Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. KVĚTNA 2016

V této sérii je možné za každou úlohu získat až 5 bodů a na rozdíl od běžné série se tentokrát započítávají všechny úlohy.

ÚLOHA 1.

Byla nebyla jedna krychle beze zbytku pokryta n trojúhelníkovými tapetami. Tapety se smí ohýbat přes hrany krychle,[1] ale nesmí se trhat ani překrývat samy se sebou ani s ostatními tapetami. Rozhodněte a dokažte, zda opravdu byla, či nebyla, pro

(a) $n = 4$, (2 BODY)

(b) $n = 3$. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Ukažte, že pokud je pro m a n přirozená poměr $\dfrac{5n+m}{5m+n}$ celočíselný, pak i poměr $\dfrac{n}{m}$ je celočíselný. (2 BODY)

(b) Je dán trojúhelník a bod uvnitř něj. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s každou stranou. Tyto rovnoběžky dělí trojúhelník na tři rovnoběžníky a tři trojúhelníky. Součet obsahů těchto trojúhelníků označme s, obsah celého trojúhelníka označme S. Určete nejmenší možnou hodnotu poměru $\frac{s}{S}$. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

Rozhodněte, zda lze na šachovnici 8×8 umístit dva

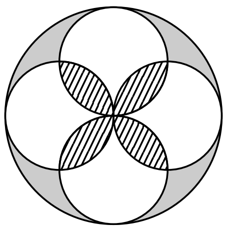
(a) krále (2 BODY)

(b) prince (krále bez možnosti diagonálních tahů) (3 BODY)

a následně s nimi provést posloupnost tahů tak, aby se v každé možné pozici ocitli právě jednou. Táhne vždy libovolná z figur způsobem povoleným pro krále resp. prince. Šachové ohrožování ani vyhazování se nebere v úvahu a figury nesmí stát na stejném políčku. Pozicí rozumíme uspořádanou dvojici políček, na kterých králové nebo princové právě stojí. (Tedy například jejich prohozením vznikne jiná pozice.)

ÚLOHA 4.

(a) Rozhodněte, zda ze zvýrazněných oblastí na obrázku má větší obsah šedá, nebo šrafovaná. (2 BODY)



[1] Všimněte si, že není možné tapetu nalepit přes vrchol krychle, aniž bychom ji pomuchlali.

(b) Rado má pizzu ve tvaru čtverce 30×30. *Patvarem* nazvěme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy. Rado rozřezal pizzu na několik patvarů se součtem obvodů 600. Ukažte, že nějaký kousek pizzy má obsah alespoň 36. (3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince, na lichých křižovatkách odbočí vlevo a na sudých vpravo.[2] Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince? (2 BODY)

(b) Bludiště sestává z konečně mnoha políček čtverečkované sítě a je po obvodu ohraničeno zdmi. Rovněž mezi některými dvojicemi sousedních políček mohou být zdi. Čtverečky jsou orientovány podle světových stran. Na některých políčkách se nacházejí branci. Počáteční pozice každých dvou branců spojuje cesta, která nevede skrz zeď. Generál Koňadra může udílet povely SEVER, JIH, VÝCHOD nebo ZÁPAD. Všichni branci se poté pokusí pohnout o jedno políčko daným směrem. Branec, který se pohnout nemůže, protože mu v kroku brání zeď, zůstane stát. Ukažte, že generál mající dobrý výhled na celé bludiště umí vydávat povely tak, aby všichni branci po konečném počtu povelů stáli na jednom políčku. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Buď $n > 2$ přirozené číslo. Dokažte, že

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}} < \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}.$$

Takzvané *patrové mocniny*, které se v dokazovaném vztahu vyskytují, se vyhodnocují shora, tedy např. $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561$. (2 BODY)

(b) Ukažte, že pro každé přirozené n a každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n (n + 1)^{n+1}}.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Kolik nejvíce průsečíků se stranami ne (nutně konvexního) 333-úhelníku může mít přímka, která není s žádnou z nich rovnoběžná?

(2 BODY)

(b) V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Nechť O a H značí po řadě střed kružnice opsané a průsečík výšek. Pokud P a Q jsou průsečíky přímky OH se stranami AB a BC, ukažte, že $|PO| = |HQ|$.

(3 BODY)

[2] David si bude v duchu počítat, kolik křižovatek již prošel, a podle tohoto počtu se bude rozhodovat. Klidně se mu tedy může stát, že přijde na stejnou křižovatku podruhé, ale rozhodne se odbočit jiným směrem.

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(68; 67; 2,40; 2,0)

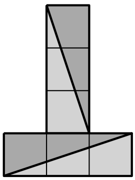
Byla nebyla jedna krychle beze zbytku pokryta n trojúhelníkovými tapetami. Tapety se smí ohýbat přes hrany krychle,[1] *ale nesmí se trhat ani překrývat samy se sebou ani s ostatními tapetami. Rozhodněte a dokažte, zda opravdu byla, či nebyla, pro*

(a) $n = 4$,

(b) $n = 3$. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

ŘEŠENÍ:

(a) Tapetami pokryjeme síť krychle jako na obrázku a ze sítě poté složíme krychli, takže taková krychle byla.



(b) Pro spor předpokládejme, že taková krychle byla. Vrchol krychle nemůže být překrytý vnitřkem žádné tapety, protože kolem vrcholu krychle je dohromady úhel $270°$, zatímco kolem vnitřního bodu trojúhelníku $360°$, takže by se tapeta pomuchlala. Vrchol proto musí být pokrytý jen hranami a vrcholy. Přitom každá hrana pokryje $180°$ z úhlu kolem vrcholu, takže u vrcholu může být jen jedna. To znamená, že alespoň $90°$ je pokryto jedním nebo více vrcholy trojúhelníků. Dohromady to znamená, že vrcholy krychle musí být pokryty úhly o velikosti alespoň $8 \cdot 90° = 720°$, ale vrcholy třech trojúhelníků mají dohromady jen $3 \cdot 180°$, což je méně. Tím dostáváme požadovaný spor, a taková krychle tedy nebyla.

POZNÁMKY:

V podstatě všichni, kdo poslali první část, ji měli správně. Ve druhé části to bylo o poznání slabší. Správných řešení bylo pár a byla jen dvou typů. Většina jich byla téměř stejná jako výše uvedené. Druhý postup, který vedl k cíli a který zvolili dva nebo tři řešitelé, byl také podobný, akorát sporu bylo dosaženo tím, že by sedm z devíti vrcholů daných trojúhelníků muselo být pravých.

Ve většině nesprávných řešení byla snaha nějakým způsobem rozebrat všechny možnosti a říct, že jelikož žádná z nich nevyšla, tak krychle existovat nemohla. Ale o zkoumaných možnostech se dělaly různé předpoklady, jako například že trojúhelníky musí být pravoúhlé, že budou na krychli nějak „rozumně“ umístěné atd. Úspěšně rozebrat všechny možnosti bylo u tohoto příkladu opravdu téměř nedosažitelné (ostatně, nikomu se to nepovedlo). *(Štěpán Šimsa)*

[1] Všimněte si, že není možné tapetu nalepit přes vrchol krychle, aniž bychom ji pomuchlali.

Úloha 2.

(58; 51; 3,14; 3,0)

(a) *Ukažte, že pokud je pro m a n přirozená poměr $\dfrac{5n+m}{5m+n}$ celočíselný, pak i poměr $\dfrac{n}{m}$ je celočíselný.*

(Rado Švarc)

(b) *Je dán trojúhelník a bod uvnitř něj. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s každou stranou. Tyto rovnoběžky dělí trojúhelník na tři rovnoběžníky a tři trojúhelníky. Součet obsahů těchto trojúhelníků označme s, obsah celého trojúhelníka označme S. Určete nejmenší možnou hodnotu poměru $\frac{s}{S}$.*

(David Hruška)

Řešení:

(a) Poměr $\frac{5n+m}{5m+n}$ je celé číslo. Protože $n, m \in \mathbb{N}$, bude tento zlomek určitě kladný. Upravujme tedy rovnici pro $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{5n+m}{5m+n} = k,$$
$$5n + m = 5km + kn,$$
$$n \cdot (5-k) = m \cdot (5k-1).$$

Pokud $k = 5$, pak $0 = 24m$. Protože $m \in \mathbb{N}$, nemůže tato situace nastat, takže obě strany rovnice lze vydělit m a výrazem $5 - k$:

$$\frac{n}{m} = \frac{5k-1}{5-k}.$$

Poměr $\frac{n}{m}$ je kladný, takže poměr $\frac{5k-1}{5-k}$ musí být také kladný, a z toho lehce vyvodíme, že $k \leq 4$. Příslušné čtyři možnosti snadno rozebereme:

$k = 1: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot 1-1}{5-1} = 1,$

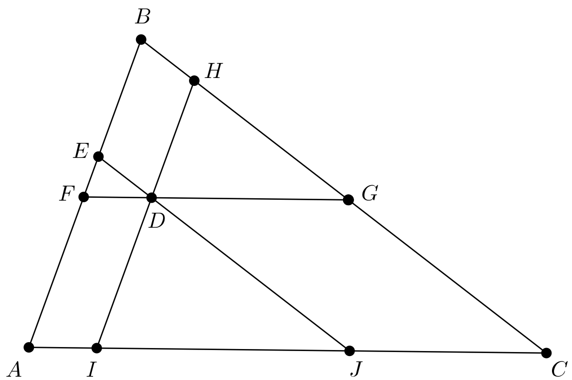
$k = 2: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot 2-1}{5-2} = 3,$

$k = 3: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot 3-1}{5-3} = 7,$

$k = 4: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot 4-1}{5-4} = 19.$

Pro všechny možné hodnoty k je poměr $\frac{n}{m}$ celočíselný.

(b) Označme trojúhelník jako ACB a bod uvnitř jako D. Trojúhelníky vytvořené rovnoběžkami přiléhající po řadě na strany a, b, c označme jako DGH, IJD a FDE.



Díky rovnoběžnosti jsou si všechny čtyři dané trojúhelníky podle věty *uu* podobné. Označme koeficienty podobnosti trojúhelníků IJD, DGH, FDE s trojúhelníkem ACB po řadě α, β, γ. Protože

$AIDF$ je rovnoběžník, tak $|AI| = |FD|$, analogicky $|JC| = |DG|$. Platí

$$|AI| + |IJ| + |JC| = |AC|\,, \quad \text{z čehož plyne} \quad |FD| + |IJ| + |DG| = |AC|\,.$$

Po vydělení poslední rovnosti $|AC|$ dostáváme $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Označme s_1, s_2, s_3 po řadě obsahy trojúhelníků IJD, DGH, FDE. Poměr obsahů dvou podobných trojúhelníků se rovná druhé mocnině jejich koeficientu podobnosti, a proto můžeme psát:

$$\frac{s}{S} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{S} = \frac{\alpha^2 \cdot S + \beta^2 \cdot S + \gamma^2 \cdot S}{S} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Chceme tedy minimalizovat tuto sumu kvadrátů za podmínky $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ukážeme, že je vždy větší nebo rovna $\frac{1}{3}$. Podmínku využijeme ve tvaru $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &\geq \frac{1}{3}, \\ 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) &\geq (\alpha + \beta + \gamma)^2. \end{aligned}$$

Roznásobíme, převedeme na jednu stranu a následně upravíme na čtverce.

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma &\geq 0, \\ (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zjevně platí, a protože jsme použili jen ekvivalentní úpravy, platí i původní nerovnost $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \frac{1}{3}$. Jinými slovy je poměr $\frac{s}{S}$ vždy alespoň $\frac{1}{3}$. Rovnost nastává právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Lehce ověříme, že to je případ, kdy bod D splyne s těžištěm trojúhelníku ACB, takže skutečně umíme dosáhnout toho, aby $\frac{s}{S} = \frac{1}{3}$.

Poznámky:

Úlohu jsme bodovali následovně:

(i) jeden bod byl za podmínku pro k a druhý za dořešení úlohy,

(ii) za nalezení minima jako umístění bodu do těžiště a určení hodnoty $\frac{1}{3}$ jsme dávali bod, zbylé dva za důkaz minimálnosti.

První část byla většinou bez problémů. Chtěli bychom jen podotknout, že pokud existuje jen málo možných výsledků, jako v tomto případě, je vhodné je otestovat a vypsat. Zkontrolujete si tím své řešení, mnohdy se stane, že něco přehlédnete.

Překvapilo nás, kolik z vás poslalo i řešení (b). Bohužel sice často bylo řečeno, že nejmenší hodnota poměru je $\frac{1}{3}$ (a nastává v případě těžiště), ale chyběl důkaz. Argumentovali jste tím, že hýbáním bodem D už se „malé trojúhelníčky jen zvětšují“ a dokládali jste to degenerovanými případy s bodem ve vrcholu nebo na straně, což má k důkazu daleko.

Správným krokem bylo vyjádření poměrů podobností, což vedlo na minimalizaci funkce tří proměnných s jednou podmínkou. Minimální hodnotu $\frac{1}{3}$ bylo možné uhodnout a následně dokázat pomocí standardních metod (AG, Cauchy–Schwarz, případně uvedený rozklad na čtverce). Těžší cesta vedla přes hledání minima funkce dvou proměnných (po dosazení z podmínky). Hledat minimum funkce dvou proměnných není obecně jednoduché a na řešitele číhá několik nástrah, ale nakonec jsme nestrhávali body těm, kteří se o to pokusili a došli k správnému závěru, i když třeba ne úplně formálně. *(Jan Kadlec ∪ Jan Soukup)*

Úloha 3. (41; 19; 1,90; 1,0)

Rozhodněte, zda lze na šachovnici 8×8 *umístit dva*

(a) *krále*

(b) *prince (krále bez možnosti diagonálních tahů)*

a následně s nimi provést posloupnost tahů tak, aby se v každé možné pozici ocitli právě jednou. Táhne vždy libovolná z figur způsobem povoleným pro krále resp. prince. Šachové ohrožování ani vyhazování se nebere v úvahu a figury nesmí stát na stejném políčku. Pozicí rozumíme uspořádanou dvojici políček, na kterých královéspokojně nebo princové právě stojí. (Tedy například jejich prohozením vznikne jiná pozice.) *(David Hruška)*

Řešení:

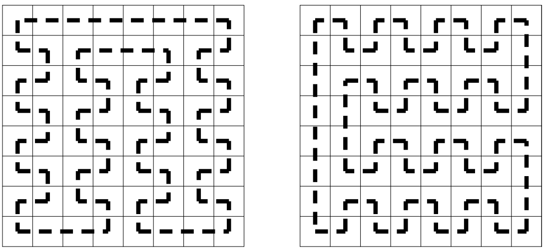
(a) Dva krále *lze* umístit na šachovnici a provést s nimi zadanou posloupnost tahů.

Řešení (podle Lucie Krajčoviechové):

Rozlišujme černého a bílého krále. Ukážeme, jak je možné projít bílým králem všechna neobsazená políčka právě jednou pro každou pevnou polohu černého krále a každé počáteční políčko bílého krále. Až to budeme mít, začneme tím, že dopředu naplánujeme trasu černého krále. Po každém jeho kroku projde bílý král zbylých 63 políček. Pokud nikdy neskončí na políčku, kam se chystá jít černý král, ocitnou se při tomto postupu královéspokojně v každé pozici právě jednou.

Zbývá ukázat slibované cesty přes všechna políčka. *Uzavřená cesta* budeme říkat libovolné posloupnosti různých políček, v níž každá dvě po sobě jdoucí políčka jsou sousední (král mezi nimi může přejít jedním tahem) a navíc poslední políčko sousedí s tím prvním. Začne-li král na libovolném políčku nějaké uzavřené cesty, může se po ní pohybovat jedním ze dvou směrů tak, že projde každé políčko cesty právě jednou a skončí na políčku sousedícím s tím, kde začal.

Uvažme libovolnou pozici černého a bílého krále. Uzavřenou cestu bílého krále přes všechna políčka šachovnice se pokusíme upravit tak, aby procházela všechna políčka kromě toho, na kterém stojí černý král. Stojí-li černý král na takovém políčku cesty, že z něj cesta pokračuje jedním směrem vertikálně a druhým horizontálně, můžeme ono políčko z cesty vypustit a vznikne uzavřená cesta (vertikální a horizontální soused spolu budou stále diagonálně sousedit). Bohužel není možné navrhnout cestu přes všechna políčka takovou, aby na každém políčku vertikálně nebo horizontálně „zahýbala“. Nicméně existuje dvojice uzavřených cest přes všechna políčka taková, že pro každou polohu černého krále jedna z cest má popsanou vlastnost (viz obrázek).



Na závěr popíšeme kompletní strategii pro tahy králi, která povede k tomu, že se ocitnou v každé pozici právě jednou. Umisťme krále na libovolná dvě políčka šachovnice a zvolme libovolnou uzavřenou cestu přes všechna políčka, po které se bude pohybovat černý král. Po každém jeho pohybu projde bílý král všechna ostatní políčka šachovnice tak, aby neskončil na políčku, kam bude příštím tahem chtít jít černý král. To udělá tak, že si vybere jednu z dříve zmíněných uzavřených cest tak, aby zahýbala na políčku, kde stojí černý král. Dále si zvolí směr obcházení cesty, při němž neskončí na políčku, kam se chystá jít černý král (všimněte si, že při obou směrech procházení uzavřené cesty skončí na jiném políčku), a všechna políčka cesty v tomto směru projde s vynecháním políčka, na kterém stojí černý král. Tímto postupem se ocitnou králové v každé pozici právě jednou.

(b) Ukážeme, že dva prince *nelze* umístit na šachovnici a provést s nimi požadovanou posloupnost tahů. Pro spor předpokládejme počáteční umístění a tahy takové, že se princové ocitnou v každé pozici právě jednou.

Různých pozic je přesně $64 \cdot 63$ (první princ má 64 možností a druhý už pouze 63, protože nemůže stát na stejném políčku). Uvažme obvyklé šachovnicové obarvení a nazvěme pozici *stejnobarevnou*, jsou-li v ní princové na políčkách stejné barvy. V opačném případě hovoříme o *různobarevné* pozici.

Všimněme si, že libovolný tah ze stejnobarevné pozice vede do různobarevné, protože tah každého prince změní barvu políčka, na kterém se nachází. Analogicky z různobarevné pozice všechny možné tahy vedou do stejnobarevné.

Z toho plyne, že se v každé posloupnosti tahů střídají stejnobarevné a různobarevné pozice, a proto během libovolných $64 \cdot 63$ tahů princové projdou $32 \cdot 63 = 2016$ (ne nutně různých) stejnobarevných a stejný počet různobarevných pozic.

Dále počítejme, kolik stejnobarevných pozic existuje. Tento počet je přesně $64 \cdot 31 = 1984$ (prvního prince můžeme umístit kamkoliv a druhého již pouze na zbylých 31 políček shodné barvy). Princové proto museli během $64 \cdot 63$ tahů navštívit některé stejnobarevné pozice vícekrát, což je ve sporu s předpokladem. Žádná taková posloupnost tahů tedy neexistuje.

Poznámky:

První část úlohy se téměř všichni pokoušeli řešit podobně jako v autorském řešení. Málokdo ovšem pořádně vysvětlil, proč pro bílého krále vždy existuje cesta, která projde každé políčko právě jednou a navíc neskončí tam, kde by překážel černému králi. Něco takového rozhodně není zřejmé a na této úloze to byla nejnáročnější část.

Všimněte si, že černý král se v našem řešení pohybuje jako princ a bílý použije jen 64 diagonálních tahů. Z našeho řešení druhé části úlohy plyne, že je potřeba alespoň $2016 - 1984 = 32$ diagonálních tahů, ale není jasné, zda této hranice lze dosáhnout.

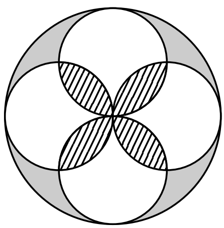
(Filip Hlásek)

Úloha 4.

(76; 74; 2,39; 2,0)

(a) *Rozhodněte, zda ze zvýrazněných oblastí na obrázku má větší obsah šedá, nebo šrafovaná.*

(David Hruška)



(b) *Rado má pizzu ve tvaru čtverce* 30×30. *Patvarem nazvěme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy. Rado rozřezal pizzu na několik patvarů se součtem obvodů* 600. *Ukažte, že nějaký kousek pizzy má obsah alespoň* 36.

(Rado Švarc)

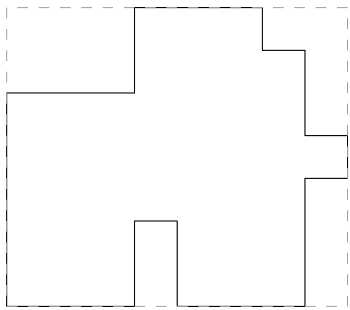
Řešení:

(a) Malé kruhy mají poloviční poloměr než velký kruh. Označíme-li r poloměr malého kruhu, bude obsah velkého kruhu $\pi(2r)^2$ a obsah čtyř malých kruhů $4\cdot\pi r^2$. Obsah velkého kruhu můžeme rovněž vyjádřit jako součet ploch malých kruhů s plochou šedé oblasti (tj. prostoru nepokrytého malými kruhy) bez plochy šrafované části, kterou bychom jinak započítali dvakrát, protože se na ní vždy překrývají dva malé kruhy. Díky rovnosti plochy velkého kruhu a čtyř malých kruhů dostáváme rovnost mezi plochou šedé a šrafované oblasti.

(b) Pro spor předpokládejme, že existuje rozřezání na patvary $P_1, P_2, \ldots, P_n$, které mají všechny obsah menší než 36. Označme $S(P_i)$ obsah a $O(P_i)$ obvod patvaru P_i.

Lemma. *Pro každý patvar P_i existuje čtverec o straně a_i takový, že obsah čtverce bude roven obsahu patvaru a obvod čtverce bude nejvýše obvod patvaru.*

Důkaz. Nejprve každý patvar P_i nahradíme nejmenším obdélníkem (se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy), který celý tento patvar obsahuje. Zjevně je obsah tohoto obdélníku větší nebo roven obsahu patvaru. Obvod obdélníku bude nejvýše roven obvodu patvaru, protože jedna z nejkratších cest pomocí rovnoběžných a svislých úseček mezi dvěma vrcholy patvaru vede po hraně obdélníku.



Nyní nahradíme obdélník čtvercem o stejném obvodu. Má-li obdélník rozměry $(c-x)\times(c+x)$, bude mít čtverec stranu délky c. Obsah čtverce c^2 je větší nebo roven obsahu obdélníku

$$(c-x)(c+x) = c^2 - x^2.$$

Nakonec čtverec zmenšíme tak, aby měl stejný obsah jako původní patvar. Zmenšením jeho obvod jedině klesne. □

Po nahrazení patvarů pomocí čtverců podle lemmatu dostáváme:

$$900 = \sum_{i=1}^{n} S(P_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$600 = \sum_{i=1}^{n} O(P_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 4a_i.$$

Zkombinováním těchto vztahů dostaneme:

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} 4a_i \leq \frac{3}{2}\cdot 600 = 900 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$6\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Pro spor jsme předpokládali, že obsah každého patvaru je menší než 36. To znamená, že strana a_i příslušného čtverce o stejném obsahu je menší než 6, čímž dostáváme spor s posledním vztahem.

Poznámky:

Řešení první části přišlo opravdu hodně a téměř všechna byla správně. Někteří sice zbytečně počítali obsahy šedé a vyšrafované části, ale i ti se nakonec dobrali správného výsledku. Snad bych jen opět připomněl, že je důležitý slovní komentář – na zadefinování značení i na vysvětlování, jak jsme k danému vzorečku došli. Místy to vypadalo skoro jako v anglické sérii, tj. řešení bez jediného slova.

Druhá část byla o poznání zapeklitější. Mnozí se ve svých řešení zbytečně zdržovali u popisu rozdělení na 25 čtverců a pak celý důkaz shrnuli do nějaké, lehce nekonkrétní, jedné věty, která vlastně nic nedokazovala. Rád bych připomněl, že u existenciálních úloh je opravdu užitečné řešení sepisovat sporem a ne postupným zdůvodňováním, proč naše rozdělení je optimální. Věřím, že hned několik řešení si mohlo vysloužit více bodů, pokud by byly sepsány ty samé myšlenky jako důkaz sporem. *(Martin Töpfer)*

Úloha 5.

(43; 29; 2,88; 3,0)

(a) *David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince, na lichých křižovatkách odbočí vlevo a na sudých vpravo.*[2] *Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?*

(David Hruška)

(b) *Bludiště sestává z konečně mnoha políček čtverečkované sítě a je po obvodu ohraničeno zdmi. Rovněž mezi některými dvojicemi sousedních políček mohou být zdi. Čtverečky jsou orientovány podle světových stran. Na některých políčkách se nacházejí branci. Počáteční pozice každých dvou branců spojuje cesta, která nevede skrz zeď. Generál Koňadra může udílet povely SEVER, JIH, VÝCHOD nebo ZÁPAD. Všichni branci se poté pokusí pohnout o jedno políčko daným směrem. Branec, který se pohnout nemůže, protože mu v kroku brání zeď, zůstane stát. Ukažte, že generál mající dobrý výhled na celé bludiště umí vydávat povely tak, aby všichni branci po konečném počtu povelů stáli na jednom políčku.* *(Rado Švarc)*

Řešení:

(a) David se určitě k hospodě Na mýtince vrátí.

Označme stav, ve kterém se David může nacházet, jako uspořádanou trojici (s, d, p), kde s je silnice, po které momentálně jde, d je směr, kterým po ní jde, a p je parita udávající, kam odbočí na následující křižovatce. Silnic je konečně mnoho a pro každou z nich jsou jen čtyři možné stavy, takže i stavů je konečně mnoho. Proto David jednou přijde do stavu, ve kterém už byl. Od té doby bude nutně chodit v cyklu, protože každý stav jednoznačně určuje stav následující.

Nyní pro spor předpokládejme, že hospoda Na mýtince v tomto cyklu není. Označme x první stav cyklu, do kterého se David dostal. Tento stav určitě není tím prvním celé Davidovy cesty, protože jinak by v cyklu byla i hospoda Na mýtince. Uvědomíme si, že stav kromě následujícího jednoznačně určuje také stav předcházející. To je pravda proto, že chceme-li zjistit předchozí stav, stačí pouze oproti tomu současnému změnit paritu, podle ní zjistit, na kterou stranu jsme na poslední křižovatce odbočili, a podle toho se jednoznačně vrátit na hranu, ze které jsme přišli.

Proto není možné, aby se David dostal do stavu x poprvé z nějakého stavu mimo cyklus a podruhé ze stavu, který už v cyklu je. To je kýžený spor.

[2] David si bude v duchu počítat, kolik křižovatek již prošel, a podle tohoto počtu se bude rozhodovat. Klidně se mu tedy může stát, že přijde na stejnou křižovatku podruhé, ale rozhodne se odbočit jiným směrem.

(b) Problém budeme řešit indukcí podle počtu branců.

Je-li na čtvercové mřížce jen jeden branec, je úloha vyřešena. Pokud jsou na mřížce dva branci A a B, povede mezi nimi po libovolném počtu příkazů cesta beze zdi. Nyní se podíváme na nějakou z nejkratších cest P mezi A a B a její délku (počet polí) si označíme d.

Dále budeme pokračovat indukcí podle d. Pokud $d = 0$, jsou A a B na stejném políčku. Pokud $d > 0$, můžeme brance A navigovat po cestě P. Potom mohou nastat následující situace:

(1) Branec B nemohl alespoň jeden z rozkazů kvůli zdi vykonat. Potom se ale určitě zmenšila délka nejkratší cesty mezi A a B, a tedy už z indukčního předpokladu umíme A a B dostat na stejné pole.

(2) Branec B prošel stejnou trasu jako branec A. V takovém případě se ale posunul o vektor, který spojuje počáteční pole A a B. Kdybychom tedy krok opakovali stále s tímto výsledkem, museli by se pokaždé branci posunout o ten samý (nenulový) vektor, což je spor s konečností bludiště. Tato možnost tedy může nastat pouze konečněkrát za sebou, a tedy jednou nastane možnost (1). Poté již dokážeme dostat A a B na stejné políčko.

Nyní předpokládejme, že pro n nebo méně branců umíme brance dostat na stejné políčko. Budeme se o to snažit pro $n + 1$. Nejprve z indukčního předpokladu umíme zařídit, aby se prvních n branců sešlo na jednom políčku. Od této chvíle se už budou vždy pohybovat společně, protože jak povely, tak schopnost/neschopnost daný povel vykonat, sdílejí. Můžeme je tedy nadále považovat za jednoho brance. Dva brance už však na jedno políčko umíme dostat z indukčního předpokladu.

Poznámky:

V části (a) se téměř čtvrtina řešitelů pokusila (samozřejmě neúspěšně) ukázat, že se David k hospodě již nikdy nevrátí. Naopak všechna správná řešení vypadala podobně jako vzorák. Jen mnohá z nich nemluvila o jednoznačném určení předchozího stavu, což vyústilo v rozbor případů, kterých naštěstí nebylo mnoho, a tak byly typicky rozebrané správně.

U druhé úlohy přišlo mnoho nefunkčních řešení spočívajících třeba v tom, že všechny brance naženeme do jednoho rohu. Předně roh (nebo i všechny) může být ohraničen zdmi tak, že se do něj vůbec nedá dostat, ale také samo nahánění do rohu může být pro dostatečně složité bludiště netriviální. Z ostatních řešení na indukci podle počtu branců přišla téměř všechna (za což dostala jeden bod), s druhou částí byly občas problémy například v tom, že řešení pouze opakovala trasu P, dokud se branci nesetkají na jednom poli. Nenašel jsem ale jediný důkaz, že něco takového obecně funguje.

(Viki Němeček)

Úloha 6.

(56; 47; 1,93; 2,0)

(a) *Buď $n > 2$ přirozené číslo. Dokažte, že*

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}} < \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}.$$

Takzvané patrové mocniny, které se v dokazovaném vztahu vyskytují, se vyhodnocují shora, tedy např. $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561$.

(Matěj Konečný)

(b) *Ukažte, že pro každé přirozené n a každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí*

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n (n + 1)^{n+1}}.$$

(Rado Švarc)

Řešení:

(a) Tvrzení dokážeme indukcí podle n. Nechť $a_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}}$ a $b_n = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}$.

Pro nejmenší uvažované n, tj. $n = 3$, tvrzení platí, protože

$$a_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16 < 27 = 3^3 = b_3.$$

V indukčním kroku dokážeme, že z platnosti pro n ($a_n < b_n$) platí tvrzení i pro $n + 1$:

$$a_{n+1} = 2^{a_n} < 3^{a_n} < 3^{b_n} = b_{n+1}.$$

Tím jsme tvrzení dokázali.

(b) Využijeme rovnost

$$1 + x_1 + \cdots + x_i = (n - i + 1) \times \frac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1} + x_i$$

a použijeme AG nerovnost na $n - i + 2$ čísel: jedno x_i a $n - i + 1$ zlomků $\dfrac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1}$. Tím dostaneme:

$$1 + x_1 + \cdots + x_i \geq (n - i + 2)\ \sqrt[n-i+2]{\left(\frac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1}\right)^{n-i+1} x_i}.$$

Po umocnění na $n - i + 2$ získáme

$$(1 + x_1 + \cdots + x_i)^{n-i+2} \geq \frac{(n - i + 2)^{n-i+2}}{(n - i + 1)^{n-i+1}}(1 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^{n-i+1} x_i.$$

Pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dostáváme následujících n nerovností:

$$\begin{aligned}
(1 + x_1)^{n+1} &\geq \frac{(n + 1)^{n+1}}{n^n} x_1,\\
(1 + x_1 + x_2)^n &\geq \frac{n^n}{(n - 1)^{n-1}}(1 + x_1)^{n-1} x_2,\\
(1 + x_1 + x_2 + x_3)^{n-1} &\geq \frac{(n - 1)^{n-1}}{(n - 2)^{n-2}}(1 + x_1 + x_2)^{n-2} x_3,\\
&\ \vdots\\
(1 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})^3 &\geq \frac{3^3}{2^2}(1 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-2})^2 x_{n-1},\\
(1 + x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 &\geq \frac{2^2}{1^1}(1 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}) x_n.
\end{aligned}$$

Jejich vynásobením a zkrácením příslušných členů získáme nerovnost

$$(1 + x_1)^2(1 + x_1 + x_2)^2 \ldots (1 + x_1 + \cdots + x_n)^2 \geq (n + 1)^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

což je jen zadaná nerovnost umocněná na druhou (umocnění na druhou je ekvivalentní úprava, protože členy na obou stranách jsou kladné).

Poznámky:
První úloha nebyla obtížná – prakticky každý, kdo věděl, jak funguje mocnění, ji vyřešil. Druhá úloha byla o poznání těžší. Správná řešení přišla pouze dvě. Obě byla na první pohled odlišná od vzorového (jedno využívalo vcelku zvláštní indukci a druhé chytrou substituci), ovšem při bližším přezkoumání se ukázalo, že postupují stejně jako vzorák, jen to jinak maskují. To ostatně dává smysl – v každém fungujícím řešení musí nastávat správný případ rovnosti, který je v tomto případě velmi speciální, konkrétně

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1+x_1}{n-1}, x_3 = \frac{1+x_1+x_2}{n-2}, \ldots, x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Jen těžko si lze představit řešení, které skutečně tyto případy rovnosti zachovává a přitom se ideou výrazně liší od vzorového. *(Rado Švarc)*

Úloha 7.

(62; 39; 2,27; 2,0)

(a) *Kolik nejvíce průsečíků se stranami (ne nutně konvexního) 333-úhelníku může mít přímka, která není s žádnou z nich rovnoběžná?*

(David Hruška)

(b) *V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Nechť O a H značí po řadě střed kružnice opsané a průsečík výšek. Pokud P a Q jsou průsečíky přímky OH se stranami AB a BC, ukažte, že $|PO| = |HQ|$.*

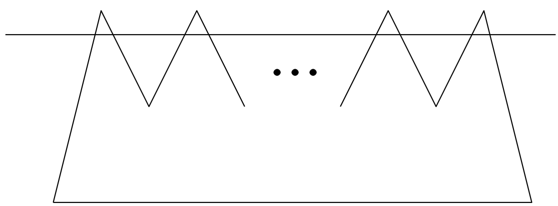
(Rado Švarc)

Řešení:
(a) Přímka může mít s každou stranou 333-úhelníku nejvýše jeden průsečík, takže celkový počet průsečíků může být maximálně 333. Ukážeme, že dokonce nemůžeme mít více než 332 průsečíků.

Prochází-li přímka vrcholem, pak mimo dvě hrany sdílející tento vrchol může přímka mnohoúhelník protínat nejvíce v 331 bodech. Tudíž maximální počet všech průsečíků je nejvýše 332.

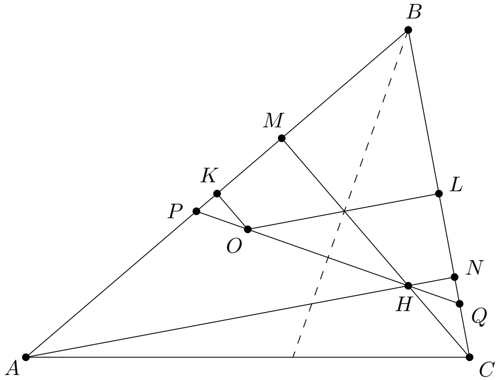
Nyní předpokládejme, že přímka žádným vrcholem neprochází. Úseky přímky, které leží vně 333-úhelníku, obarvíme červeně a ostatní modře. První a poslední úseky jsou nekonečné, tudíž nutně musí být červené. Navíc sousední úseky mají různou barvu, a proto máme sudý počet průsečíků. Největší sudé číslo menší nebo rovno 333 je 332. Proto i takto může přímka vytvořit maximálně 332 průsečíků.

Počtu 332 průsečíků umíme dosáhnout 333-úhelníkem tvaru „pily“:



(b) Nechť K, L jsou kolmé projekce bodu O na BA, resp. BC, a M, N kolmé projekce bodu H na BA, resp. BC. Zřejmě K, L jsou středy stran BA a BC. V trojúhelníku BMC platí:

$$|BM| = \cos\sphericalangle MBC,$$
$$|BC| = \cos 60^\circ,$$
$$|BC| = \frac{|BC|}{2} = |BL|.$$



Takže v osové souměrnosti podle osy úhlu ABC se M zobrazí na L, tedy toto zobrazení posílá kolmici na BA bodem M, přímku HM, na kolmici na BC bodem L, přímku OL. Analogicky se přímka HN zobrazí na OK, tudíž jsou body H, O souměrné podle osy úhlu ABC. V této souměrnosti je tedy přímka HO svým vlastním obrazem, takže její průsečíky s AB a AC jsou svými vzájemnými obrazy. Proto jsou body P, Q souměrné dle této osy, tedy $|PO| = |HQ|$.

Poznámky:
Většina došlých řešení části a) byla správná a téměř všechna z nich využila argument ve vzorovém řešení. Další možný postup, poněkud náročnější na vysvětlení a sepisování, je uvažovat konvexní a nekonvexní úhly v 333-úhelníku. Někteří bohužel po důkazu, že maximum nemůže být 333, zapomněli uvést vyhovující uspořádání přímky a mnohoúhelníku, a tím zbytečně ztratili jeden bod.

Část b) této úlohy nebyla moc těžká. Kromě trikového využití osové souměrnosti ve vzorovém řešení se dá ukázat, že trojúhelníky KPO a HNQ jsou shodné, neboť úhly v geometrické úloze s trojúhelníkem spolu s ortocentrem a středem kružnice opsané se dají většinou snadno vypočítat. Častou chybou bylo prohlášení, že dva čtyřúhelníky jsou si podobné, mají-li stejné vnitřní úhly, což není obecně pravdou (např. čtverec a nepravidelný obdélník). Někteří správně odhalili zajímavý vztah mezi ortocentem a středem kružnice opsané, a to že se jedná o kamarády. Neboli spojíme-li je s jakýmkoliv vrcholem trojúhelníku, dostaneme stejné úhly jen v opačném pořadí.

(Anh Dung „Tonda“ Le)