít více lokálních maxim. Podařilo se nám tedy ukázat, že existuje prosté zobrazení množiny všech lokálních maxim do spočetné množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Poznámky:
Většina došlých řešení obsahovala onu klíčovou myšlenku, že každé lokální maximum musí být maximem i na nějakém intervalu s racionálními okraji. Dost mě ale mrzelo, že si většina z Vás pořádně nepřečetla zadání. Podle trochu nečekané definice v zadání je totiž lokálním maximem funkční hodnota, ne bod definičního oboru – například funkce sinus tedy má jediné lokální maximum, a to $+1$. A podobně toto maximum nemusí být ostré; když si například vezmeme libovolnou konstantní funkci a kterýkoliv interval, bude množina $\{f(x) : a < x < b\}$ obsahovat jediný prvek, ten tedy bude automaticky největším prvkem, a tudíž lokálním maximem. Podle toho, jak moc jste si svojí špatnou interpretací zadání zjednodušili práci, jsem strhával body. Naopak řešení, která byla stručná a zároveň nic neopomněla, jsem odměnil kladným imaginárním bodem.

Opakovaně jsem se setkal s dvěma nepravdivými tvrzeními. První z nich říkalo, že funkce na každém intervalu (a, b) nabývá nějakého maxima. To není pravda hned ze dvou důvodů. Zaprvé funkce nemusí na daném intervalu být omezená – příkladem je $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$. A zadruhé sice omezená být může, ale příslušná množina nemusí obsahovat největší prvek – například $f(x) = x$ má nejvyšší hodnotu na pravém okraji intervalu, jenže ten do intervalu nepatří.

Druhým omylem bylo tvrzení, že množina lokálních maxim je diskrétní (z čehož by pak už hned plynula její spočetnost). Snadno totiž popíšu funkci, která má za množinu lokálních maxim celé $\mathbb{Q}^+$, tj. všechna kladná racionální čísla. Stačí vzít libovolnou bijekci $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^+$ a tu následně dodefinovat nulami ve všech neceločíselných bodech. Komu se chce, může si podobným způsobem zkonstruovat funkci, která naopak nabývá lokálního maxima v každém racionálním bodě.

Na závěr tohoto dlouhého komentáře ještě chci upozornit, že reálná čísla sice jsou uspořádanou množinou a toto uspořádání má mnohé dobré vlastnosti, ale *nejedná se o dobré uspořádání.* Vlastnosti dobrého uspořádání umožňují k danému prvku nalézt prvek bezprostředně následující, což pro reálné číslo provést nelze! *(Kuba Krásenský)*

Úloha 3.

O množině $X \subset \omega_1$ řekneme, že je šikovná, pokud

(i) *X je nespočetná,*
(ii) *pro každou spočetnou množinu $Y \subset X$ je $\bigcup Y$ prvkem X.*

Dokažte, že průnik dvou šikovných množin je opět šikovná množina.

(Mirek Olšák)

Řešení:
Nejprve dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Tvrzení. *Podmnožina $X \subset \omega_1$ je nespočetná právě tehdy, když pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ existuje $\beta \in X$ takové, že $\alpha < \beta$.*

Důkaz. Podle seriálu je množina $X \subset \omega_1$ spočetná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega_1$, což znamená, že $X \subset \omega_1$ je nespočetná právě tehdy, když $\bigcup X = \omega_1$. Pokud $\bigcup X = \omega_1$, pak pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ platí $\alpha \in \bigcup X$, neboli existuje $\beta \in X$ větší než α. Naopak pokud pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ dokážeme najít větší ordinál β v X, pak $\alpha \in \bigcup X$, tudíž $\bigcup X = \omega_1$, tedy X je nespočetný. $\square$

Mějme dvě libovolné šikovné množiny X, Y a nechť $Z = X \cap Y$. Napřed ověříme, že Z splňuje podmínku (ii) ze zadání. Pokud W je spočetná podmnožina Z, pak W je také podmnožinou X a Y, a proto je $\bigcup W$ prvkem X a Y, tedy i jejich průniku Z. Tím je tvrzení dokázáno.

Zbývá ukázat, že Z splňuje i podmínku (i), tedy že Z je nespočetná. Pro spor předpokládejme, že existuje ordinál $\alpha \in \omega_1$, který je větší než všechny prvky ze Z. Sestrojíme následující posloupnost ordinálů. Nejprve zvolíme $x_0 > \alpha$ z X, dále $y_0 > x_0$ z Y. Pokračujeme výběrem $x_k > y_{k-1}$ z X a $y_k > x_k$ z Y pro všechna přirozená k počínaje jedničkou. Existenci hledaných prvků v každém kroku zaručuje dokázané tvrzení a nespočetnost množin X a Y. Nyní uvažujme $\bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$, které podle podmínky (ii) leží v X, a $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$ ležící v Y. Platí, že $x_k < y_{k+1}$, a proto $x_k < \bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$, z čehož plyne $\bigcup_{i=0}^{\infty} x_i \leq \bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$. Analogicky se dá ukázat, že $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i \leq \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$, tudíž $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$. Tento ordinál je tedy společným prvkem X a Y, a proto leží v Z. Dospěli jsme tedy ke sporu.

Poznámky:
Tato úloha vyžaduje dobré porozumění seriálu a pečlivé zacházení s pojmy a symboly. Neúspěšné byly snahy dokázat, že šikovné množiny musejí obsahovat od jistého ordinálu všechny větší ordinály – nic takového platit nemusí, protipříkladem je třeba množina všech limitních ordinálů. Chtěl bych pochválit *Jakuba Löwita* za hezky sespané řešení s postupem podobným vzorovému a *Filipa Bialase* za originální použití *Pressing down lemmatu* ze seriálu.

(Anh Dung „Tonda“ Le)