Do nekonečna a ještě dál 3

3. seriálová série | Termín odeslání: 11. dubna 2016

Úloha 1. (5 bodů)

Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, pokud existuje reálné číslo, které je větší než všechny prvky dané množiny. V opačném případě říkáme, že je X *shora neomezená*. Nechť je dána shora neomezená množina $X \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje její spočetná podmnožina, která je stále shora neomezená. Vysvětlete, jak přitom používáte axiom výběru.

Úloha 2. (5 bodů)

Dokažte, že lze množinu všech kladných reálných čísel rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny A a B tak, aby byly obě uzavřené na sčítání. Tím myslíme, že musí platit $a_0 + a_1 \in A$ a $b_0 + b_1 \in B$ pro všechna (ne nutně různá) $a_0, a_1 \in A$, $b_0, b_1 \in B$.

Úloha 3. (5 bodů)

Dokažte, že lze celý prostor $\mathbb{R}^3$ získat jako sjednocení nějaké množiny navzájem disjunktních kružnic s poloměrem 1.

Do nekonečna a ještě dál 3

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, pokud existuje reálné číslo, které je větší než všechny prvky dané množiny. V opačném případě říkáme, že je X shora neomezená. Nechť je dána shora neomezená množina $X \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje její spočetná podmnožina, která je stále shora neomezená. Vysvětlete, jak přitom používáte axiom výběru.

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Požadovanou množinu sestrojíme postupnou konstrukcí. Tu nejprve popíšeme neformálně a teprve potom se podíváme na to, kde se v ní využil axiom výběru.

POMOCÍ VÍCEZNAČNÉ FUNKCE:
Množina X musí obsahovat číslo větší nebo rovné nule, jinak by byla shora omezená nulou. Označme takové číslo a_0. Dále musí X obsahovat i číslo větší nebo rovné jedné, jinak by byla shora omezená jedničkou. Označme takové číslo a_1. Když toto provedeme pro každé $n \in \omega$, bude množina $A = \{a_n : n \in \omega\}$ mít obě požadované vlastnosti. Je spočetná, protože jsme ji sestrojili jako obraz spočetné množiny. (K tomuto se vracíme na konci této části vzoráku.) A pro každé kladné reálné číslo x je $a_{\lceil x \rceil} \geq \lceil x \rceil \geq x$. (Použitý symbol označuje horní celou část čísla x, tj. nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.)

Kdy jsme použili axiom výběru? Pochopitelně ve chvíli, kdy jsme z prvků množiny X volili nějaký, který je větší než dané n. Nejsnazší způsob formálního zápisu je nejprve definovat víceznačnou funkci[1] $\tilde{f}\colon \omega \to X$, která přirozenému číslu n přiřadí všechna čísla ležící v X větší nebo rovná n. Z ní umíme podle tvrzení z kapitoly Postupné vybírání vybrat běžnou jednoznačnou funkci $f\colon \omega \to X$. Ta každému přirozenému číslu přiřazuje nějaký konkrétní větší nebo stejně velký prvek X. Nic nám tedy nebrání definovat $a_n = f(n)$.

Axiom výběru jsme tedy využili skrytě – ve formě tvrzení o výběru funkce z víceznačné funkce, v jehož důkazu je axiom výběru esenciální součástí. Mohlo by se zdát, že ho potřebujeme i na důkaz spočetnosti sestrojené množiny. Když totiž víme, že existuje ne nutně prosté zobrazení z ω na A a chceme ukázat existenci prostého zobrazení A do ω, nabízí se využít cvičení 1, jehož řešení také využívá výběr funkce z víceznačné funkce. Nic takového ale dělat nemusíme. Pro prvek a z množiny A můžeme totiž definovat $g(a)$ jako nejmenší takové n, že $a_n = a$. Využitím dobrého uspořádání množiny ω jsme se tak vyhnuli použití axiomu výběru při konstrukci prostého zobrazení $g\colon A \to \omega$.

PŘÍMÝM POUŽITÍM AXIOMU VÝBĚRU (PODLE FILIPA BIALASE):
Nabízí se i jiný způsob konstrukce. Můžeme si říci, že se podíváme mezi nulu a jedničku; pokud tam leží alespoň jeden prvek X, některý vybereme a přihodíme ho do konstruované množiny. Pak se podíváme mezi jedničku a dvojku a pokud tam najdeme nějaké číslo, zase ho přidáme k těm už vybraným. Tento postup se dá formalizovat přímo pomocí axiomu výběru.

[1] Viz třetí díl seriálu, kapitola Postupné vybírání.

Průniky množiny X s intervaly $\langle i, i+1)$ pro $i \in \mathbb{Z}$ označme X_i. Množinu Y sestrojíme tak, že na X použijeme axiom nahrazení se zobrazením f, které každému $x \in X$ přiřadí to X_i, v němž x leží. Tím jsme získali množinu Y, která obsahuje právě ta X_i, která jsou neprázdná. Proto jde o množinu obsahující neprázdné disjunktní množiny, takže můžeme použít axiom výběru. Získáváme množinu reprezentantů B.

Ta má obě požadované vlastnosti. Spočetná je, protože každému jejímu prvku můžeme přiřadit celé číslo (a sice číslo intervalu X_i, jehož reprezentantem tento prvek je). A kdyby byla shora omezená, šlo by ji omezit nějakým celým číslem n; potom bychom ale věděli, že všechny množiny X_i pro $i \geq n$ byly prázdné, takže X neobsahovala žádné číslo větší než n. To je ve sporu s neomezeností X.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla v pořádku. Mírně mě překvapilo, že málokdo zvolil cestu pomocí víceznačných funkcí, i když se v seriálu vyskytovaly opakovaně a práce s nimi mi přijde intuitivnější než přímé používání axiomu výběru. Většina řešitelů postupovala podobně jako druhé ze vzorových řešení.

Opakovaně jsem se setkával s některými chybami. Dva z řešitelů se spokojili se zkonstruováním rostoucí posloupnosti a prohlásili, že ta je nutně shora neomezená. To ale není pravda – protipříkladem je posloupnost $a_n = -1/n$. Druhým problémem byla snaha konstruovat posloupnost „postupně“: Nejprve vybereme prvek x_0, potom prvek x_1 větší než $x_0 + 1$, ... Ano, přesně takto by člověk k úloze přistoupil, kdyby nemusel vysvětlovat, jak využívá axiom výběru. Uvědomme si ale, že kdykoliv máme pevné číslo x, pak k nalezení čísla většího než $x + 1$ axiom výběru nepotřebujeme – jedná se o konečný výběr, o kterém se píše hned na druhé stránce třetího dílu seriálu. K čemu je tedy axiom výběru potřeba? K tomu, abychom dokázali provést *všech spočetně mnoho výběrů*. Pokud chceme posloupnost vytvářet postupně, je nejsnazší začít víceznačnou funkcí, která každému $x \in X$ přiřadí všechny prvky X větší než $x + 1$. Tímto způsobem úlohu zcela správně vyřešili *Petr Gebauer* a *Radek Olšák*. Těm, kteří nevysvětlili, jak axiom výběru použijí, a tvrdili, že ho potřebují při každém jednotlivém výběru, jsem strhl dva body.

(Kuba Krásenský)

Úloha 2.

Dokažte, že lze množinu všech kladných reálných čísel rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny A a B tak, aby byly obě uzavřené na sčítání. Tím myslíme, že musí platit $a_0 + a_1 \in A$ a $b_0 + b_1 \in B$ pro všechna (ne nutně různá) $a_0, a_1 \in A$, $b_0, b_1 \in B$.

(Mirek Olšák)

Řešení pomocí báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$:

Nechť M je báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, tj. každé reálné číslo se dá právě jedním způsobem zapsat jako lineární kombinace prvků z M, kde koeficienty jsou racionální a jen konečně mnoho z nich je nenulových. Existenci báze M jsme dokázali v kapitole *Netriviální řešení Cauchyho rovnice.*

Vyberme nějaké $c \in M$ a rozdělme množinu $\mathbb{R}^+$ na dvě podmnožiny A, B následujícím způsobem: Množina A bude obsahovat kladná reálná čísla, která mají nezáporný koeficient u c, a množina B ostatní kladná reálná čísla.

Ukážeme, že zvolené podmnožiny splňují podmínky zadání. Zřejmě jsou disjunktní a jejich sjednocením je $\mathbb{R}^+$. Mají-li dvě čísla stejné znaménko koeficientu u c, platí totéž i pro jejich součet, neboť lineární kombinaci součtu dostaneme sčítáním koeficientů „po složkách“; proto jsou A a B uzavřené na sčítání. Zbývá ještě ukázat, že A a B jsou neprázdné. Nechť $d \in M$ je nenulové a různé od c (nula v bázi stejně být nemůže, protože pak by šlo např. nulu zapsat více způsoby jako $k \cdot 0$ pro různá k). Dále vybereme $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $q \cdot d > |c|$. Potom $0 < q \cdot d + c \in A$ a zároveň $0 < q \cdot d - c \in B$, takže jsou obě množiny opravdu neprázdné.

Řešení pomocí Zornova lemmatu (volně podle Petra Gebauera a Kuby Löwita):
Množinu M nazveme *dobrou*, pokud splňuje následující podmínky:

(1) $M \subset \mathbb{R}^+$.
(2) M je uzavřená na sčítání.
(3) M neobsahuje žádné racionální číslo.

Označme $\mathcal{S}$ množinu všech dobrých množin, na které definujeme uspořádání inkluzí. Nechť $\mathcal{R}$ je řetězec v $\mathcal{S}$. Potom $\bigcup_{M \in \mathcal{R}} M = T$ také náleží $\mathcal{S}$, neboť:

(1) $T \subset \mathbb{R}^+$.
(2) Jestliže $a, b \in T$, znamená to, že najdeme $L, M \in \mathcal{R}$ tak, že $a \in L$, $b \in M$. Protože $\mathcal{R}$ je řetězec, platí $L \subset M$ nebo $M \subset L$; větší z množin L, M tudíž obsahuje a i b. Potom tato větší množina obsahuje i $a + b$, takže $a + b \in T$. Množina T je tudíž uzavřená na sčítání.
(3) Kdyby T obsahovala racionální číslo q, muselo by q ležet v některé množině $M \in \mathcal{R}$, což je spor. Proto T neobsahuje žádné racionální číslo.

Můžeme tedy aplikovat Zornovo lemma na množinu $\mathcal{S}$. Protože $\{\sqrt{2}\cdot n : n \in \omega\} \in \mathcal{S}$, můžeme nalézt maximální prvek M_0 splňující navíc $\{\sqrt{2}\cdot n : n \in \omega\} \subset M_0$. Ukážeme, že M_0 a $\mathbb{R}^+ \setminus M_0$ představují vyhovující rozdělení množiny $\mathbb{R}^+$. Obě zmíněné podmnožiny jsou zřejmě neprázdné a disjunktní, jejich sjednocení tvoří $\mathbb{R}^+$ a M_0 je uzavřená na sčítání, stačí proto ukázat, že je $\mathbb{R}^+ \setminus M_0$ uzavřená na sčítání. Pro spor předpokládejme, že existují $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus M_0$ taková, že $a+b = m_0 \in M_0$. Kdybychom do M_0 přidali prvek a spolu se všemi součty tvaru $na+m$, kde $n \in \omega$, $m \in M_0$, dostali bychom zase množinu uzavřenou na sčítání. Díky maximalitě dobré množiny M_0 tedy musejí existovat $n_1 \in \omega$ a $m_1 \in M_0$ taková, že $m_1 + n_1 a = q_1 \in \mathbb{Q}$. Obdobným argumentem zajistíme existenci $n_2 \in \omega$ a $m_2 \in M_0$ takových, že $m_2 + n_2 b = q_2 \in \mathbb{Q}$. Nyní platí

$$n_1 n_2 m_0 + n_2 m_1 + n_1 m_2 = n_2(n_1 a + m_1) + n_1(n_2 b + m_2) = n_2 q_1 + n_1 q_2 \in \mathbb{Q},$$

což je ve sporu s uzavřeností množiny M_0 na sčítání.

Poznámky:
Všechna došlá řešení se podobala jednomu nebo druhému vzorovému řešení. Část toho prvního, ve které dokazujeme neprázdnost dílčích podmnožin, můžeme zkrátit volbou báze, která obsahuje 1 a $\sqrt{2}$, a následným použitím těchto prvků jako c, d. Pak totiž můžeme přímo vyjmenovat některá čísla, která patří do A či B. Takovou bázi získáme pomocí Zornova lemmatu jako maximální lineárně nezávislou množinu obsahující 1 a $\sqrt{2}$.

Dvěma úspěšným řešením využívajícím Zornovo lemma jsem udělil $+i$. Chtěl bych zde upozornit, že je důležité zajistit, aby „množina“, na kterou chceme aplikovat Zornovo lemma, byla opravdu množinou, tedy aby se dala zkonstruovat pomocí zadaných axiomů. V našem případě se použitá množina sestrojí axiomem vydělení z $\mathbb{R}^+$. Mnohdy to tak zřejmé není a hrozí, že pracujeme s nevlastní třídou, na niž Zornovo lemma použít nemůžeme.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 3.

Dokažte, že lze celý prostor $\mathbb{R}^3$ získat jako sjednocení nějaké množiny navzájem disjunktních kružnic s poloměrem 1.

(Mirek Olšák)

Řešení (podle Filipa Bialase):
Po třech dílech seriálu víme, že $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, tudíž můžeme sestrojit dobře uspořádanou posloupnost bodů prostoru, která má délku $\mathfrak{c}$ a každý bod se v ní nachází právě jednou.

Nyní chceme transfinitní rekurzí přiřadit každému bodu x_α kružnici k_α takovou, že $x_\alpha \in k_\alpha$ pro každý ordinál $\alpha < \mathfrak{c}$. Navíc požadujeme, aby každé dvě kružnice byly buď totožné, nebo disjunktní.

Vezměme tedy nějaký bod x_α a množinu již přiřazených kružnic $M_\alpha = \{k_\beta : \beta < \alpha\}$. Pokud $x_\alpha \in \bigcup M_\alpha$, pak vezmeme jako k_α onu již vybranou kružnici, která obsahuje x_α. Stačí tedy rozřešit případ, kdy x_α ještě není pokryt žádnou kružnicí. Zavedeme soustavu souřadnic se středem v x_α a uvažujeme všechny roviny, které obsahují osu z. Každá taková rovina je určena svou odchylkou od osy x, kterou můžeme brát z intervalu $[0, \pi)$. Získáme tak kontinuum rovin procházejících x_α. Jelikož jsme zatím zvolili méně než kontinuum kružnic, přičemž každá kružnice leží celá právě v jedné rovině, existuje rovina neobsahující žádnou z dosavadních kružnic. Tuto rovinu označme ρ.

Každá z kružnic k náležících do M_α může mít s rovinou ρ maximálně dva společné body. Bodů v rovině ρ, které jsou již pokryty, je tedy jistě méně než kontinuum. Množinu těchto bodů označme Y. Bod x_α leží na kružnici k_α právě tehdy, když se její střed nachází na kružnici ℓ se středem x_α a poloměrem 1. Máme tedy kontinuum možných kružnic. Hledaná kružnice k_α ale nesmí obsahovat žádný bod z Y, takže střed k_α nesmí ležet na žádné z jednotkových kružnic se středem v Y. Každá jednotková kružnice se středem v Y může mít s ℓ maximálně dva průsečíky, takže máme máme dohromady méně než kontinuum zakázaných středů. Proto lze skutečně zvolit vyhovující kružnici.

Poznámky:

Úloha se velice podobala jednomu příkladu v seriálu (před hrou bez neprohrávající strategie), jenomže bylo potřeba vyřešit víc technických potíží. Klíčem bylo si uvědomit, že kontinuum jako kardinál má vlastnost, že každý menší ordinál má ostře menší kardinalitu. V každém kroku máme tedy vybráno pouze „málo“ kružnic a zbývá nám „hodně“ prostoru k přidání další kružnice. Postupů, jak přidat onu kružnici, jste navrhli více. Jeden z nich byl uveden ve vzorovém řešení.

(Anh Dung „Tonda“ Le)